8.1 平面領域の面積

定積分の定義を復習する.

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n = $$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \quad$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，リーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \qquad\qquad$.

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{\, x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots\,, x_n - x_{n-1}\,\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{ f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \}$$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，リーマン和 S_n の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ．

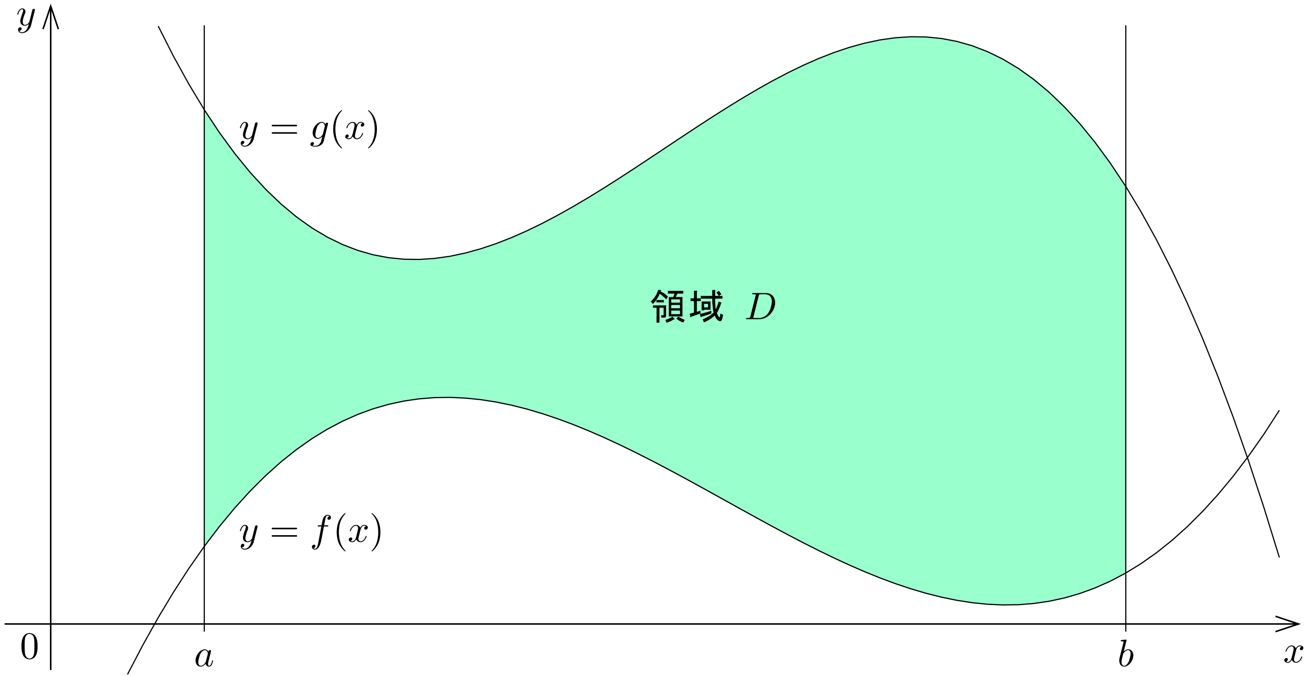
関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する： $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ．

実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において，連立不等式

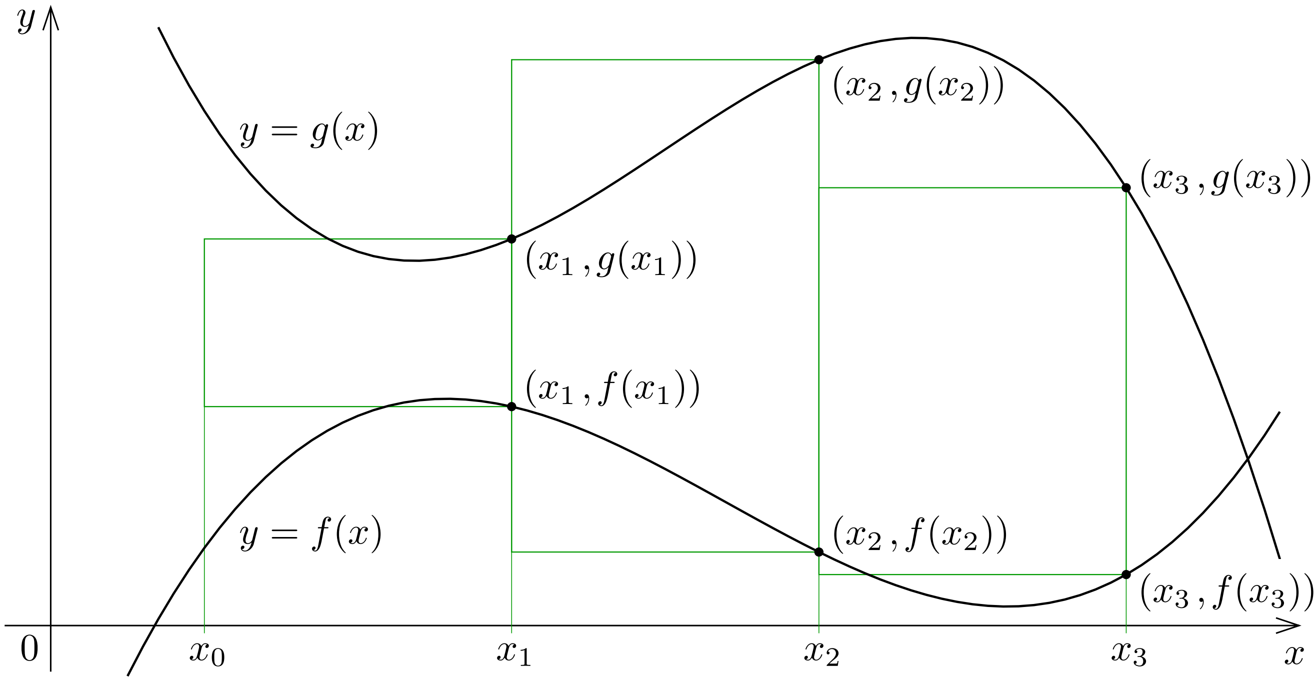
$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

