

7.3 部分積分法

6.5 節において述べた次の定理を述べた.

定理 関数 f の不定積分 $\int f(x) dx$ があるとき,

$$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x) .$$

定理 関数 F が微分可能である区間において,

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

関数 f は微分可能であるとする. 関数 g の不定積分 $\int g(x) dx = G(x) + A$
(A は積分定数) があるとする.

関数 f は微分可能であるとする. 関数 g の不定積分 $\int g(x) dx = G(x) + A$ (A は積分定数) があるとする. $G(x) = \int g(x) dx - A$ なので,

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\left\{\int g(x) dx - A\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int g(x) dx\right\} = g(x) .$$

関数 f は微分可能であるとする. 関数 g の不定積分 $\int g(x) dx = G(x) + A$ (A は積分定数) があるとする. $G(x) = \int g(x) dx - A$ なので,

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\left\{\int g(x) dx - A\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int g(x) dx\right\} = g(x) .$$

関数の積の微分公式より,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot G(x) + f(x) \frac{d}{dx}G(x) = f'(x)G(x) + f(x)g(x) .$$

関数 f は微分可能であるとする. 関数 g の不定積分 $\int g(x) dx = G(x) + A$ (A は積分定数) があるとする. $G(x) = \int g(x) dx - A$ なので,

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\left\{\int g(x) dx - A\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int g(x) dx\right\} = g(x) .$$

関数の積の微分公式より,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot G(x) + f(x) \frac{d}{dx}G(x) = f'(x)G(x) + f(x)g(x) ,$$

これより

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} \right] dx = \int \{f'(x)G(x) + f(x)g(x)\} dx$$

関数 f は微分可能であるとする. 関数 g の不定積分 $\int g(x) dx = G(x) + A$ (A は積分定数) があるとする. $G(x) = \int g(x) dx - A$ なので,

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\left\{\int g(x) dx - A\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int g(x) dx\right\} = g(x) .$$

関数の積の微分公式より,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot G(x) + f(x) \frac{d}{dx}G(x) = f'(x)G(x) + f(x)g(x) .$$

これより

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} \right] dx &= \int \{f'(x)G(x) + f(x)g(x)\} dx \\ &= \int f'(x)G(x) dx + \int f(x)g(x) dx . \end{aligned}$$

関数 f は微分可能であるとする. 関数 g の不定積分 $\int g(x) dx = G(x) + A$ (A は積分定数) があるとする. $G(x) = \int g(x) dx - A$ なので,

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\{\int g(x) dx - A\} = \frac{d}{dx}\{\int g(x) dx\} = g(x) .$$

関数の積の微分公式より,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot G(x) + f(x) \frac{d}{dx}G(x) = f'(x)G(x) + f(x)g(x) .$$

これより

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} \right] dx &= \int \{f'(x)G(x) + f(x)g(x)\} dx \\ &= \int f'(x)G(x) dx + \int f(x)g(x) dx . \end{aligned}$$

この等式の左辺は, 積分定数を B とおくと,

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} \right] dx = f(x)G(x) + B .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx}F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

関数 f は微分可能であるとする. 関数 g の不定積分 $\int g(x) dx = G(x) + A$ (A は積分定数) があるとする. $G(x) = \int g(x) dx - A$ なので,

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\{\int g(x) dx - A\} = \frac{d}{dx}\{\int g(x) dx\} = g(x) .$$

関数の積の微分公式より,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot G(x) + f(x) \frac{d}{dx}G(x) = f'(x)G(x) + f(x)g(x) .$$

これより

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} \right] dx &= \int \{f'(x)G(x) + f(x)g(x)\} dx \\ &= \int f'(x)G(x) dx + \int f(x)g(x) dx . \end{aligned}$$

この等式の左辺は, 積分定数を B とおくと,

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} \right] dx = f(x)G(x) + B .$$

よって,

$$f(x)G(x) + B = \int f(x)g(x) dx + \int f'(x)G(x) dx ,$$

$$f(x)G(x) + B = \int f(x)g(x) dx + \int f'(x)G(x) dx ,$$
$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx + B .$$

$$f(x)G(x) + B = \int f(x)g(x) dx + \int f'(x)G(x) dx ,$$

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx + B .$$

この等式の右辺の積分定数 B を不定積分の式 $\int f'(x)G(x) dx$ に含めると,

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx .$$

$$f(x)G(x) + B = \int f(x)g(x)dx + \int f'(x)G(x)dx ,$$

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx + B .$$

この等式の右辺の積分定数 B を不定積分の式 $\int f'(x)G(x)dx$ に含めると,

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx .$$

こうして次のことが分かる: $\int g(x)dx = G(x) + A$ (A は積分定数) とすると

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx . \quad \text{ここで, } \int g(x)dx = G(x) + A$$

における積分定数 A は, 以後の計算に現れないので省略しても構わない.

