7.8　2次式の根号を含む式の積分法

逆正弦関数について次の性質が成り立った： $-1 \leq X \leq 1$ である各実数 X に対して $\sin^{-1} X$ の値が定義されて $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} X \leq \dfrac{\pi}{2}$.

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2 - x^2}$ で表される関数を積分する.

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ，$x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{x}{a}$ なので， $x=a\sin t$ ．

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{x}{a}$ なので， $x=a\sin t$ ． $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t} \\
&= a\sqrt{\cos^2 t}\ .
\end{aligned}
$$

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{x}{a}$ なので， $x=a\sin t$ ． $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t}\\ &= a\sqrt{\cos^2 t}\ .\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{a} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，
$\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ ；

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{x}{a}$ なので， $x=a\sin t$ ． $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t}\\ &= a\sqrt{\cos^2 t}\ .\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{a} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので，
$\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ ；これより

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t\ .$$

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分する．無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので， $a^2-x^2 \geq 0$ ， $x^2-a^2 \leq 0$ ， $(x+a)(x-a) \leq 0$ ， $-a \leq x \leq a$ ． $-1 \leq \dfrac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ の値がある．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)=\dfrac{x}{a}$ なので， $x=a\sin t$ ． $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ なので，

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t}\\ &= a\sqrt{\cos^2 t}\ .\end{aligned}$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{a} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ ，よって $\cos t \geq 0$ なので， $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ ；これより

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos t\ .$$

また， $x=a\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt}=a\cos t$ なので， $dx=(a\cos t)\,dt$ ．

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$.

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ ($-3 \leq x \leq 3$) とおく.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ ($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ ($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ ($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3\cos t\ .\end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ ($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3\cos t \ .\end{aligned}$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので, $dx = 3\cos t\,dt$.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ ($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t}\\ &= 3\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので, $dx = 3\cos t\,dt$. $x = 0$ のとき $t = \sin^{-1} 0 = 0$. $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので, $9-x^2 \geq 0$, $x^2-9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. $-1 \leq \dfrac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ の値がある. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ ($-3 \leq x \leq 3$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{3}\right) = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, よって $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2 t} = 3\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので, $dx = 3\cos t\,dt$. $x=0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$. $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1}1 = \dfrac{\pi}{2}$. よって

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$$

$$\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\, dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt$$

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \\
&= \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = \frac{9}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-0\right) \\
&= \frac{9\pi}{4}\ .
\end{aligned}
$$

終

問7.8.1 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$ なので $\quad \leq x \leq \quad$. 変数 t を $t = \qquad\qquad (\quad \leq x \leq \quad)$

とおく. $\sin t = \sin\left(\qquad\qquad\right) = \qquad$ なので $x = \qquad\qquad$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より

$\cos t \geq 0$ なので,

$\sqrt{4-x^2} = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad\qquad = \qquad\qquad.$

$x = \qquad\qquad$ より $\dfrac{dx}{dt} = \qquad\qquad$ なので $dx = \qquad\qquad dt$. $x=1$ のとき $t = \qquad$.

$x=2$ のとき $t = \qquad$. よって

$$\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx =$$

$\boxed{問 7.8.1}$ 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$4-x^2 \geq 0$ なので $-2 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t\ .$$

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$ なので $dx = 2\cos t\,dt$. $x = 1$ のとき $t = \dfrac{\pi}{6}$. $x = 2$ のとき $t = \dfrac{\pi}{2}$. よって

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\cos 2t)\,dt \\
&= \Big[2t + \sin 2t\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + \sin\pi - \frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2}\sin t$.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2}\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$

つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2}\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$

つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{\cos^2 t} \\
&= \sqrt{6}\cos t \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2}\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$

つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{\cos^2 t} \\ &= \sqrt{6}\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = \sqrt{2}\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{2}\cos t$ なので $dx = \sqrt{2}\cos t\,dt$.

例 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ $\left(-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \right)$ とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2}\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$

つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{\cos^2 t} \\ &= \sqrt{6}\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = \sqrt{2}\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{2}\cos t$ なので $dx = \sqrt{2}\cos t\,dt$. $x = 0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$. $x = 1$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{6-3x^2}$ は実数なので, $6-3x^2 \geq 0$, $x^2-2 \leq 0$, $\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right) \leq 0$, $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく.

