7. 補遺 3　正弦関数・余弦関数の冪の定積分

自然数 n に対して不定積分 $\int (\sin x)^n dx$ 及び $\int (\cos x)^n dx$ を考える.

自然数 n に対して不定積分 $\int(\sin x)^n dx$ 及び $\int(\cos x)^n dx$ を考える.
$S_n = \int(\sin x)^n dx$, $C_n = \int(\cos x)^n dx$ とおく. $n \geq 2$ とする.

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx$ として部分積分法を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を略し $\int \sin x \, dx = -\cos x$.

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx$ として部分積分法を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を略し $\int \sin x \, dx = -\cos x$.

$$S_n = \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x\, dx$ として部分積分法を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x$. 積分定数を略し $\int \sin x\, dx = -\cos x$.

$$\begin{aligned} S_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x\, dx \\ &= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x\,(-\cos x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int (\sin x)^{n-2}\cos^2 x\, dx \end{aligned}$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx$　として部分積分法を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$ ．積分定数を略し $\int \sin x \, dx = -\cos x$ ．

$$\begin{aligned} S_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx \\ &= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x \, (-\cos x) dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x \, dx \\ &= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) \, dx \end{aligned}$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x\, dx$ として部分積分法を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x$. 積分定数を略し $\int \sin x\, dx = -\cos x$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x\, dx \\
&= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x\,(-\cos x)dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int (\sin x)^{n-2}\cos^2 x\, dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int (\sin x)^{n-2}(1-\sin^2 x)\, dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int \{(\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n\}\, dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\Big\{\int (\sin x)^{n-2}dx - \int (\sin x)^n\, dx\Big\}
\end{aligned}
$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx$ として部分積分法を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x$. 積分定数を略し $\int \sin x \, dx = -\cos x$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx \\
&= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x \, (-\cos x) dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int (\sin x)^{n-2}\cos^2 x \, dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int (\sin x)^{n-2}(1-\sin^2 x) \, dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int \{(\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n\} \, dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\left\{\int (\sin x)^{n-2} dx - \int (\sin x)^n \, dx\right\} \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)(S_{n-2} - S_n) \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n \ ,
\end{aligned}
$$

$S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx$ として部分積分法を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x$. 積分定数を略し $\int \sin x \, dx = -\cos x$.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \int (\sin x)^{n-1} \sin x \, dx \\
&= (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int (n-1)(\sin x)^{n-2} \cos x \, (-\cos x) dx \\
&= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x \, dx \\
&= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) \, dx \\
&= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int \{ (\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n \} \, dx \\
&= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \Big\{ \int (\sin x)^{n-2} dx - \int (\sin x)^n \, dx \Big\} \\
&= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1)(S_{n-2} - S_n) \\
&= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n \ ,
\end{aligned}
$$

つまり

$$S_n = -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n \ .$$

$$S_n = -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n \quad .$$

$$S_n = -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n \quad .$$

両辺に $(n-1)S_n$ を加えると

$$S_n + (n-1)S_n = -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)S_{n-2} \quad ,$$

$$nS_n = (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1}\cos x \quad ,$$

$$S_n = \frac{1}{n}\{(n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1}\cos x\} \quad .$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx$ として部分積分を用いる.
$\dfrac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を略し $\int \cos x \, dx = \sin x$.

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx$ として部分積分を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を略し $\int \cos x \, dx = \sin x$.

$$C_n = \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx$ として部分積分を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を略し $\int \cos x \, dx = \sin x$.

$$\begin{aligned} C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x \, dx \\ &= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x \, dx \end{aligned}$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x\, dx$ として部分積分を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を略し $\int \cos x\, dx = \sin x$.

$$
\begin{aligned}
C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x\, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x\, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x\, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - \cos^2 x)\, dx
\end{aligned}
$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx$ として部分積分を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を略し $\int \cos x \, dx = \sin x$.

$$
\begin{aligned}
C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2}(1 - \cos^2 x) \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int \{(\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n\} \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \left\{ \int (\cos x)^{n-2} dx - \int (\cos x)^n \, dx \right\}
\end{aligned}
$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx$ として部分積分を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を略し $\int \cos x \, dx = \sin x$.

$$\begin{aligned}
C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2}(1 - \cos^2 x) \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int \{(\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n\} \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \left\{ \int (\cos x)^{n-2} dx - \int (\cos x)^n \, dx \right\} \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)(C_{n-2} - C_n) \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) C_{n-2} - (n-1) C_n \ ,
\end{aligned}$$

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx$ として部分積分を用いる.

