7.5 有理関数の積分法

変数 x 及び定数 a, b, c, h, k ($a \neq 0$) に対して，分母が 2 次式である真分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分を考える．この不定積分の計算法は，x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac の値の符号によって異なる．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac>0$ のときを考える．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac>0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 2 個の 1 次式の積に因数分解できる：

$ax^2+bx+c = A(x)\,B(x)$ （ $A(x)$ と $B(x)$ とは x の 1 次式で互いに素）．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac>0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 2 個の 1 次式の積に因数分解できる：

$ax^2+bx+c = A(x)\,B(x)$ （ $A(x)$ と $B(x)$ とは x の 1 次式で互いに素）．

ある定数 p と q とをとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \ .$$

このような分数式の変形を部分分数分解という.

$A(x) \neq 0$ ， $B(x) \neq 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
& \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\
\iff\ & \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)} A(x)\,B(x) + \frac{q}{B(x)} A(x)\,B(x) \\
\iff\ & hx+k = p\,B(x) + q\,A(x) \quad .
\end{aligned}
$$

$A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} & \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)}A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)\,B(x) + \frac{q}{B(x)}A(x)\,B(x) \\ \Longleftrightarrow\ & hx+k = p\,B(x) + q\,A(x) \ . \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned} & \text{等式}\ \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)}\ \text{が恒等式である} \\ \Longleftrightarrow\ & \text{等式}\ hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)\ \text{が恒等式である} \ . \end{aligned}$$

$A(x) \neq 0$ ， $B(x) \neq 0$ のとき，

$$\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)}$$

$$\iff \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)}A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)\,B(x) + \frac{q}{B(x)}A(x)\,B(x)$$

$$\iff hx+k = p\,B(x) + q\,A(x) \quad .$$

従って，

$$\text{等式} \ \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \ \text{が恒等式である}$$

$$\iff \text{等式} \ hx+k = p\,B(x) + q\,A(x) \ \text{が恒等式である} \quad .$$

そこで，等式 $hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)$ が恒等式になるように p の値と q の値とを定める．

$A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
& \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\
\iff\ & \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)} A(x)\,B(x) + \frac{q}{B(x)} A(x)\,B(x) \\
\iff\ & hx+k = p\,B(x) + q\,A(x) \ .
\end{aligned}
$$

従って,

$$
\begin{aligned}
& \text{等式}\ \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)}\ \text{が恒等式である} \\
\iff\ & \text{等式}\ hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)\ \text{が恒等式である} \quad .
\end{aligned}
$$

そこで,等式 $hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)$ が恒等式になるように p の値と q の値とを定める.そのためには恒等式に関する次の性質を用いる: x の高々1 次の整式 $ax+b$ と $px+q$ と(a, b, p, q は x と無関係な定数)について,

等式 $ax+b = px+q$ が x に関する恒等式である $\iff$ $a = p$ かつ $b = q$.

例 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

例 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると，

例 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

例 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3)+b(x+2) \ ,$$

$\boxed{例}$ 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\dfrac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は, 　　　　　　　　かつ 　　　　　　　　.

$\boxed{例}$ 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\dfrac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{a}{x+2} + \dfrac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は, $a+b=9$ かつ $-3a+2b=-7$.

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は, $a+b=9$ かつ $-3a+2b=-7$.

この方程式を解くと $a=5$ かつ $b=4$.

例 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は, $a+b=9$ かつ $-3a+2b=-7$.

この方程式を解くと $a=5$ かつ $b=4$. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

よって，

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3} \ .$$

よって,

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int\left(\frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3}\right)dx = 5\int\frac{1}{x+2}\,dx+4\int\frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y=x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$.

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

よって,

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5 \int \frac{1}{x+2}\,dx + 4 \int \frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$. 変数 z を $z = x-3$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$.

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3} \ .$$

よって,

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int\left(\frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3}\right)dx = 5\int\frac{1}{x+2}\,dx+4\int\frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y=x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 変数 z を $z=x-3$ とおく. $\dfrac{dz}{dx}=1$ なので $dx=dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}5\int\frac{1}{x+2}\,dx+4\int\frac{1}{x-3}\,dx &= 5\int\frac{1}{y}\,dy+4\int\frac{1}{z}\,dz = 5\ln|y|+4\ln|z|+C \\ &= 5\ln|x+2|+4\ln|x-3|+C \ ,\end{aligned}$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

よって,

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$. 変数 z を $z = x-3$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx &= 5\int \frac{1}{y}\,dy + 4\int \frac{1}{z}\,dz = 5\ln|y| + 4\ln|z| + C \\ &= 5\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + C \ , \end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = 5\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + C \ .$$

終

$\boxed{問 7.5.1}$ 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定めよ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx$ を計算せよ.