定理（不定積分の部分積分法） 関数 f, g, G について, f の導関数 f' 及び関数 g が連続であるとき,

$$\int g(x) dx = G(x) \quad \text{とすると} \quad \int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx ;$$

ここで不定積分 $\int g(x) dx = G(x)$ の計算では積分定数を略してよい.

定理 (不定積分の部分積分法) 関数 f, g, G について, f の導関数 f' 及び関数 g が連続であるとき,

$$\int g(x) dx = G(x) \text{ とすると } \int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx ;$$

ここで不定積分 $\int g(x) dx = G(x)$ の計算では積分定数を略してよい.

この公式の成り立ちを覚えること: 関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続であるとき, $g(x)$ の不定積分 $\int g(x) dx = G(x)$ に対して,

そのまま 微分する

$$\int \boxed{f(x)} \boxed{g(x)} dx = \boxed{f(x)} \boxed{G(x)} - \int \boxed{f'(x)} \boxed{G(x)} dx .$$

積分する そのまま

例 不定積分 $\int x \cos x dx$ を計算する. 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2 \sin x dx$ を計算する.

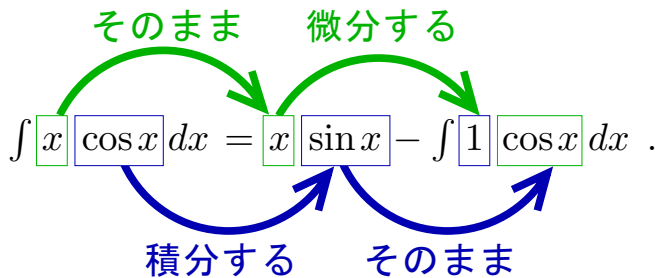
例 不定積分 $\int x \cos x dx$ を計算する. 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2 \sin x dx$ を計算する.

積分定数を略すと $\int \cos x dx = \sin x$. $\frac{d}{dx}x = 1$.

例 不定積分 $\int x \cos x dx$ を計算する. 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2 \sin x dx$ を計算する.

積分定数を略すと $\int \cos x dx = \sin x$. $\frac{d}{dx}x = 1$. 部分積分法の公式に当てはめると, 積分定数を C_1 として

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int 1 \sin x dx$$



例 不定積分 $\int x \cos x dx$ を計算する. 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2 \sin x dx$ を計算する.

積分定数を略すと $\int \cos x dx = \sin x$. $\frac{d}{dx}x = 1$. 部分積分法の公式に当てはめると, 積分定数を C_1 として

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= x \sin x - \int 1 \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C_1 .\end{aligned}$$

積分定数を C_1 として

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C_1 .$$

この結果を用いて $\int x^2 \sin x dx$ を計算する.

積分定数を C_1 として

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C_1 .$$

この結果を用いて $\int x^2 \sin x dx$ を計算する．積分定数を略すと

$$\int \sin x dx = -\cos x . \quad \frac{d}{dx} x^2 = 2x .$$

積分定数を C_1 として

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C_1 .$$

この結果を用いて $\int x^2 \sin x dx$ を計算する．積分定数を略すと $\int \sin x dx = -\cos x$. $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$. 部分積分法の公式に当てはめると，積分定数を C_2 として

$$\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) dx$$

そのまま 微分する

$$\int x^2 \sin x dx = x^2 (-\cos x) - \int 2x (-\cos x) dx .$$

積分する そのまま

積分定数を C_1 として

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C_1 .$$

この結果を用いて $\int x^2 \sin x dx$ を計算する．積分定数を略すと

$\int \sin x dx = -\cos x$. $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$. 部分積分法の公式に当てはめると，積分定数を C_2 として

$$\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$$

積分定数を C_1 として

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C_1 .$$

この結果を用いて $\int x^2 \sin x dx$ を計算する．積分定数を略すと

$\int \sin x dx = -\cos x$. $\frac{d}{dx} x^2 = 2x$. 部分積分法の公式に当てはめると，積分定数を C_2 として

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C_2 \\ &= 2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + C_2 . \end{aligned}$$

終

問7.3.1 不定積分 $\int x \sin x dx$ を計算せよ. 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2 \cos x dx$ を計算せよ.