$\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2}\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{2}} \leq \dfrac{\pi}{2}$

つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2} = \sqrt{6-6\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6}\sqrt{\cos^2 t} \\ &= \sqrt{6}\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = \sqrt{2}\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{2}\cos t$ なので $dx = \sqrt{2}\cos t\,dt$. $x = 0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$. $x = 1$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$.

$$\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6}\cos t \cdot \sqrt{2}\cos t\,dt = 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{6-3x^2}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{6}\cos t \cdot \sqrt{2}\cos t\,dt = 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t\,dt \\
&= 2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t)\,dt \\
&= \sqrt{3}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{4} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}7.8.2}$ 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{12-3x^2}\,dx$ を計算せよ.

$\qquad \geq 0$ なので, $\qquad \leq 0$, $(x \qquad)(x \qquad) \leq 0$, $\qquad \leq x \leq \qquad$. 変数 t を $t = \qquad \left(\qquad \leq x \leq \qquad\right)$ とおく. $\sin t = \sin\left(\qquad\qquad\right) = \qquad$ なので $x = \qquad$. $-\frac{\pi}{2} \leq \qquad \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{12-3x^2} = \sqrt{3}\sqrt{4-x^2} = $$

$x = \qquad$ より $\frac{dx}{dt} = \qquad$ なので $dx = \qquad dt$. $x=-1$ のとき $t = \qquad = \qquad$. $x=\sqrt{3}$ のとき $t = \qquad = \qquad$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{12-3x^2}\,dx = \int \qquad\qquad dt = \int \qquad\qquad dt$$

$\boxed{問 7.8.2}$ 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx$ を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$ なので, $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\frac{x}{2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{12-3x^2} = \sqrt{3}\sqrt{4-x^2} =$$

$x =$ より $\frac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ dt . $x=-1$ のとき $t =$ $=$. $x=\sqrt{3}$ のとき $t =$ $=$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx = \int \qquad dt = \int \qquad dt$$

$\boxed{問 7.8.2}$ 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx$ を計算せよ.

$12-3x^2 \geq 0$ なので, $x^2-4 \leq 0$, $(x+2)(x-2) \leq 0$, $-2 \leq x \leq 2$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ ($-2 \leq x \leq 2$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\begin{aligned}\sqrt{12-3x^2} &= \sqrt{3}\sqrt{4-x^2} = \sqrt{3}\sqrt{4-(2\sin t)^2} \\ &= \sqrt{3}\sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{3}\sqrt{\cos^2 t} \\ &= 2\sqrt{3}\cos t\ .\end{aligned}$$

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$ なので $dx = 2\cos t\,dt$. $x=-1$ のとき $t = \sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$. $x = \sqrt{3}$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\cdot 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = 4\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,dt$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\ \cdot 2\cos t\ \cdot 2\cos t\,dt = 4\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 t\,dt \\
&= 2\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2t)\,dt = 2\sqrt{3}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= 2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 3+\sqrt{3}\pi\ \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$, $-4 \leq x \leq 4$.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16 - x^2}\, dx$ を計算する.

$\sqrt{16 - x^2}$ は実数なので, $16 - x^2 \geq 0$, $x^2 - 16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$, $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1} \dfrac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$, $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$, $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$, $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16}\sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t}$$
$$= 4\cos t \ .$$

例 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$, $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16}\sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t}$$
$$= 4\cos t \ .$$

$x = 4\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 4\cos t$ なので $dx = 4\cos t\,dt$.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$, $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x=4\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16}\sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t}$$
$$= 4\cos t\ .$$

$x=4\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt}=4\cos t$ なので $dx = 4\cos t\,dt$. $x=0$ のとき $t=\sin^{-1}0=0$. $x=3$ のとき $t=\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{16-x^2}$ は実数なので, $16-x^2 \geq 0$, $x^2-16 \leq 0$, $(x+4)(x-4) \leq 0$, $-4 \leq x \leq 4$. 変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{x}{4}$ なので $x = 4\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{16-x^2} = \sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2} = \sqrt{16-16\sin^2 t} = \sqrt{16}\sqrt{1-\sin^2 t} = 4\sqrt{\cos^2 t}$$
$$= 4\cos t \ .$$

$x=4\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 4\cos t$ なので $dx = 4\cos t\,dt$. $x=0$ のとき $t=\sin^{-1}0=0$. $x=3$ のとき $t=\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$.

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} 4\cos t \cdot 4\cos t\,dt = 16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \cos^2 t\,dt$$

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx &= \int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} 4\cos t \cdot 4\cos t\,dt = 16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \cos^2 t\,dt \\
&= 16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 8\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} (1+\cos 2t)\,dt \\
&= 8\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} = 8\left\{\sin^{-1}\frac{3}{4}+\frac{\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)}{2}-0\right\} \\
&= 8\sin^{-1}\frac{3}{4}+4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ .
\end{aligned}$$

$$\int_0^3 \sqrt{16 - x^2}\, dx \;=\; 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} \;+ 4 \sin\left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4}\right) \;\; .$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx \;=\; 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;.$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する.