等式 $\dfrac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-4}$ の両辺に　　　　　　　を掛けると

$$3x-22 = a(\qquad) + b(\qquad) \ ,$$

$$3x-22 = (\qquad)x - \qquad\qquad ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は　　　$=$　　かつ　　　　$=$　　；
この方程式を解くと $a =$　　かつ $b =$　　. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{\qquad}{x+1} - \frac{\qquad}{x-4} \ .$$

$\boxed{\text{問}7.5.1}$ 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定めよ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx$ を計算せよ.

等式 $\dfrac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-4}$ の両辺に $(x+1)(x-4)$ を掛けると

$$3x-22 = a(x-4) + b(x+1) \ ,$$

$$3x-22 = (a+b)x - 4a + b \ ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は $a+b=3$ かつ $-4a+b=-22$ ；この方程式を解くと $a=5$ かつ $b=-2$. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-4} \ .$$

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-4} \ .$$

よって

$$\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-4} \right) dx = \int \frac{5}{x+1}\,dx - \int \frac{2}{x-4}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$. 変数 z を $z = x-4$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{x+1}\,dx - \int \frac{2}{x-4}\,dx &= 5\int \frac{1}{y}\,dy - 2\int \frac{1}{z}\,dx = 5\ln|y| - 2\ln|z| + C \\ &= 5\ln|x+1| - 2\ln|x-4| + C \ ,\end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx = 5\ln|x+1| - 2\ln|x-4| + C \ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 $a\,,b$ をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a,b をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4)=\frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので, ある定数 a, b をとると, x に関する次の恒等式が成り立つ:

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると,

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4)=\frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

$$7x+10=a(x+4)+b(2x-1)\ ,$$

$$7x+10=(a+2b)x+4a-b\ .$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 $a\,,b$ をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4)=\frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

$$7x+10=a(x+4)+b(2x-1)\ ,$$

$$7x+10=(a+2b)x+4a-b\ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，　　　　　　　　かつ　　　　　　　　.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a, b をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

$$7x+10=a(x+4)+b(2x-1)\ ,$$

$$7x+10=(a+2b)x+4a-b\ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$a+2b=7$ かつ $4a-b=10$.

例 不定積分 $\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a, b をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4} \ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4)=\frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4) \ ,$$

$$7x+10=a(x+4)+b(2x-1) \ ,$$

$$7x+10=(a+2b)x+4a-b \ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$a+2b=7$ かつ $4a-b=10$.

この方程式を解くと $a=3$ かつ $b=2$.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a, b をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4} \ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4)=\frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4) \ ,$$

$$7x+10=a(x+4)+b(2x-1) \ ,$$

$$7x+10=(a+2b)x+4a-b \ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$a+2b=7$ かつ $4a-b=10$.
この方程式を解くと $a=3$ かつ $b=2$. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{3}{2x-1}+\frac{2}{x+4} \ .$$

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \; .$$

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \quad .$$

よって，

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \right) dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \quad .$$

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \ .$$

よって,

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \right) dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \ .$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$.

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \ .$$

よって，

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \right) dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \ .$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$ ． 変数 z を $z = x+4$ とおく． $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$ ．

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \ .$$

よって,

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4}\right)dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \ .$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. 変数 z を $z = x+4$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}
\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx &= \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx = \int \frac{3}{y}\,\frac{1}{2}\,dy + \int \frac{2}{z}\,dz \\
&= \frac{3}{2}\ln|y| + 2\ln|z| + C \\
&= \frac{3}{2}\ln|2x-1| + 2\ln|x+4| + C \ .
\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問} 7.5.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ．

$2x^2+x-6=(x\qquad)(2x\qquad)$ なので，ある定数 $a\,,b$ をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{x-12}{(x\qquad)(2x\qquad)}=\frac{a}{x\qquad}+\frac{b}{2x\qquad}\ ,$$

$$x-12=a(2x\qquad)+b(x\qquad)\ ,$$

$$x-12=(\qquad\qquad)x\qquad\qquad\qquad\ ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$\qquad=\qquad$ かつ $\qquad=\qquad$．この方程式を解くと $a=\qquad$ かつ $b=\qquad$．次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{\qquad}{x\qquad}\qquad\frac{\qquad}{2x\qquad}\ .$$

$\boxed{問 7.5.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ.