積分定数を C_1 とおく.

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \\ &= \\ &= + C_1 .\end{aligned}$$

積分定数を C_2 とおく.

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= \\ &= + C_2 \\ &= + C_2 .\end{aligned}$$

問7.3.1 不定積分 $\int x \sin x dx$ を計算せよ. 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2 \cos x dx$ を計算せよ.

積分定数を C_1 とおく.

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int(-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C_1 \\ &= \sin x - x \cos x + C_1 .\end{aligned}$$

積分定数を C_2 とおく.

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= \\ &= \\ &= \quad + C_2 \\ &= \quad + C_2 .\end{aligned}$$

問7.3.1 不定積分 $\int x \sin x dx$ を計算せよ. 更にその結果を用いて不定積分

$\int x^2 \cos x dx$ を計算せよ.

積分定数を C_1 とおく.

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= x(-\cos x) - \int(-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C_1 \\ &= \sin x - x \cos x + C_1 .\end{aligned}$$

積分定数を C_2 とおく.

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x dx &= x^2 \sin x + \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x + 2 \int x \sin x dx \\ &= x^2 \sin x - 2(\sin x - x \cos x) + C_2 \\ &= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C_2 .\end{aligned}$$

終

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとする. 不定積分 $\int f(x) dx$ を計算するために, $f(x) = f(x) \cdot 1$ と考えて部分積分法の公式を適用する: 積分定数を略すと $\int 1 dx = x$ なので,

$$\int f(x) dx = \int f(x) 1 dx = f(x)x - \int f'(x)x dx$$

The diagram shows the integration by parts formula with annotations. The equation is $\int f(x) 1 dx = f(x)x - \int f'(x)x dx$. The terms $f(x)$ and 1 in the first integral are boxed in green, and $f(x)$ and x in the second integral are boxed in blue. Green arrows labeled "そのまま" (as is) point from the boxed $f(x)$ in the first integral to the boxed $f(x)$ in the second integral, and from the boxed 1 in the first integral to the boxed x in the second integral. A green arrow labeled "微分する" (differentiate) points from the boxed $f(x)$ in the second integral to the boxed $f'(x)$ in the third integral. Blue arrows labeled "積分する" (integrate) point from the boxed $f(x)$ in the second integral to the boxed x in the third integral, and from the boxed x in the second integral to the boxed x in the third integral. A blue arrow labeled "そのまま" (as is) points from the boxed x in the second integral to the boxed x in the third integral.

$$\int \boxed{f(x)} \boxed{1} dx = \boxed{f(x)} \boxed{x} - \int \boxed{f'(x)} \boxed{x} dx .$$

そのまま 微分する

積分する そのまま

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとする. 不定積分 $\int f(x) dx$ を計算するために, $f(x) = f(x) \cdot 1$ と考えて部分積分法の公式を適用する: 積分定数を略すと $\int 1 dx = x$ なので,

$$\int f(x) dx = \int f(x) 1 dx = f(x)x - \int f'(x)x dx = x f(x) - \int x f'(x) dx .$$

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとする. 不定積分 $\int f(x) dx$ を計算するために, $f(x) = f(x) \cdot 1$ と考えて部分積分法の公式を適用する: 積分定数を略すと $\int 1 dx = x$ なので,

$$\int f(x) dx = \int f(x) 1 dx = f(x)x - \int f'(x)x dx = x f(x) - \int x f'(x) dx .$$

この部分積分法を用いると対数関数 $\ln x$ の積分公式が導かれる:

$\int 1 dx = x$, $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ なので, 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int (\ln x) 1 dx = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + C . \end{aligned}$$

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとする. 不定積分 $\int f(x) dx$ を計算するために, $f(x) = f(x) \cdot 1$ と考えて部分積分法の公式を適用する: 積分定数を略すと $\int 1 dx = x$ なので,

$$\int f(x) dx = \int f(x) 1 dx = f(x)x - \int f'(x)x dx = x f(x) - \int x f'(x) dx .$$

この部分積分法を用いると対数関数 $\ln x$ の積分公式が導かれる:
 $\int 1 dx = x$, $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ なので, 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int (\ln x) 1 dx = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + C . \end{aligned}$$

定理 (積分公式)

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

例 不定積分 $\int \ln(3y + 2) dy$ を計算する.

例 不定積分 $\int \ln(3y+2) dy$ を計算する.

$$z = 3y + 2 \quad \text{とおく.} \quad \frac{dz}{dy} = 3 \quad \text{より} \quad dy = \frac{1}{3} dz .$$

例 不定積分 $\int \ln(3y+2) dy$ を計算する.