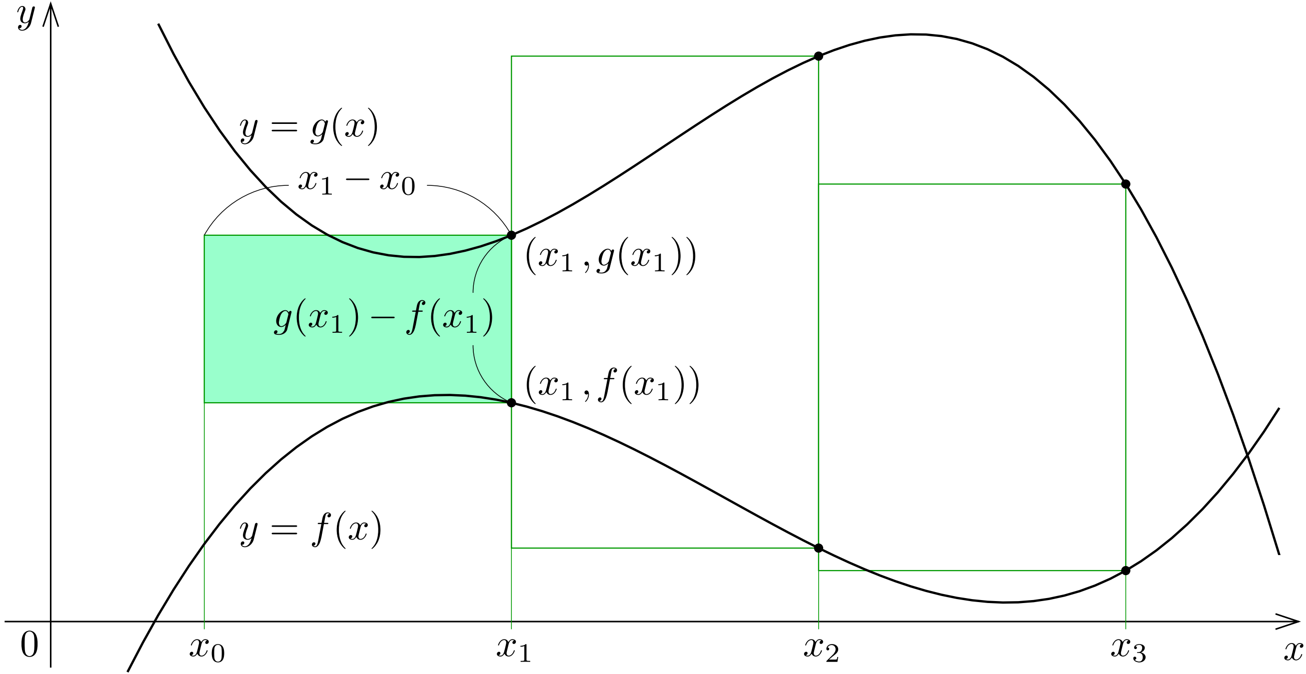
で表される領域を D の面積を考える．

例えば領域 D が下図の明緑色の図形であるとする.



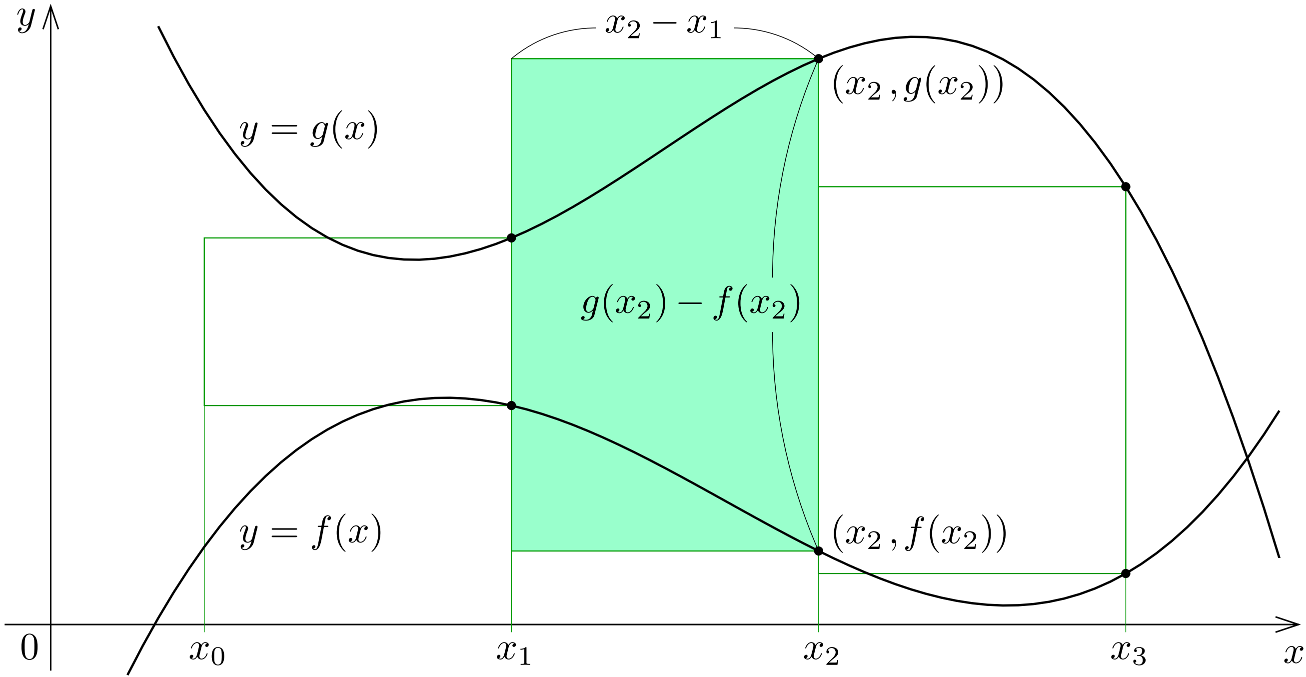
$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = b$ である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3$ に対して下図の状況を考える.





