7.7　1次式の根号を含む式の積分法

変数 x の無理式 $\sqrt{ax+b}$ （a, b は定数で $a \neq 0$ ）を含む式の積分するために，変数 t を $t = \sqrt{ax+b}$ とおく．

変数 x の無理式 $\sqrt{ax+b}$ （a, b は定数で $a \neq 0$ ）を含む式の積分するために，変数 t を $t = \sqrt{ax+b}$ とおく．$t^2 = \sqrt{ax+b}^2 = ax+b$ なので $x = \dfrac{t^2-b}{a}$ ；

変数 x の無理式 $\sqrt{ax+b}$ （ a, b は定数で $a \neq 0$ ）を含む式の積分するために，変数 t を $t = \sqrt{ax+b}$ とおく． $t^2 = \sqrt{ax+b}^2 = ax+b$ なので $x = \dfrac{t^2-b}{a}$ ；よって $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d}{dt}\dfrac{t^2-b}{a} = \dfrac{2}{a}t$ なので， $dx = \dfrac{2}{a}t\,dt$ ．

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する.

変数 t を $t=\sqrt{4x-9}$ とおく.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する.

変数 t を $t=\sqrt{4x-9}$ とおく. $t^2=4x-9$ なので $x=\dfrac{t^2+9}{4}$.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する.

変数 t を $t=\sqrt{4x-9}$ とおく. $t^2=4x-9$ なので $x=\dfrac{t^2+9}{4}$. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}$ なので $dx=\dfrac{t}{2}\,dt$.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する.

変数 t を $t=\sqrt{4x-9}$ とおく. $t^2=4x-9$ なので $x=\dfrac{t^2+9}{4}$. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}$ なので $dx=\dfrac{t}{2}\,dt$.

$$\frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx = \frac{3}{\dfrac{t^2+9}{4}\,t}\,\frac{t}{2}\,dt = \frac{6}{t^2+9}\,dt \ .$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$ を計算する.

変数 t を $t=\sqrt{4x-9}$ とおく. $t^2=4x-9$ なので $x=\dfrac{t^2+9}{4}$. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t}{2}$ なので $dx=\dfrac{t}{2}\,dt$.

$$\frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx = \frac{3}{\dfrac{t^2+9}{4}\,t}\,\frac{t}{2}\,dt = \frac{6}{t^2+9}\,dt \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx &= \int \frac{6}{t^2+9}\,dt = \frac{6}{3}\tan^{-1}\frac{t}{3}+C \\ &= 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{4x-9}}{3}+C \ .\end{aligned}$$

終

問7.7(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx$ を計算せよ.

変数 t を $t=$ とおく. $t^2=$ なので $x=$. $\dfrac{dx}{dt}=$

なので $dx=$ dt . 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx = \int \qquad dt =$$

問7.7(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx$ を計算せよ.

変数 t を $t=\sqrt{3x+1}$ とおく. $t^2=3x+1$ なので $x=\dfrac{t^2-1}{3}$. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{3}t$ なので $dx=\dfrac{2}{3}t\,dt$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx = \int \qquad\qquad dt =$$

問7.7(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx$ を計算せよ.

変数 t を $t=\sqrt{3x+1}$ とおく. $t^2=3x+1$ なので $x=\dfrac{t^2-1}{3}$. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{3}t$ なので $dx=\dfrac{2}{3}t\,dt$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}}\,dx &= \int \frac{3}{1+2t}\,\frac{2}{3}t\,dt = \int \frac{2t}{1+2t}\,dt = \int\left(1-\frac{1}{2t+1}\right)dt\\ &= t-\frac{1}{2}\ln|2t+1|+C\\ &= \sqrt{3x+1}-\frac{1}{2}\ln\left|2\sqrt{3x+1}+1\right|+C\\ &= \sqrt{3x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+2\sqrt{3x+1}\right)+C\ .\end{aligned}$$

終

問7.7(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy$ を計算せよ.

変数 x を $x=$ とおく. $x^2=$ なので $y=$.

$\dfrac{dy}{dx}=$ なので $dy=\ dx$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy = \int \frac{2\dfrac{x^2-1}{2}}{1+x}\,x\,dx =$$

問7.7(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy$ を計算せよ.

変数 x を $x=\sqrt{2y+1}$ とおく. $x^2=2y+1$ なので $y=\dfrac{x^2-1}{2}$.

$\dfrac{dy}{dx}=x$ なので $dy=x\,dx$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy=\int \frac{2\dfrac{x^2-1}{2}}{1+x}\,x\,dx=$$

問7.7(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy$ を計算せよ.

変数 x を $x=\sqrt{2y+1}$ とおく. $x^2=2y+1$ なので $y=\dfrac{x^2-1}{2}$.

$\dfrac{dy}{dx}=x$ なので $dy=x\,dx$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy = \int \frac{2\dfrac{x^2-1}{2}}{1+x}\,x\,dx = \int \frac{x(x^2-1)}{x+1}\,dt = \int \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}\,dt$$

$$= \int (x^2-x)\,dx = \frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C_0$$

$$= \frac{1}{3}(2y+1)\sqrt{2y+1}-\frac{1}{2}(2y+1)+C_0$$

$$= \frac{2y+1}{3}\sqrt{2y+1}-y-\frac{1}{2}+C_0$$

定数 $-\dfrac{1}{2}+C_0$ を C に置き換える.

$$= \frac{2y+1}{3}\sqrt{2y+1}-y+C\ .$$

終