8.0　関数のリーマン和

定積分の定義を復習する.

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n =$$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \quad$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，リーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \qquad\qquad .$

定義　実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，リーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する： $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ．

実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み，f は a から b まで定積分可能であるとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$ とする．

実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含み，f は a から b まで定積分可能であるとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ をとる．

$$\delta_n = \max\{\,x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots\,, x_n - x_{n-1}\,\}$$

について $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする．定積分の定義より，$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても，リーマン和 $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \{\,f(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わない．

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても，リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n \to \infty} S_n$ は変わない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても，リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで， $\xi_k = x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

しばしば， f のリーマン和として $\sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^{n} \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ を用いる．