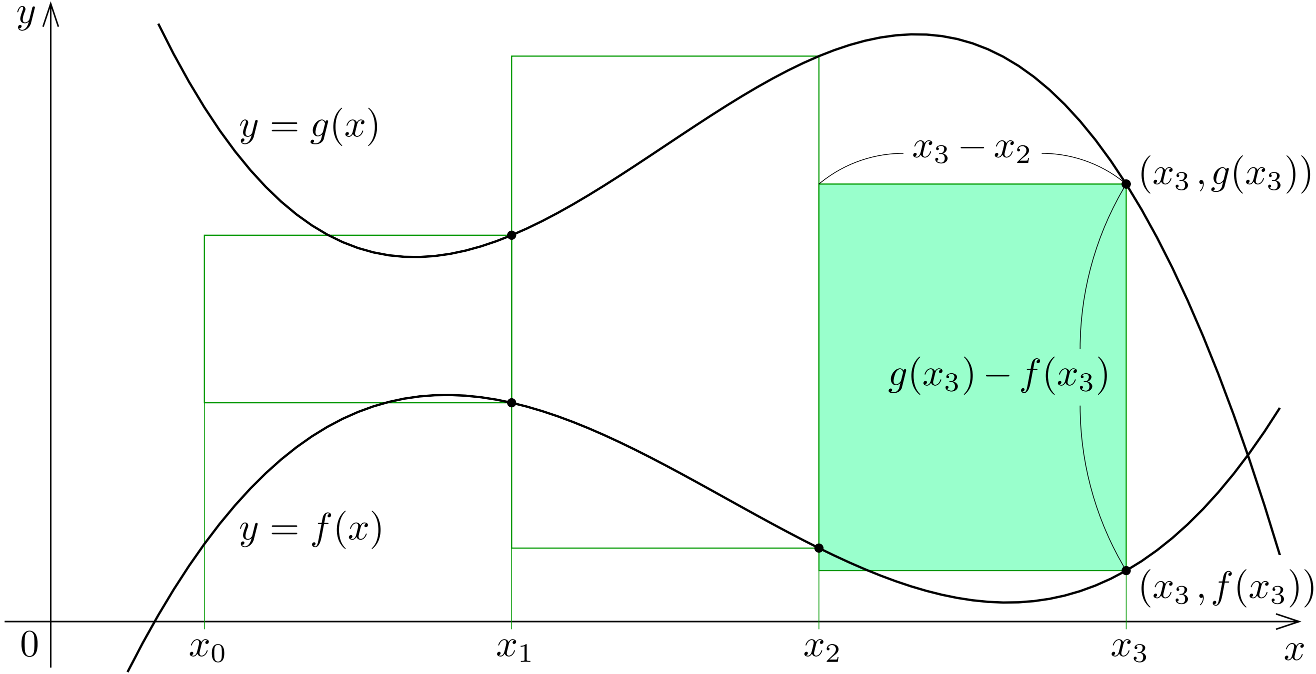
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0)\ .$$



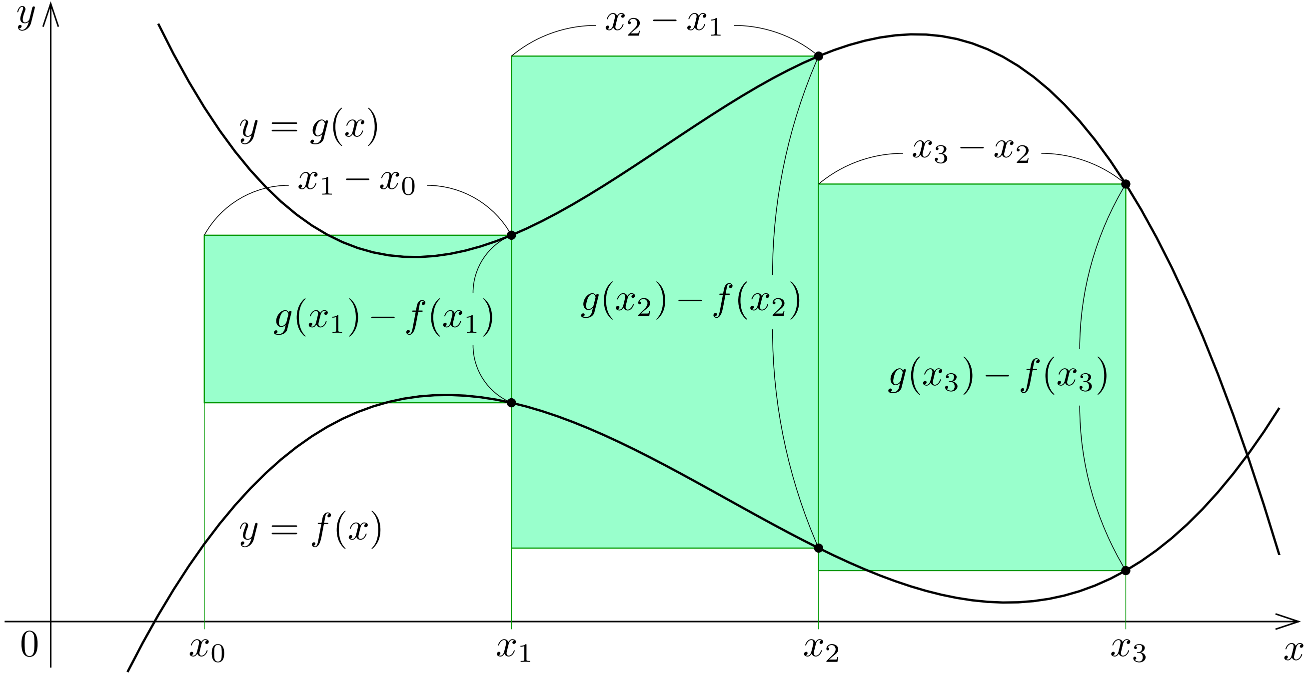
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1)\ .$$