$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので，ある定数 $a\,,b$ をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{x-12}{(x+2)(2x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{2x-3}\ ,$$

$$x-12=a(2x-3)+b(x+2)\ ,$$

$$x-12=(2a+b)x-3a+2b\ ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$2a+b=1$ かつ $-3a+2b=-12$ ．この方程式を解くと $a=2$ かつ $b=-3$ ．次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{2}{x+2}-\frac{3}{2x-3}\ .$$

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2x-3} \ .$$

よって

$$\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{2x-3} \right) dx = \int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{2x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$. 変数 z を $z = 2x-3$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{2x-3}\,dx &= 2\int \frac{1}{y}\,dy - 3\int \frac{1}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = 2\ln|y| - \frac{3}{2}\ln|z| + C \\ &= 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|2x-3| + C \ .\end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx = 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|2x-3| + C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l\,A(x)^2 \quad （l \text{ は定数で } A(x) \text{ は } x \text{ の } 1 \text{ 次式}）.$$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l\,A(x)^2 \quad （l \text{ は定数で } A(x) \text{ は } x \text{ の } 1 \text{ 次式}）.$$

高々1 次の式 $hx+k$ を 1 次式 $A(x)$ で割るとき整商 q と剰余 r とは定数である：

$$hx+k = q\,A(x)+r \ .$$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l\,A(x)^2 \quad （ l \text{ は定数で } A(x) \text{ は } x \text{ の 1 次式}）.$$

高々1 次の式 $hx+k$ を 1 次式 $A(x)$ で割るとき整商 q と剰余 r とは定数である：

$$hx+k = q\,A(x)+r \ .$$

これより，

$$\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} = \frac{q\,A(x)+r}{l\,A(x)^2} = \frac{q\,A(x)}{l\,A(x)^2}+\frac{r}{l\,A(x)^2} = \frac{q}{l\,A(x)}+\frac{r}{l\,A(x)^2} \ .$$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l\,A(x)^2 \quad （l \text{ は定数で } A(x) \text{ は } x \text{ の 1 次式}）.$$

高々1 次の式 $hx+k$ を 1 次式 $A(x)$ で割るとき整商 q と剰余 r とは定数である：

$$hx+k = q\,A(x)+r \ .$$

これより，

$$\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} = \frac{q\,A(x)+r}{l\,A(x)^2} = \frac{q\,A(x)}{l\,A(x)^2}+\frac{r}{l\,A(x)^2} = \frac{q}{l\,A(x)}+\frac{r}{l\,A(x)^2} \ .$$

このような分数式の変形も部分分数分解という．このような関数を積分するには変数 y を $y=A(x)$ とおいて置換積分する．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$.

整式 $6x-5$ を $2x+1$ で割るとき整商は 3 で剰余は -8 なので,

$6x-1=3(2x+1)-8$.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$.

整式 $6x-5$ を $2x+1$ で割るとき整商は 3 で剰余は -8 なので,

$6x-1=3(2x+1)-8$. 変数 y を $y=2x+1$ とおく.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$.

整式 $6x-5$ を $2x+1$ で割るとき整商は 3 で剰余は -8 なので,

$6x-1=3(2x+1)-8$. 変数 y を $y=2x+1$ とおく.

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}=\frac{3(2x+1)-8}{(2x+1)^2}=\frac{3y-8}{y^2}=\frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2}=\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$.
整式 $6x-5$ を $2x+1$ で割るとき整商は 3 で剰余は -8 なので,
$6x-1=3(2x+1)-8$. 変数 y を $y=2x+1$ とおく.

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}=\frac{3(2x+1)-8}{(2x+1)^2}=\frac{3y-8}{y^2}=\frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2}=\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$.
整式 $6x-5$ を $2x+1$ で割るとき整商は 3 で剰余は -8 なので,
$6x-1=3(2x+1)-8$. 変数 y を $y=2x+1$ とおく.

