1次式の根号を含む式の積分法

7.7

ために、変数 t を  $t=\sqrt{ax+b}$  とおく.

変数 x の無理式  $\sqrt{ax+b}$  (a,b は定数で  $a \neq 0$ ) を含む式の積分する

変数 
$$x$$
 の無理式  $\sqrt{ax+b}$  ( $a,b$  は定数で  $a\neq 0$  )を含む式の積分するために、変数  $t$  を  $t=\sqrt{ax+b}$  とおく、  $t^2=\sqrt{ax+b^2}=ax+b$  なので $x=\frac{t^2-b}{a}$  ;

変数 
$$x$$
 の無理式  $\sqrt{ax+b}$  ( $a,b$  は定数で  $a\neq 0$  )を含む式の積分するために、変数  $t$  を  $t=\sqrt{ax+b}$  とおく、  $t^2=\sqrt{ax+b^2}=ax+b$  なので  $x=\frac{t^2-b}{a}$  ;よって  $\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{t^2-b}{a}=\frac{2}{a}t$  なので、  $dx=\frac{2}{a}t\,dt$  .

例 不定積分  $\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx$  を計算する.

例 不定積分 
$$\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx$$
 を計算する.

変数 
$$t$$
 を  $t=\sqrt{4x-9}$  とおく.

例 不定積分 
$$\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx$$
 を計算する. 変数  $t$  を  $t=\sqrt{4x-9}$  とおく.  $t^2=4x-9$  なので  $x=\frac{t^2+9}{4}$  .

例 不定積分  $\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx$  を計算する. 変数 t を  $t=\sqrt{4x-9}$  とおく.  $t^2=4x-9$  なので  $x=\frac{t^2+9}{4}$  .  $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{2}$ 

なので  $dx = \frac{t}{2}dt$  .

例 不定積分  $\int \frac{3}{r\sqrt{4x-9}} dx$  を計算する. 変数 t を  $t=\sqrt{4x-9}$  とおく.  $t^2=4x-9$  なので  $x=\frac{t^2+9}{4}$  .  $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{2}$ なので  $dx = \frac{t}{2}dt$  . 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} \, dx = \int \frac{3}{\frac{t^2+9}{4} \cdot t} \, \frac{t}{2} \, dt = \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2+9} \, dt$$

変数 
$$t$$
 を  $t=\sqrt{4x-9}$  とおく.  $t^2=4x-9$  なので  $x=\frac{t^2+9}{4}$  .  $\frac{dx}{dt}=\frac{t}{2}$  なので  $dx=\frac{t}{2}dt$  . 積分定数を  $C$  とおく. 
$$\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}}\,dx=\int \frac{3}{t^2+9}\,\frac{t}{2}\,dt=\frac{3}{2}\int \frac{1}{t^2+9}\,dt=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{t}{3}+C$$

例 不定積分  $\int \frac{3}{r\sqrt{4x-9}} dx$  を計算する.

$$\int \frac{3}{x\sqrt{4x-9}} dx = \int \frac{3}{\frac{t^2+9}{4} \cdot t} \frac{t}{2} dt = \frac{3}{2} \int \frac{1}{t^2+9} dt = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \tan^{-1} \frac{t}{3} + C$$

$$\int x\sqrt{4x-9}$$
  $\int \frac{t^2+9}{4} \cdot t^2$   $2\int t^2+9$   $2\cdot 3$ 

$$\frac{1}{4} \cdot t$$

$$=2\tan^{-1}\frac{\sqrt{4x-9}}{2}+C$$
.

$$= 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{4x-9}}{3} + C .$$

$$=2 \tan \frac{1}{3}$$

[問7.7(1)] 不定積分  $\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx$  を計算せよ. 変数 t を t= とおく.  $t^2=$  なので x= .  $\frac{dx}{dt}=$ 

なので dx = dt . 積分定数を C とおく.

$$f = 3$$

$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx = \int dt =$$

$$ax = \int at = \int$$

$$-2\sqrt{3x+1}$$

$$2\sqrt{3x+1}$$

問7.7(1) 不定積分 
$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx$$
 を計算せよ. 変数  $t$  を  $t=\sqrt{3x+1}$  とおく.  $t^2=3x+1$  なので  $x=\frac{t^2-1}{3}$  .  $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}t$  なので  $dx=\frac{2}{3}tdt$  . 積分定数を  $C$  とおく. 
$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx = \int dt =$$

 $\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx = \int \frac{3}{1+2t} \frac{2}{3}t dt = \int \frac{2t}{1+2t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{2t+1}\right) dt$ 

[問7.7(1)] 不定積分  $\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx$  を計算せよ.

なので  $dx = \frac{2}{3}tdt$  . 積分定数を C とおく.

$$= t - \frac{1}{2} \ln|2t + 1| + C$$

$$= t - \frac{1}{2} \ln|2t + 1| + C$$

$$= \sqrt{3x + 1} - \frac{1}{2} \ln|2\sqrt{3x + 1} + 1| + C$$

変数 t を  $t=\sqrt{3x+1}$  とおく.  $t^2=3x+1$  なので  $x=\frac{t^2-1}{2}$  .  $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{2}t$ 

[問7.7(1)] 不定積分  $\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx$  を計算せよ. 変数 t を  $t=\sqrt{3x+1}$  とおく.  $t^2=3x+1$  なので  $x=\frac{t^2-1}{2}$  .  $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{2}t$ なので  $dx = \frac{2}{3}tdt$  . 積分定数を C とおく.  $\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx = \int \frac{3}{1+2t} \frac{2}{3}t dt = \int \frac{2t}{1+2t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{2t+1}\right) dt$  $= t - \frac{1}{2} \ln|2t + 1| + C$  $= \sqrt{3x+1} - \frac{1}{2} \ln \left| 2\sqrt{3x+1} + 1 \right| + C$ 

$$=\sqrt{3x+1}-\frac{1}{2}\ln\left(1+2\sqrt{3x+1}\right)+C\ .$$
  $3x+1\geq 0$  である各実数  $x$  について,  $\sqrt{3x+1}\geq 0$  なので  $2\sqrt{3x+1}+1\geq 1>0$  , よって  $\left|2\sqrt{3x+1}+1\right|=2\sqrt{3x+1}+1$  .