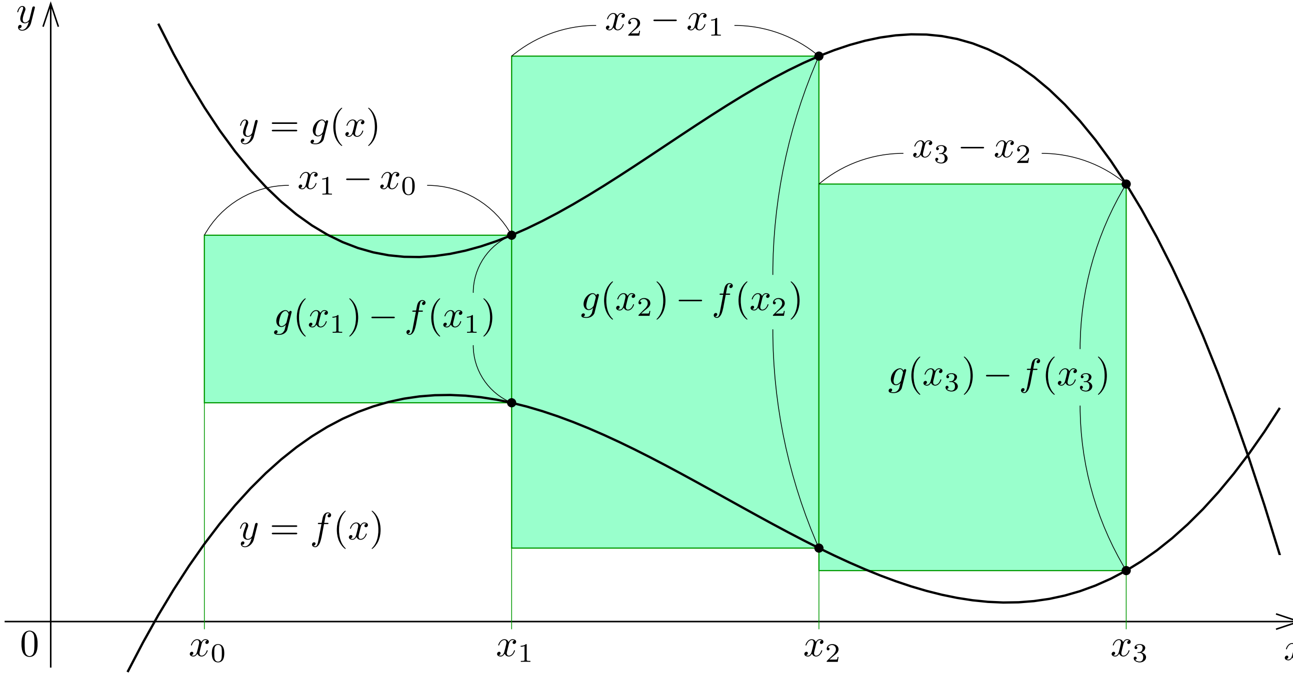
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)\ .$$



上図の 3 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積は

$$\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0) + \{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1) + \{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)\ .$$



上図の 3 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_3 は

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right] .$$

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり，関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\right]$$

を考える.

　正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ をとり，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和

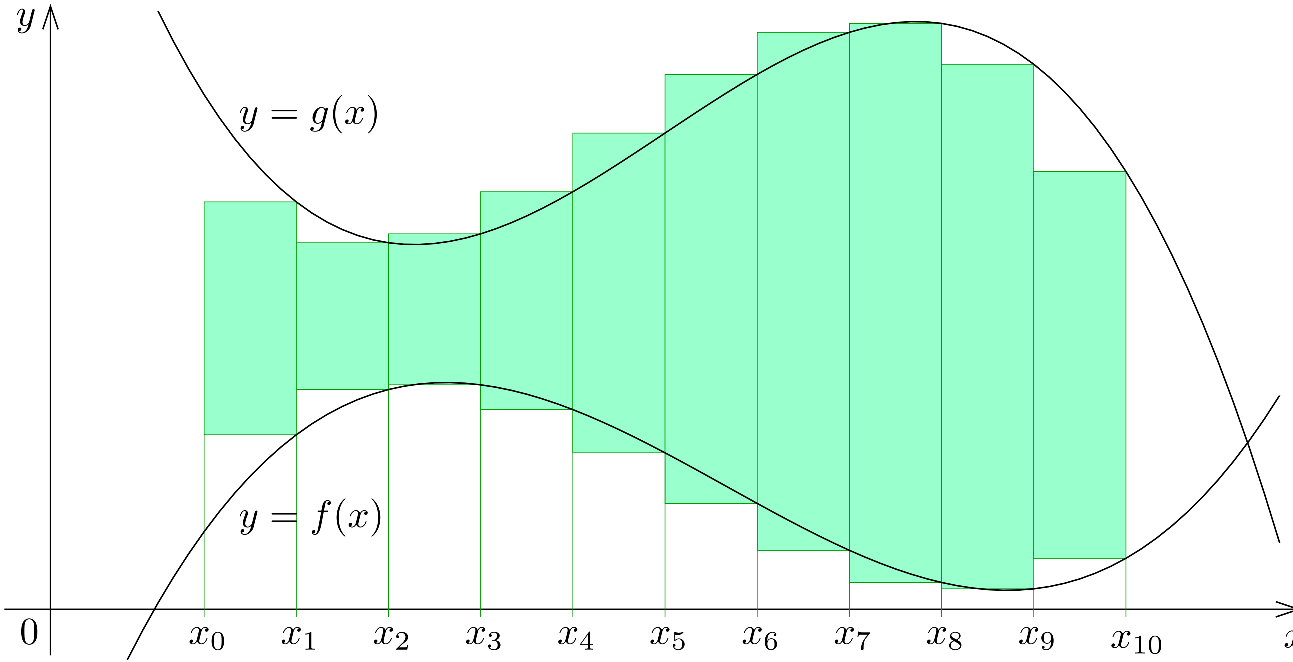
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$$