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}=\frac{3(2x+1)-8}{(2x+1)^2}=\frac{3y-8}{y^2}=\frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2}=\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx &= \int\left(\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\right)\frac{1}{2}\,dy = 3\int\frac{1}{y}\,dy-4\int y^{-2}dy \\ &= \frac{3}{2}\ln|y|-4(-y^{-1})+C \\ &= \frac{3}{2}\ln|2x+1|+\frac{4}{2x+1}+C\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問 7.5.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ.

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1 = (\qquad\qquad)^2$.
整式 $6x+7$ を $\qquad\qquad\qquad$ で割るとき整商は $\qquad$ で剰余は $\qquad$ なので,
$6x+7 = \ (\qquad\qquad)\qquad$. 変数 y を $y = \qquad\qquad\qquad$ とおく.

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1} = \frac{(\qquad\qquad)}{(\qquad\qquad)^2} = \frac{\qquad\qquad}{y^2} = \frac{\quad}{y} \qquad \frac{\quad}{y^2} .$$

$\dfrac{dy}{dx} = \qquad$ なので $dx = \quad dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6x+7}{4x^2+4x+1}\,dx =$$

問7.5.3 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ.

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$.
整式 $6x+7$ を $3x-1$ で割るとき整商は 2 で剰余は 9 なので,
$6x+7=2(3x-1)+9$. 変数 y を $y=3x-1$ とおく.

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1}=\frac{2(3x-1)+9}{(3x-1)^2}=\frac{2y+9}{y^2}=\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=$ なので $dx=\quad dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6x+7}{4x^2+4x+1}\,dx=$$

$\boxed{問 7.5.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ.

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$.
整式 $6x+7$ を $3x-1$ で割るとき整商は 2 で剰余は 9 なので,
$6x+7=2(3x-1)+9$. 変数 y を $y=3x-1$ とおく.

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1} = \frac{2(3x-1)+9}{(3x-1)^2} = \frac{2y+9}{y^2} = \frac{2}{y}+\frac{9}{y^2} \ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}dx$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+7}{4x^2+4x+1}\,dx &= \int\left(\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\right)\frac{1}{3}\,dy = \frac{2}{3}\int\frac{1}{y}\,dy + 3\textstyle\int y^{-2}dy \\ &= \frac{2}{3}\ln|y| - 3y^{-1}+C \\ &= \frac{2}{3}\ln|3x-1| - \frac{3}{3x-1}+C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac<0$ のときを考える．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac<0$ のときを考える．このときは分母の 2 次式 ax^2+bx+c を平方完成する：

$$ax^2+bx+c = a(x+p)^2+q \quad （p, q \text{ は定数}）.$$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac<0$ のときを考える．このときは分母の 2 次式 ax^2+bx+c を平方完成する：

$$ax^2+bx+c = a(x+p)^2+q \quad （p, q \text{ は定数}）.$$

そして変数 y を $y=x+p$ とおいて置換積分をする．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

被積分関数の式の分母 $x^2-2x+10$ を平方完成する:

$$x^2-2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9\ .$$

例 不定積分 $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

被積分関数の式の分母 $x^2-2x+10$ を平方完成する：

$$x^2-2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

被積分関数の式の分母 $x^2-2x+10$ を平方完成する：

$$x^2-2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおく. $x=y-1$ なので,

$$\frac{3x+5}{x^2-2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9} + \frac{2}{y^2+9} \ .$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

被積分関数の式の分母 $x^2-2x+10$ を平方完成する：

$$x^2-2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおく. $x=y-1$ なので,

$$\frac{3x+5}{x^2-2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9} \ .$$

$y=x+1$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

被積分関数の式の分母 $x^2-2x+10$ を平方完成する：

$$x^2-2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9\ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおく. $x=y-1$ なので,

$$\frac{3x+5}{x^2-2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9}\ .$$

$y=x+1$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. よって

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx &= \int \left(\frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9}\right)dy \\ &= \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy\ .\end{aligned}$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \quad .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z = y^2+9$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{2}\,dz \quad .$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{2}\,dz \ .$$

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|\,y^2+9\,| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{2}\,dz \ .$$

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|\,y^2+9\,| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{2}{y^2+9}\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 \ .$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z = y^2+9$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{2}\,dz \ .$$

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{2}{y^2+9}\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 \ .$$

積分定数を C とおく. $y = x+1$ なので,

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z = y^2+9$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$y\,dy = \dfrac{1}{2}\,dz$.