$\dfrac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$. 積分定数を略し $\int \cos x \, dx = \sin x$.

$$
\begin{aligned}
C_n &= \int (\cos x)^{n-1} \cos x \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x) \sin x \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int \{ (\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n \} \, dx \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \Big\{ \int (\cos x)^{n-2} dx - \int (\cos x)^n \, dx \Big\} \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)(C_{n-2} - C_n) \\
&= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) C_{n-2} - (n-1) C_n \ ,
\end{aligned}
$$

つまり

$$
C_n = (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) C_{n-2} - (n-1) C_n \ .
$$

$$C_n = (\cos x)^{n-1}\sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n \quad .$$

$$C_n = (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n \quad .$$

両辺に $(n-1)C_n$ を加えると

$$C_n + (n-1)C_n = (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1)C_{n-2} \quad ,$$

$$nC_n = (n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x \quad ,$$

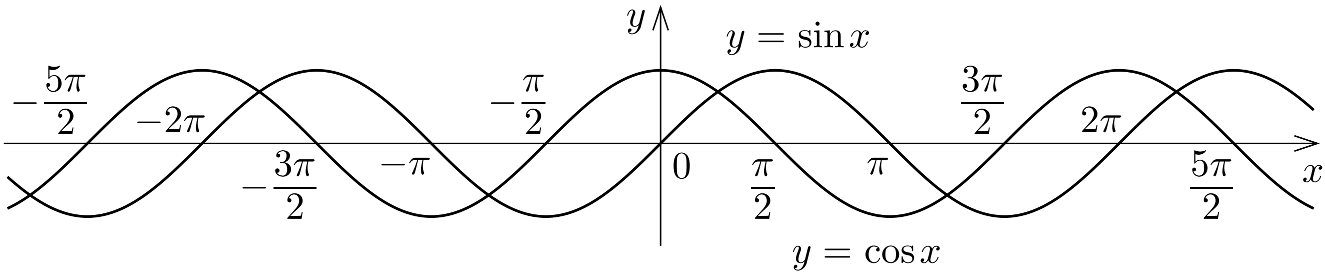
$$C_n = \frac{1}{n}\{(n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x\} \quad .$$

定理　各自然数 n に対して $S_n = \int (\sin x)^n dx$ ，$C_n = \int (\cos x)^n dx$ とおくと，$n \geq 2$ である自然数 n に対して次の漸化式が成り立つ：

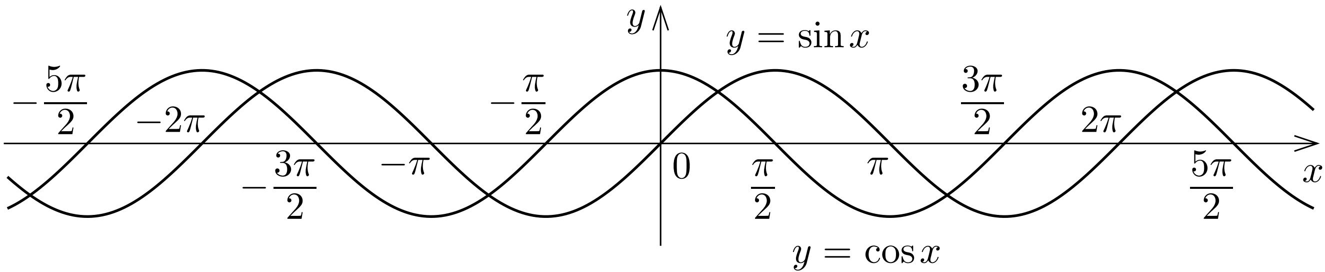
$$S_n = \frac{1}{n}\{(n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1}\cos x\} \ ,$$

$$C_n = \frac{1}{n}\{(n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1}\sin x\} \ .$$

実数 a と b とは $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるとする. xy 座標平面における $y=\sin x$ のグラフと $y=\cos x$ のグラフは次のようになる.



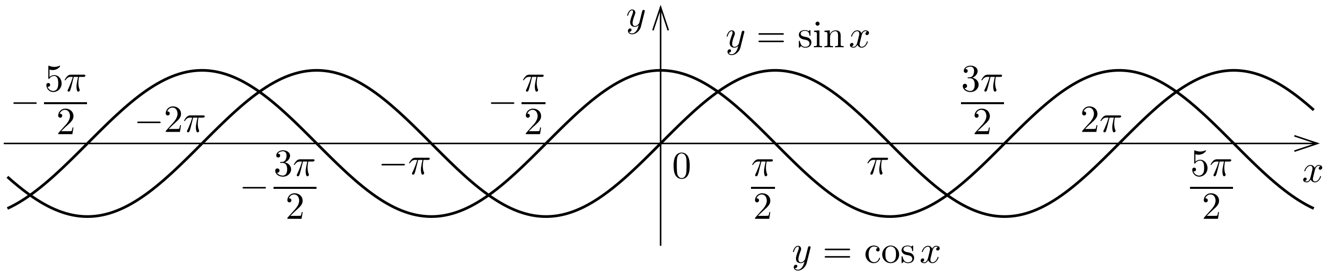
実数 a と b とは $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるとする. xy 座標平面における $y = \sin x$ のグラフと $y = \cos x$ のグラフは次のようになる.