を考える．

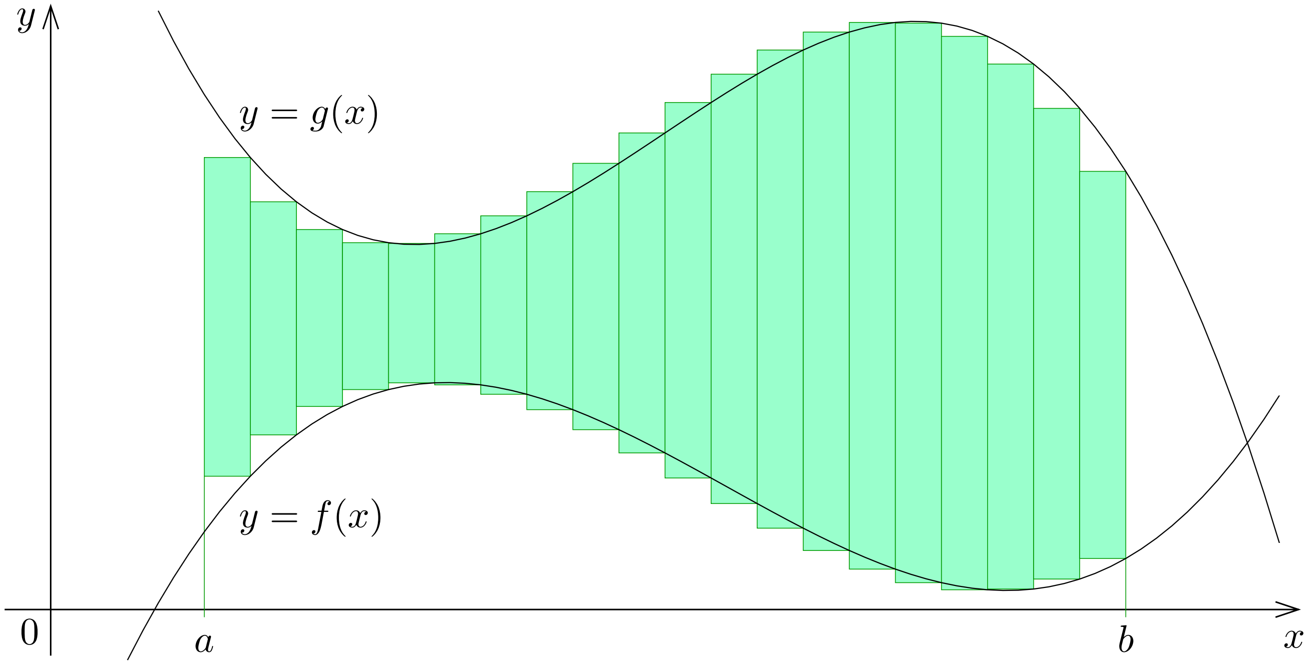
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots\,, x_n - x_{n-1}\}$$

について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする．つまり，$n \to \infty$ のとき $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \cdots\,, x_{n-1}\,, x_n$ の間隔は 0 に限りなく近づくとする．

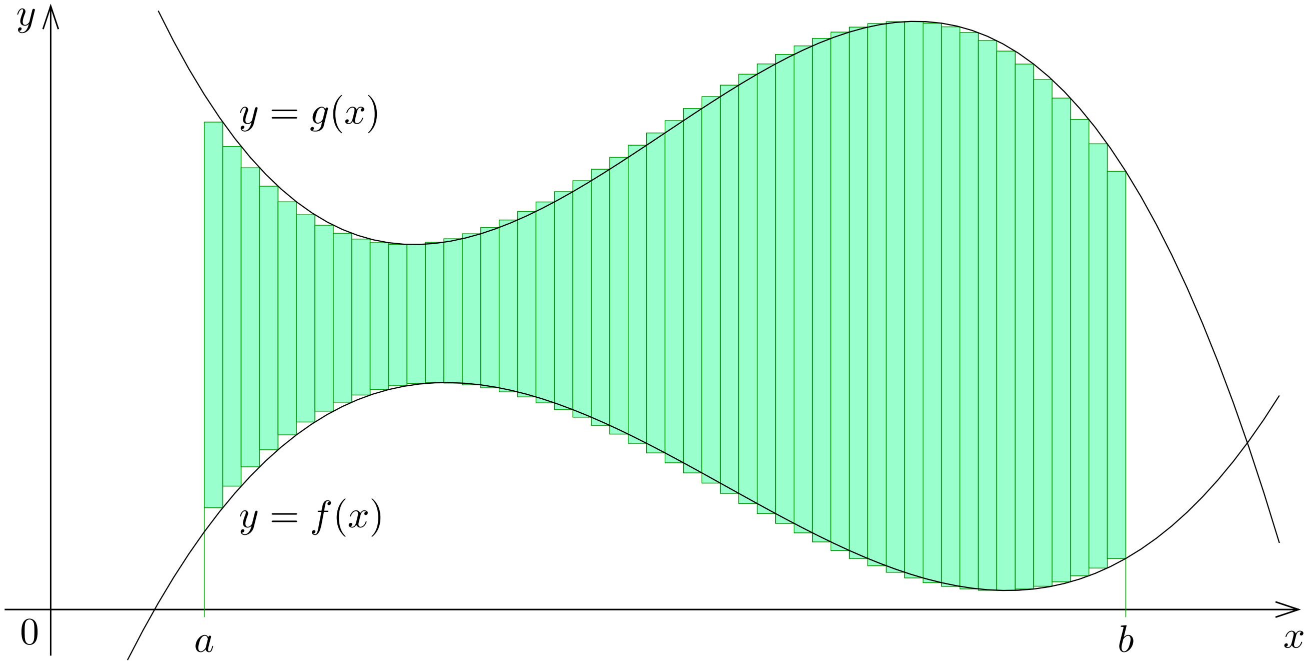
$n = 10$ のとき，下図の 10 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ である．



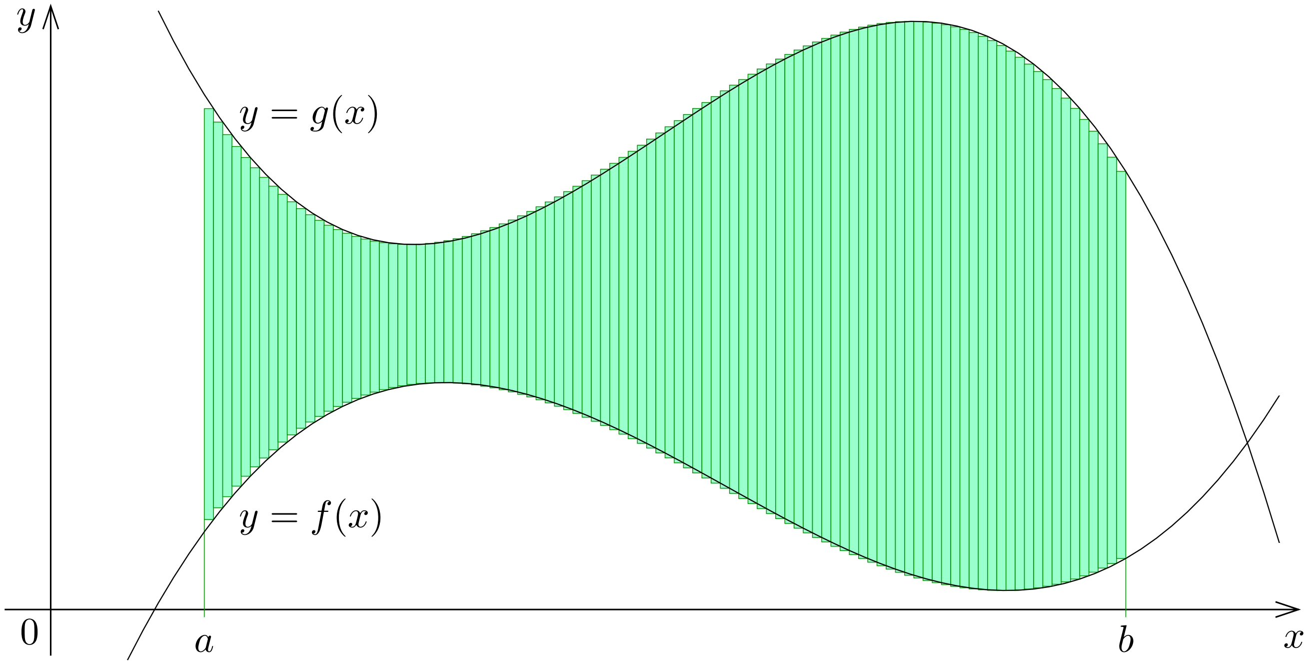
$n=20$ のとき，下図の 20 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_{20}=\sum_{k=1}^{20}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ である.