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx \;=\; 8\sin^{-1}\frac{3}{4}\;+4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\;\;.$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する．公式 $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ より，

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\;\;.$$

$$\int_0^3 \sqrt{16 - x^2}\, dx \;=\; 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} \;+ 4 \sin\left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4}\right) \;\; .$$

$\sin\left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4}\right)$ を計算する．公式 $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ より，

$$\sin\left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4}\right) \;=\; 2 \sin\left(\sin^{-1} \frac{3}{4}\right) \cos\left(\sin^{-1} \frac{3}{4}\right) \;\; .$$

まず

$$\sin\left(\sin^{-1} \frac{3}{4}\right) \;=\; \frac{3}{4} \;\; .$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx \;=\; 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;.$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する．公式 $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ より，

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;.$$

まず

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; \frac{3}{4} \;.$$

更に，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 \;=\; \frac{7}{16} \;,$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx \;=\; 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\!\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;.$$

$\sin\!\left(2\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する．公式 $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ より，

$$\sin\!\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 2\sin\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;.$$

まず

$$\sin\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; \frac{3}{4} \;.$$

更に，

$$\cos^2\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 1-\sin^2\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 \;=\; \frac{7}{16} \;,$$

$-\dfrac{\pi}{2} \le \sin^{-1}\dfrac{3}{4} \le \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\!\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right) \ge 0$ なので

$$\cos\!\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \;=\; \sqrt{\frac{7}{16}} \;=\; \frac{\sqrt{7}}{4} \;.$$

$$\int_0^3 \sqrt{16-x^2}\,dx = 8\sin^{-1}\frac{3}{4} + 4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) .$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する．公式 $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ より，

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) .$$

まず

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} .$$

更に，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{3}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \geq 0$ なので

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} .$$

よって

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{8}\sqrt{7} .$$

故に

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16 - x^2}\, dx &= 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \sin\left(2 \sin^{-1} \frac{3}{4}\right) \\ &= 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{8} \sqrt{7} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{7} + 8 \sin^{-1} \frac{3}{4} \quad .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.8.3}$ 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx$ を計算せよ.

≥ 0 なので, ≤ 0 , $(x+\quad)(x-\quad) \leq 0$, $\leq x \leq$. 変数 t を $t =$ $(\quad \leq x \leq \quad)$ とおく. $\sin t = \sin\Bigl(\qquad\Bigr) =$ なので $x =$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{25-x^2} =$$

$x =$ より $\dfrac{dx}{dt} =$ なので $dx =$ dt . $x = 0$ のとき $t =$ $=$. $x = 4$ のとき $t =$.

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx = \int \qquad dt = \int \qquad dt$$

$\boxed{問7.8.3}$ 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$25-x^2 \geq 0$ なので, $x^2-25 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$. 変数 t を $t=\sin^{-1}\frac{x}{5}$ ($-5 \leq x \leq 5$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{5}\right)=\frac{x}{5}$ なので $x=5\sin t$. $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{25-x^2} =$$

$x=$ より $\frac{dx}{dt}=$ なので $dx=$ dt . $x=0$ のとき

$t=$ $=$. $x=4$ のとき $t=$.

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx = \int \qquad dt = \int \qquad dt$$

$\boxed{\text{問}7.8.3}$ 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx$ を計算せよ.

$25-x^2 \geq 0$ なので, $x^2-25 \leq 0$, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ ($-5 \leq x \leq 5$) とおく. $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{5}\right) = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので,

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = 5\sqrt{1-\sin^2 t} = 5\sqrt{\cos^2 t}$$
$$= 5\cos t\ .$$

$x = 5\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 5\cos t$ なので $dx = 5\cos t\,dt$. $x = 0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$. $x = 4$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{4}{5}$.

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} 5\cos t \cdot 5\cos t\,dt = 25\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} \cos^2 t\,dt$$

$$\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx = \int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} 5\cos t \cdot 5\cos t\,dt = 25\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} \cos^2 t\,dt$$

$$= 25\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{25}{2}\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} (1+\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{25}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} = \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{4}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$$

$$= \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{2}\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) .$$

ここで, $\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}$, また,

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) = 1-\left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)\right\}^2 = 1-\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} ,$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{4}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) \geq 0$ なので

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} .$$

よって

$$\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{2}\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}$$
$$= \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + 6 \ .$$

故に $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx = 6 + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5}$.

終