これらのグラフを見ると次のことが分かる:

実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるならば, $\sin x = 0$ または $\cos x = 0$.

実数 a と b とは $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるとする. xy 座標平面における $y=\sin x$ のグラフと $y=\cos x$ のグラフは次のようになる.



これらのグラフを見ると次のことが分かる:

実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるならば, $\sin x=0$ または $\cos x=0$.

実数 a と b とは $\frac{\pi}{2}$ の整数倍なので,

$$\sin a=0 \text{ または } \cos a=0 \ ,$$

$$\sin b=0 \text{ または } \cos b=0 \ .$$

自然数 n について $n \geq 2$ とする． $S_n = \int (\sin x)^n dx$ について，

$$S_n = \frac{1}{n}\{(n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1}\cos x\} = \frac{n-1}{n}S_{n-2} - \frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x \ .$$

自然数 n について $n \geq 2$ とする. $S_n = \int (\sin x)^n dx$ について,

$$S_n = \frac{1}{n}\{(n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1}\cos x\} = \frac{n-1}{n}S_{n-2} - \frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x \ .$$

これより,

$$\begin{aligned}
\Big[S_n\Big]_a^b &= \left[\frac{n-1}{n}S_{n-2} - \frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x\right]_a^b \\
&= \left[\frac{n-1}{n}S_{n-2}\right]_a^b - \left[\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x\right]_a^b \\
&= \frac{n-1}{n}\Big[S_{n-2}\Big]_a^b - \frac{1}{n}\Big[(\sin x)^{n-1}\cos x\Big]_a^b \ ,
\end{aligned}$$

$$\left[S_n\right]_a^b = \frac{n-1}{n}\left[S_{n-2}\right]_a^b - \frac{1}{n}\left[(\sin x)^{n-1}\cos x\right]_a^b \quad .$$

$$\left[S_n\right]_a^b = \frac{n-1}{n}\left[S_{n-2}\right]_a^b - \frac{1}{n}\left[(\sin x)^{n-1}\cos x\right]_a^b \ .$$

右辺の $\left[(\sin x)^{n-1}\cos x\right]_a^b$ を計算する． $n \geq 2$ なので $n-1 \geq 1$ ． $\sin b = 0$ または $\cos b = 0$ なので，

$$(\sin b)^{n-1}\cos b = 0 \ .$$

$\sin a = 0$ または $\cos a = 0$ なので，

$$(\sin a)^{n-1}\cos a = 0 \ .$$

$$\Big[S_n\Big]_a^b = \frac{n-1}{n}\Big[S_{n-2}\Big]_a^b - \frac{1}{n}\Big[(\sin x)^{n-1}\cos x\Big]_a^b \ .$$

右辺の $\Big[(\sin x)^{n-1}\cos x\Big]_a^b$ を計算する. $n \geq 2$ なので $n-1 \geq 1$. $\sin b = 0$ または $\cos b = 0$ なので,

$$(\sin b)^{n-1}\cos b = 0 \ .$$

$\sin a = 0$ または $\cos a = 0$ なので,

$$(\sin a)^{n-1}\cos a = 0 \ .$$

これらのことより

$$\Big[(\sin x)^{n-1}\cos x\Big]_a^b = (\sin b)^{n-1}\cos b - (\sin a)^{n-1}\cos a = 0 \ ,$$

従って

$$\Big[S_n\Big]_a^b = \frac{n-1}{n}\Big[S_{n-2}\Big]_a^b \ .$$

$$\left[S_n\right]_a^b = \frac{n-1}{n}\left[S_{n-2}\right]_a^b .$$

$$\left[S_n\right]_a^b = \frac{n-1}{n}\left[S_{n-2}\right]_a^b \quad .$$

ここで,

$$\left[S_n\right]_a^b = \left[\int(\sin x)^n dx\right]_a^b = \int_a^b(\sin x)^n dx \quad ,$$

$$\left[S_{n-2}\right]_a^b = \left[\int(\sin x)^{n-2} dx\right]_a^b = \int_a^b(\sin x)^{n-2} dx \quad ,$$