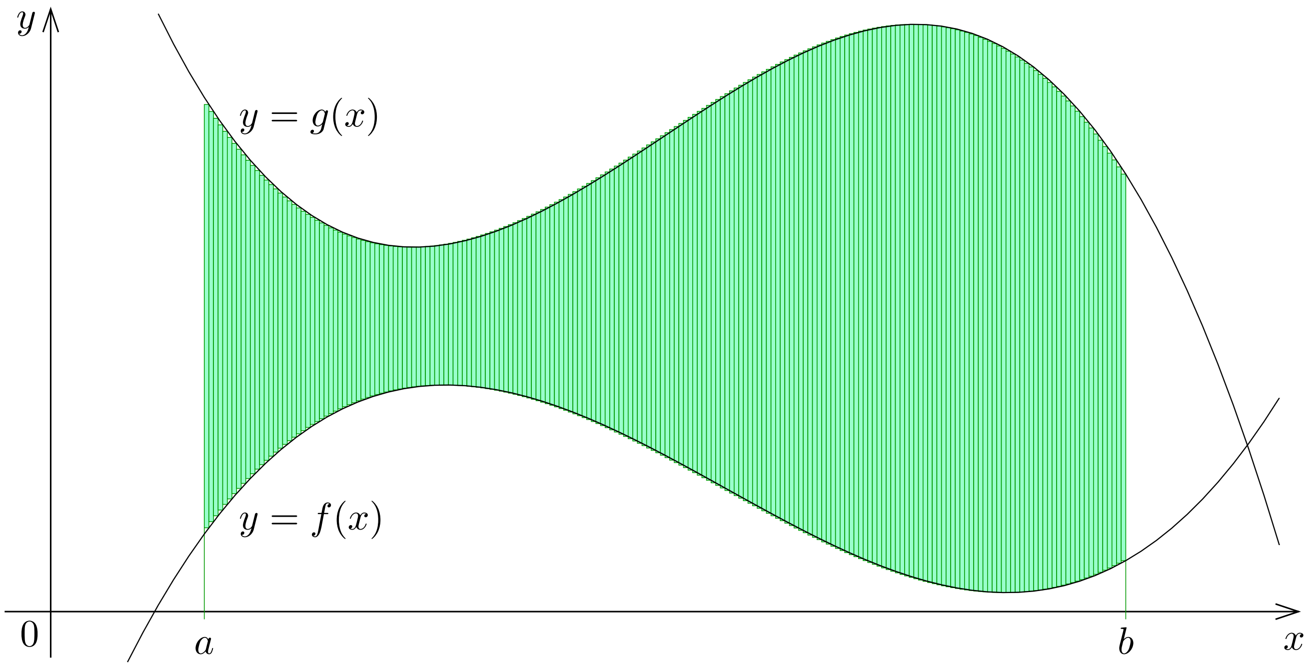
$n = 50$ のとき，下図の 50 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 $S_{50} = \sum_{k=1}^{50} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ である．



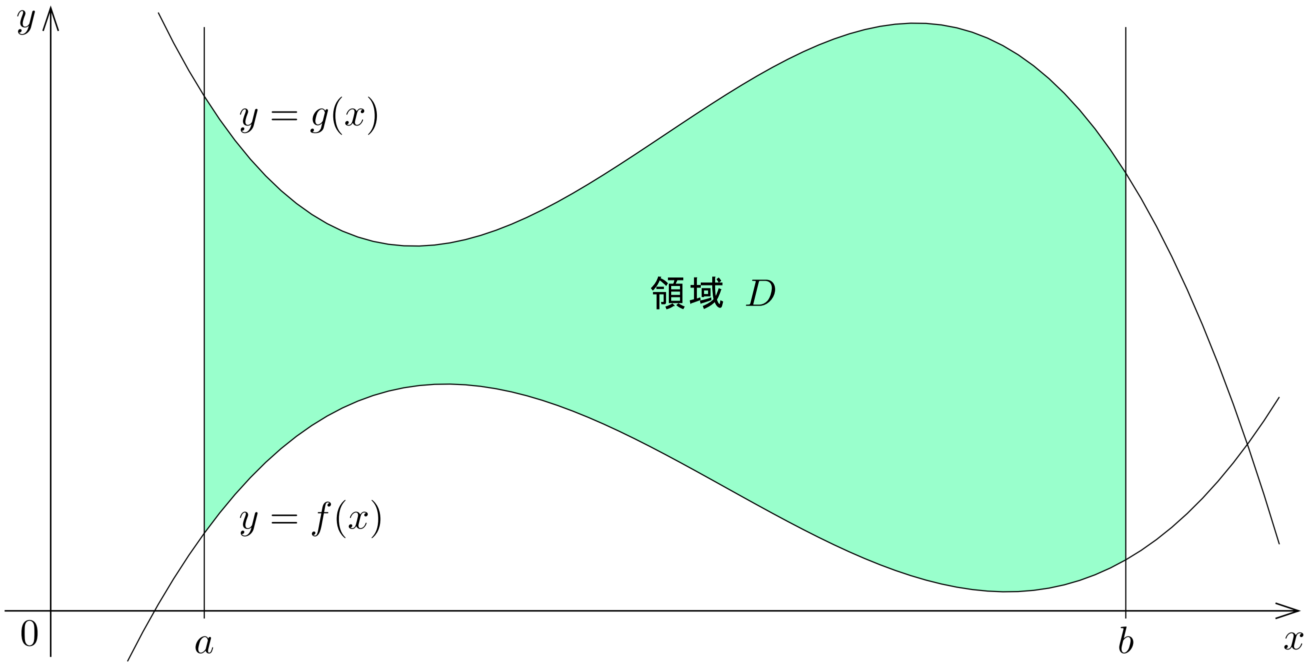
$n=100$ のとき，下図の 100 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_{100}=\sum_{k=1}^{100}\left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})\right]$ である.