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{2}{y^2+9}\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 \ .$$

積分定数を C とおく. $y = x+1$ なので,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx &= \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C \\ &= \frac{3}{2}\ln\{(x+1)^2+9\} + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x+1}{3} + C \\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x+1}{3} + C \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問 7.5.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ.

$x^2-6x+13=(\qquad)^2+\quad$. 変数 y を $y=\qquad\qquad$ とおく. $x=y+\quad$.

$\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$$

$\boxed{\text{問}7.5.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ.

$x^2-6x+13=(x-3)^2+4$. 変数 y を $y=x-3$ とおく. $x=y+3$.
$\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx &= \int \frac{4(x-3)+5}{(x-3)^2+4}\,dx = \int \frac{4y+5}{y^2+4}\,dy \\ &= \int \frac{4y}{y^2+4}\,dy + \int \frac{5}{y^2+4}\,dy\end{aligned}$$

$\boxed{問7.5.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ.

$x^2-6x+13=(x-3)^2+4$. 変数 y を $y=x-3$ とおく. $x=y+3$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx &= \int \frac{4(x-3)+5}{(x-3)^2+4}\,dx = \int \frac{4y+5}{y^2+4}\,dy \\
&= \int \frac{4y}{y^2+4}\,dy + \int \frac{5}{y^2+4}\,dy \\
&= 2\ln(y^2+4) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{y}{2} + C \\
&= 2\ln\{(x-3)^2+4\} + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2} + C \\
&= 2\ln(x^2-6x+13) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2} + C \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する:

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

変数 y を $y=x-2$ とおく. $x=y+2$ なので,

$$\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} = \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1}$$
$$= \frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する:

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

変数 y を $y=x-2$ とおく. $x=y+2$ なので,

$$\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} = \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1}$$
$$= \frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1} \ .$$

$y=x-2$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

変数 y を $y=x-2$ とおく. $x=y+2$ なので,

$$\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} = \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1}$$
$$= \frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1} \ .$$

$y=x-2$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. よって

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \left(\frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1}\right)dy$$
$$= \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z = 2y^2+1$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = 4y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{4}\,dz \ .$$

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z = 2y^2+1$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = 4y$ なので

$y\,dy = \dfrac{1}{4}\,dz$.

$$\begin{aligned}\int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy &= \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{4}\,dz = \frac{3}{4}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{4}\ln|\,2y^2+1\,| + C_1 \\ &= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) + C_1 \ .\end{aligned}$$

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

積分定数を $C_1\,, C_2$ とおく. 変数 z を $z = 2y^2+1$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = 4y$ なので
$y\,dy = \dfrac{1}{4}\,dz$.

$$\int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{4}\,dz = \frac{3}{4}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{4}\ln|\,2y^2+1\,| + C_1$$

$$= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{5}{2y^2+1}\,dy = \frac{5}{2}\int \frac{1}{y^2+\frac{1}{2}}\,dy = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + C_2$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\!\left(\sqrt{2}\,y\right) + C_2 \ .$$

積分定数を C とおく． $y = x - 2$ なので，

$$\int \frac{3x - 11}{2x^2 - 8x + 9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2 + 1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2 + 1}\,dy$$

$$= \frac{3}{4}\ln(2y^2 + 1) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\,y\right) + C$$

積分定数を C とおく．$y=x-2$ なので，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx &= \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \\
&= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\bigl(\sqrt{2}\,y\bigr) + C \\
&= \frac{3}{4}\ln\{2(x-2)^2+1\} - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\bigl\{\sqrt{2}\,(x-2)\bigr\} + C \\
&= \frac{3}{4}\ln(2x^2-8x+9) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\bigl\{\sqrt{2}\,(x-2)\bigr\} + C \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.5.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=$. 変数 y を $y=$ とおく. $x=$.

$\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$$

$\boxed{\text{問}7.5.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx &= \int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dy = \int \frac{5y-3}{4y^2+3}\,dy \\ &= \int \frac{5y}{4y^2+3}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問}7.5.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx &= \int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dy = \int \frac{5y-3}{4y^2+3}\,dy \\
&= \int \frac{5y}{4y^2+3}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy \\
&= \frac{5}{8}\ln(4y^2+3) - \frac{3}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{5}{8}\ln\{4(x-1)^2+3\} - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{2(x-1)}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{5}{8}\ln(4x^2-8x+7) - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{2x-2}{\sqrt{3}} + C \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$