問7.7(1) 不定積分 
$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx$$
 を計算せよ. 変数  $t$  を  $t=\sqrt{3x+1}$  とおく.  $t^2=3x+1$  なので  $x=\frac{t^2-1}{3}$  .  $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{3}t$  なので  $dx=\frac{2}{3}tdt$  . 積分定数を  $C$  とおく. 
$$\int \frac{3}{1+2\sqrt{3x+1}} dx = \int \frac{3}{1+2t} \frac{2}{3}t dt = \int \frac{2t}{1+2t} dt = \int \left(1-\frac{1}{2t+1}\right) dt$$
 
$$= t-\frac{1}{2}\ln|2t+1| + C$$
 
$$= \sqrt{3x+1} - \frac{1}{2}\ln|2\sqrt{3x+1} + 1| + C$$

 $= \sqrt{3x+1} - \frac{1}{2}\ln(1+2\sqrt{3x+1}) + C.$ 

問
$$7.7(2)$$
 不定積分  $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} dy$  を計算せよ.

変数 
$$x$$
 を  $x=$  とおく.  $x^2=$  なので  $y=$  .

$$rac{dy}{dx}=$$
 なので  $dy=$   $dx$  . 積分定数を  $C_0,C$  とおく.

$$\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} \, dy = \int ---- \, dx = 0$$

$$\frac{3}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy = \int \frac{1}{1+\sqrt{2y+1}}\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{\sqrt{2y+1}} \, dy = \int \frac{dx}{\sqrt{2y+1}} \, dx = 0$$

$$1+\sqrt{2y+1}$$
  $J$ 

$$1+\sqrt{2y+1}$$
  $J$ 

$$J + \sqrt{2g+1}$$

$$1+\sqrt{2g+1}$$

$$+\sqrt{2y+1}$$
 by  $\int$ 

$$f + \sqrt{2y+1}$$

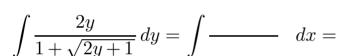
$$+\sqrt{2y+1}$$
  $J$ 

[問7.7(2)] 不定積分  $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} dy$  を計算せよ. 変数 x を  $x=\sqrt{2y+1}$  とおく.  $x^2=2y+1$  なので  $y=\frac{x^2-1}{2}$  .

$$\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx}=x$$
 なので  $dy=xdx$ . 積分定数を  $C_0,C$  とおく.











[ 17.7(2) ] 不定積分  $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}}\,dy$  を計算せよ. 変数 x を  $x=\sqrt{2y+1}$  とおく.  $x^2=2y+1$  なので  $y=\frac{x^2-1}{2}$  .  $\frac{dy}{dx}=x$  なので  $dy=x\,dx$  . 積分定数を  $C_0$  、C とおく.

 $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} \, dy = \int \frac{2^{\frac{x^2-1}{2}}}{1+x} x \, dx = \int \frac{x(x^2-1)}{x+1} \, dx$ 

[問7.7(2)] 不定積分  $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} dy$  を計算せよ. 変数 x を  $x=\sqrt{2y+1}$  とおく.  $x^2=2y+1$  なので  $y=\frac{x^2-1}{2}$  .  $\frac{dy}{dx}=x$  なので  $dy=x\,dx$  . 積分定数を  $C_0,C$  とおく.  $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} \, dy = \int \frac{2^{\frac{x^2-1}{2}}}{1+x} x \, dx = \int \frac{x(x^2-1)}{x+1} \, dx = \int \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1} \, dx$  $= \int (x^2 - x) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_0$ 

$$= \int (x^2 - x) dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_0$$
$$= \frac{1}{3}(2y + 1)\sqrt{2y + 1} - \frac{1}{2}(2y + 1) + C_0$$

$$-\frac{1}{3}(2g+1)\sqrt{2g+1} - \frac{1}{2}(2g+1) + C_0$$

$$= \frac{2g+1}{3}\sqrt{2g+1} - g - \frac{1}{2} + C_0$$
 定数  $-\frac{1}{2} + C_0$  を

 $=\frac{2y+1}{3}\sqrt{2y+1}-y+C$  . C に置き換える.

[問7.7(2)] 不定積分  $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} dy$  を計算せよ. 変数 x を  $x=\sqrt{2y+1}$  とおく.  $x^2=2y+1$  なので  $y=\frac{x^2-1}{2}$  .  $\frac{dy}{dx} = x$  なので dy = x dx. 積分定数を  $C_0, C$  とおく.  $\int \frac{2y}{1+\sqrt{2y+1}} \, dy = \int \frac{2^{\frac{x^2-1}{2}}}{1+x} x \, dx = \int \frac{x(x^2-1)}{x+1} \, dx = \int \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1} \, dx$  $= \int (x^2 - x) dx = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_0$  $=\frac{1}{3}(2y+1)\sqrt{2y+1}-\frac{1}{2}(2y+1)+C_0$  $=\frac{2y+1}{2}\sqrt{2y+1}-y-\frac{1}{2}+C_0$  $=\frac{2y+1}{2}\sqrt{2y+1}-y+C$ .