故に

$$\int_a^b(\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b(\sin x)^{n-2} dx \quad .$$

$$\Big[S_n\Big]_a^b \;=\; \frac{n-1}{n}\Big[S_{n-2}\Big]_a^b \;\;.$$

ここで,

$$\Big[S_n\Big]_a^b = \left[\int(\sin x)^n dx\right]_a^b = \int_a^b(\sin x)^n dx \;\;,$$

$$\Big[S_{n-2}\Big]_a^b = \left[\int(\sin x)^{n-2} dx\right]_a^b = \int_a^b(\sin x)^{n-2} dx \;\;,$$

故に

$$\int_a^b(\sin x)^n dx \;=\; \frac{n-1}{n}\int_a^b(\sin x)^{n-2} dx \;\;.$$

同様にして次の等式も導かれる:

$$\int_a^b(\cos x)^n dx \;=\; \frac{n-1}{n}\int_a^b(\cos x)^{n-2} dx \;\;.$$

定理　実数 a と b とは $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるとする． $n \geq 2$ である自然数 n に対して，

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \ ,$$

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b (\cos x)^{n-2} dx \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$ を計算する.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \ .$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$ を計算する.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \quad .$$

定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$ の下端 0 も上端 $\dfrac{3\pi}{2}$ も $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$ を計算する.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \ .$$

定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$ の下端 0 も上端 $\dfrac{3\pi}{2}$ も $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\, dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\, dx \ ,$$

例 定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ を計算する.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \ .$$

定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ の下端 0 も上端 $\dfrac{3\pi}{2}$ も $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \ ,$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x\,dx \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ を計算する.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \ .$$

定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ の下端 0 も上端 $\dfrac{3\pi}{2}$ も $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \ ,$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x\,dx \ ,$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 1\,dx = \Big[x\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} \ .$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ を計算する.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \ .$$

定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ の下端 0 も上端 $\dfrac{3\pi}{2}$ も $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \ ,$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x\,dx \ ,$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 1\,dx = \Big[x\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} \ .$$

従って,

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{16} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問7.補遺3.1}$ 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos^4 x\,dx$ を計算せよ.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx \ .$$

定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos^4 x\,dx$ の下端 $\dfrac{\pi}{2}$ も上端 2π も $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos^4 x\,dx = \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \quad \cdot \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} 1\,dx = \quad \cdot \quad \Bigg(\qquad \Bigg)$$

問7.補遺3.1 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\cos^4 x\,dx$ を計算せよ.

$\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b(\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b(\cos x)^{n-2}dx \ .$$

定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\cos^4 x\,dx$ の下端 $\frac{\pi}{2}$ も上端 2π も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\cos^4 x\,dx &= \frac{3}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\cos^2 x\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}1\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{9\pi}{16}\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{例}$ 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\, dx$ を計算する.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$ を計算する.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx \ .$$

定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$ の下端 $\dfrac{\pi}{2}$ も上端 $\dfrac{3\pi}{2}$ も $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$ を計算する.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b (\cos x)^{n-2} dx \ .$$

定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$ の下端 $\dfrac{\pi}{2}$ も上端 $\dfrac{3\pi}{2}$ も $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx = \frac{4}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x\,dx \ ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x\,dx \ ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1-1 = -2 \ .$$

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$ を計算する.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx \ .$$

定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$ の下端 $\dfrac{\pi}{2}$ も上端 $\dfrac{3\pi}{2}$ も $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x\,dx \ ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x\,dx \ ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1-1 = -2 \ .$$

従って,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x\,dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) = -\frac{16}{15} \ .$$ $\boxed{終}$

$\boxed{問7.補遺3.2}$ 定積分 $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x\, dx$ を計算せよ.

$\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \ .$$

定積分 $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x\, dx$ の下端 π も上端 2π も $\dfrac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x\, dx = \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin^3 x\, dx = \quad \cdot \quad \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx$$

$$= \quad \cdot \quad \Big[\qquad \Big]_{\pi}^{2\pi} = \quad \cdot \quad \cdot (\qquad)$$

$$= \qquad .$$

問7.補遺3.2 定積分 $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x\,dx$ を計算せよ.

$\frac{\pi}{2}$ の整数倍である実数 a と b 及び 2 以上の自然数 n に対して,

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \quad .$$

定積分 $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x\,dx$ の下端 π も上端 2π も $\frac{\pi}{2}$ の整数倍である.

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x\,dx &= \frac{4}{5}\int_{\pi}^{2\pi} \sin^3 x\,dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx \\
&= \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi} = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot(-2) \\
&= -\frac{16}{15} \quad .
\end{aligned}$$

終