$z = 3y + 2$ とおく. $\frac{dz}{dy} = 3$ より $dy = \frac{1}{3} dz$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\int \ln(3y+2) dy = \int (\ln z) \frac{1}{3} dz = \frac{1}{3}(z \ln z - z) + C_0$$

例 不定積分 $\int \ln(3y+2) dy$ を計算する.

$z = 3y + 2$ とおく. $\frac{dz}{dy} = 3$ より $dy = \frac{1}{3} dz$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\begin{aligned}\int \ln(3y+2) dy &= \int (\ln z) \frac{1}{3} dz = \frac{1}{3}(z \ln z - z) + C_0 \\ &= \frac{1}{3}\{(3y+2) \ln(3y+2) - 3y - 2\} + C_0 \\ &= \left(y + \frac{2}{3}\right) \ln(3y+2) - y - \frac{2}{3} + C_0 .\end{aligned}$$

例 不定積分 $\int \ln(3y+2) dy$ を計算する.

$z = 3y + 2$ とおく. $\frac{dz}{dy} = 3$ より $dy = \frac{1}{3} dz$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\begin{aligned}\int \ln(3y+2) dy &= \int (\ln z) \frac{1}{3} dz = \frac{1}{3}(z \ln z - z) + C_0 \\ &= \frac{1}{3}\{(3y+2) \ln(3y+2) - 3y - 2\} + C_0 \\ &= \left(y + \frac{2}{3}\right) \ln(3y+2) - y - \frac{2}{3} + C_0.\end{aligned}$$

C_0 は定数なので $-\frac{2}{3} + C_0$ も定数である; これを 1 個の積分定数 C とする.

$$\int \ln(3y+2) dy = \left(y + \frac{2}{3}\right) \ln(3y+2) - y + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

終

問7.3.2 不定積分 $\int \ln(4u+7) du$ を計算せよ.

$v =$ とおく. $\frac{dv}{du} =$ より $du =$ dv . 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \ln(4u+5) du = \int \quad \quad \quad dv = \quad \quad \quad + C_0$$

$$= \quad \quad \quad + C_0$$

$$= \quad \quad \quad + C .$$

問7.3.2 不定積分 $\int \ln(4u+7) du$ を計算せよ.

$v = 4u + 7$ とおく. $\frac{dv}{du} = 4$ より $du = \frac{1}{4} dv$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\begin{aligned}\int \ln(4u+7) du &= \int (\ln v) \frac{1}{4} dv = \frac{1}{4}(v \ln v - v) + C_0 \\ &= \frac{1}{4}\{(4u+7) \ln(4u+7) - (4u+7)\} + C_0 \\ &= \left(u + \frac{7}{4}\right) \ln(4u+7) - u + C .\end{aligned}$$

終

例 不定積分 $\int y \ln y dy$ を計算する.

例 不定積分 $\int y \ln y dy$ を計算する.

積分定数を略すと $\int y dy = \frac{1}{2}y^2$. $\frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{y}$.

例 不定積分 $\int y \ln y dy$ を計算する.

積分定数を略すと $\int y dy = \frac{1}{2}y^2$. $\frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{y}$. 積分定数を C とおく.

$$\int y \ln y dy = \frac{1}{2}y^2 \ln y - \int \frac{1}{2}y^2 \frac{1}{y} dy$$

そのまま 微分する

$$\int \boxed{y} \boxed{\ln y} dy = \boxed{\frac{1}{2}y^2} \boxed{\ln y} - \int \boxed{\frac{1}{2}y^2} \boxed{\frac{1}{y}} dy .$$

積分する そのまま

例 不定積分 $\int y \ln y dy$ を計算する.

積分定数を略すと $\int y dy = \frac{1}{2}y^2$. $\frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{y}$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int y \ln y dy &= \frac{1}{2}y^2 \ln y - \int \frac{1}{2}y^2 \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{y^2}{2} \ln y - \frac{1}{2} \int y dy = \frac{y^2}{2} \ln y - \frac{1}{2} \frac{1}{2}y^2 + C \\ &= y^2 \left(\frac{\ln y}{2} - \frac{1}{4} \right) + C .\end{aligned}$$

終

問7.3.3 不定積分 $\int x^3 \ln x dx$ を計算しなさい.

積分定数を C とおく.

$$\int x^3 \ln x dx =$$

問7.3.3 不定積分 $\int x^3 \ln x dx$ を計算しなさい.