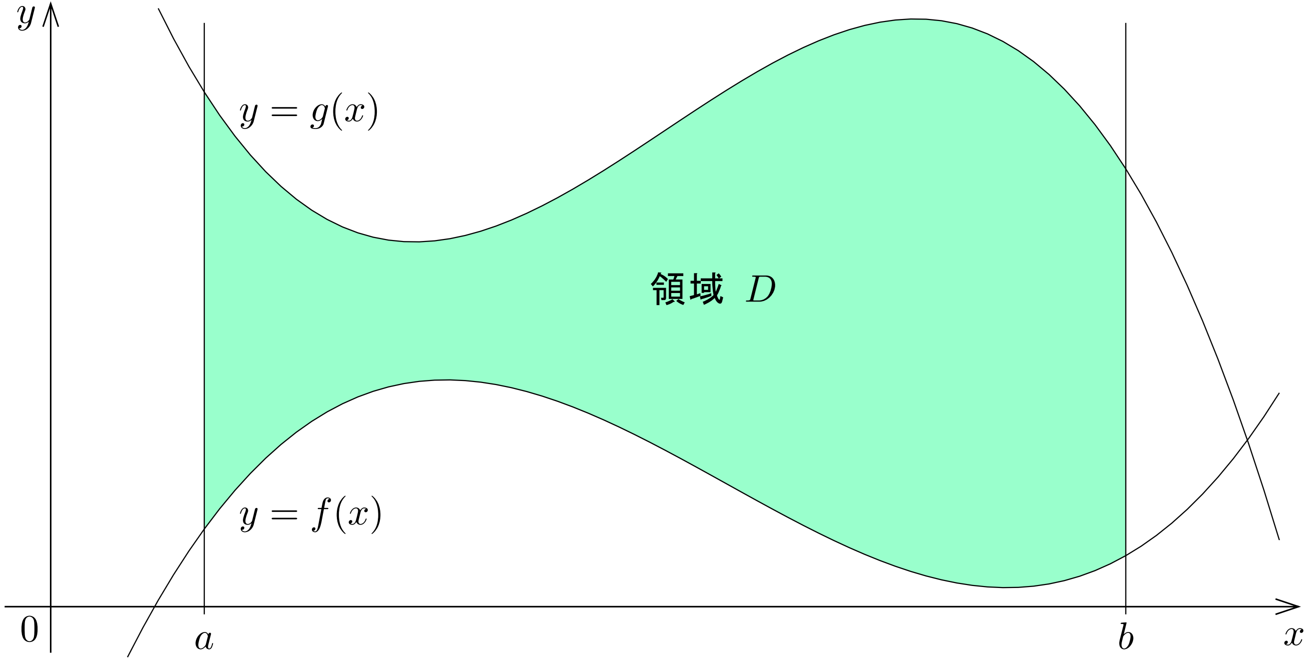


$n=200$ のとき，下図の 200 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_{200}=\sum_{k=1}^{200}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ である．



関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき下図の領域 D の面積に限りなく近づいていく.





つまり，上図の領域 D の面積は，関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n \to \infty} S_n$ である．

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k) - f(x_k)\} (x_k - x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n \to \infty} S_n$ である.

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である．

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx\ .$$

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx \ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ の定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ である．

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx\ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ の定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ である．

　このようにして次の定理が成り立つ．

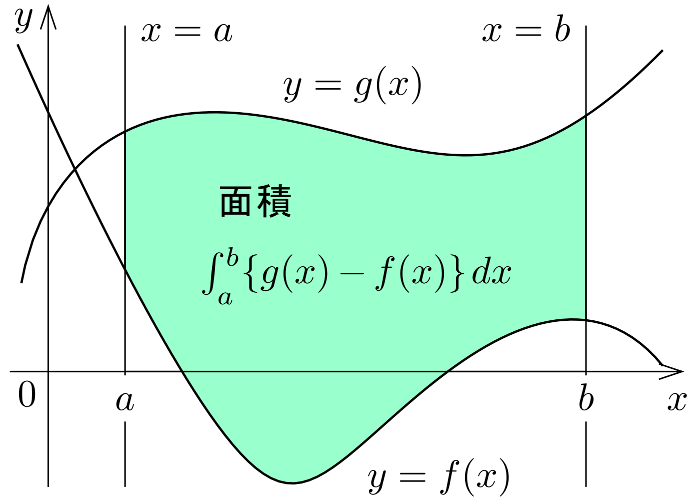
定理　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a, b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\, dx$$

である．



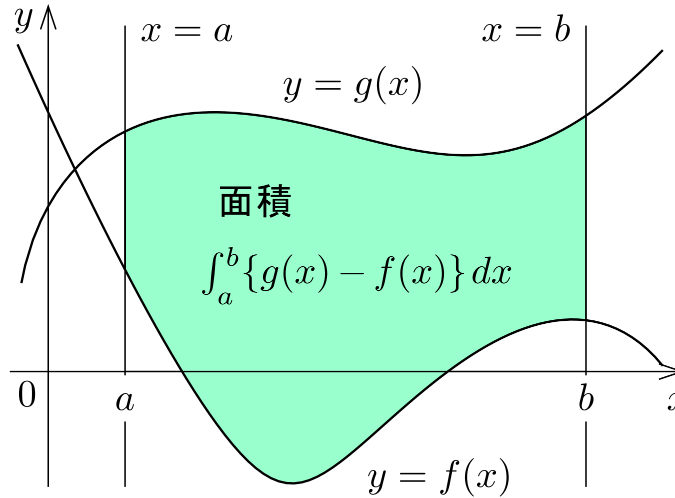
定理　実数 a と b について $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a, b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