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int x^3 \ln x dx &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \frac{1}{x} dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx \\ &= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}x^4 + C \\ &= x^4 \left(\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16} \right) + C .\end{aligned}$$

終

例 不定積分 $\int x \sin 3x dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int x \sin 3x dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \frac{1}{3} dy$.

例 不定積分 $\int x \sin 3x dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \frac{1}{3} dy$. 積分定数を略すと,

$$\int \sin 3x dx = \int \sin y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}(-\cos y) = -\frac{1}{3} \cos 3x ,$$

$$\int \cos 3x dx = \int \cos y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \sin y = \frac{1}{3} \sin 3x .$$

例 不定積分 $\int x \sin 3x dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \frac{1}{3} dy$. 積分定数を略すと,

$$\int \sin 3x dx = \int \sin y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}(-\cos y) = -\frac{1}{3} \cos 3x ,$$

$$\int \cos 3x dx = \int \cos y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \sin y = \frac{1}{3} \sin 3x .$$

積分定数を C とおく. $\frac{d}{dx}x = 1$ なので, 部分積分法により,

$$\int x \sin 3x dx = x \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) dx$$

例 不定積分 $\int x \sin 3x dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \frac{1}{3} dy$. 積分定数を略すと,

$$\int \sin 3x dx = \int \sin y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}(-\cos y) = -\frac{1}{3} \cos 3x ,$$

$$\int \cos 3x dx = \int \cos y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \sin y = \frac{1}{3} \sin 3x .$$

積分定数を C とおく. $\frac{d}{dx}x = 1$ なので, 部分積分法により,

$$\begin{aligned} \int x \sin 3x dx &= x \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) dx \\ &= -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x + C \\ &= \frac{1}{9} \sin 3x - \frac{x}{3} \cos 3x + C . \end{aligned}$$

終

問 7.3.4 不定積分 $\int x \cos 5x dx$ を計算せよ.

積分定数を略すと,

$$\int \cos 5x dx = \quad , \quad \int \sin 5x dx = \quad .$$

積分定数を C とおく.

$$\int x \cos 5x dx =$$

問7.3.4 不定積分 $\int x \cos 5x dx$ を計算せよ.

積分定数を略すと,

$$\int \cos 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x, \quad \int \sin 5x dx = -\frac{1}{5} \cos 5x.$$

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int x \cos 5x dx &= x \cdot \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{5} \int \sin 5x dx = \frac{x}{5} \sin 5x - \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{1}{5} \cos 5x \right) + C \\ &= \frac{x}{5} \sin 5x + \frac{1}{25} \cos 5x + C. \end{aligned}$$

終

問7.3.5 不定積分 $\int x e^{\frac{x}{3}} dx$ を計算せよ.

積分定数を省略すると $\int e^{\frac{x}{3}} dx =$. 積分定数を C とおく.

$$\int x e^{\frac{x}{3}} dx =$$

問7.3.5 不定積分 $\int x e^{\frac{x}{3}} dx$ を計算せよ.

積分定数を省略すると $\int e^{\frac{x}{3}} dx = 3e^{\frac{x}{3}}$. 積分定数を C とおく.

$$\int x e^{\frac{x}{3}} dx = 3x e^{\frac{x}{3}} - 3 \int e^{\frac{x}{3}} dx = 3x e^{\frac{x}{3}} - 9e^{\frac{x}{3}} + C = 3e^{\frac{x}{3}}(x - 3) + C .$$

終

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

例 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ を計算する.

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

例 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ を計算する.

まず部分積分法によって不定積分 $\int x \cos x dx$ を計算する. 積分定数を C とおく.

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

例 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ を計算する.

まず部分積分法によって不定積分 $\int x \cos x dx$ を計算する. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C .\end{aligned}$$

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

例 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ を計算する.

まず部分積分法によって不定積分 $\int x \cos x dx$ を計算する. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C .\end{aligned}$$

よって, 微分積分の基本定理より,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= [x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi - (0 \sin 0 + \cos 0) \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 .\end{aligned}$$

終

問7.3.6 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t \sin t dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int t \sin t dt =$$

よって

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t \sin t dt = \left[\quad \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

問7.3.6 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t \sin t dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int t \sin t dt = -t \cos t + \int \cos t dt = \sin t - t \cos t + C .$$

よって

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t \sin t dt &= [\sin t - t \cos t]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \sin \pi - \pi \cos \pi - \left(\sin \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} . \end{aligned}$$

終