である．

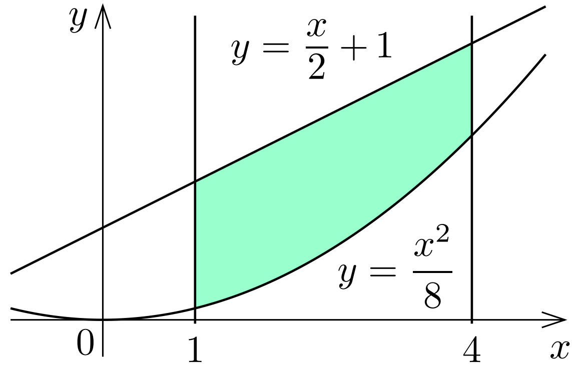


　この定理を用いる際には，領域の点の x 座標の範囲と，その範囲で $f(x) \leq g(x)$ であるかどうかに注意すること．

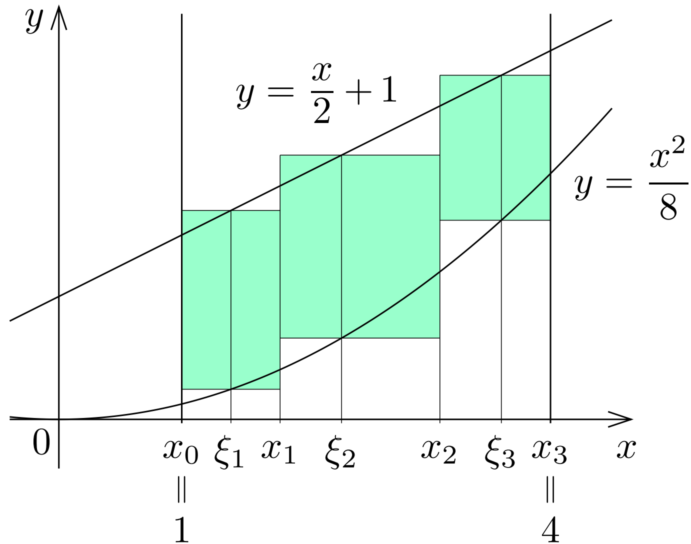
$\boxed{\text{問}8.1.1}$ xy 座標平面において連立不等式

$$1 \leq x \leq 4 \quad \text{かつ} \quad \frac{x^2}{8} \leq y \leq \frac{x}{2}+1$$

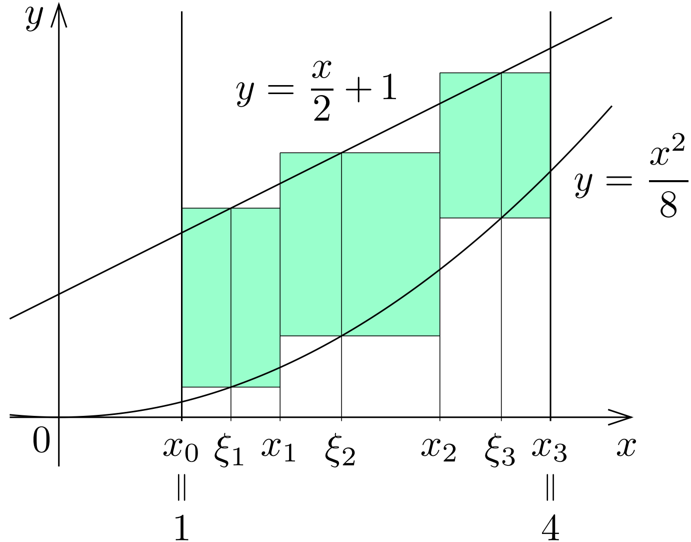
で表される領域 D の面積を求める.



(1) $1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$ である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して，右図の網掛けされた 3 個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記せ．



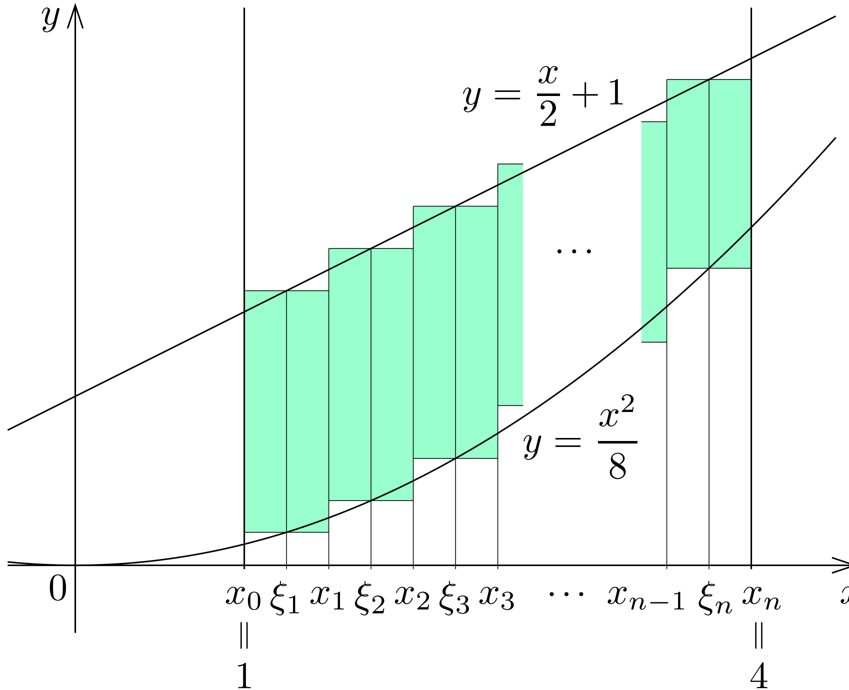
(1) $1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$ である実数 x_0 , x_1 , x_2 , x_3 及び $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$ である実数 ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 に対して，右図の網掛けされた 3 個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記せ.



$$S_3 = \left(\frac{\xi_1}{2}+1-\frac{{\xi_1}^2}{8}\right)(x_1-x_0)+\left(\frac{\xi_2}{2}+1-\frac{{\xi_2}^2}{8}\right)(x_2-x_1)+\left(\frac{\xi_3}{2}+1-\frac{{\xi_3}^2}{8}\right)(x_3-x_2)$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\xi_k}{2}+1-\frac{{\xi_k}^2}{8}\right)(x_k-x_{k-1}) \ .$$

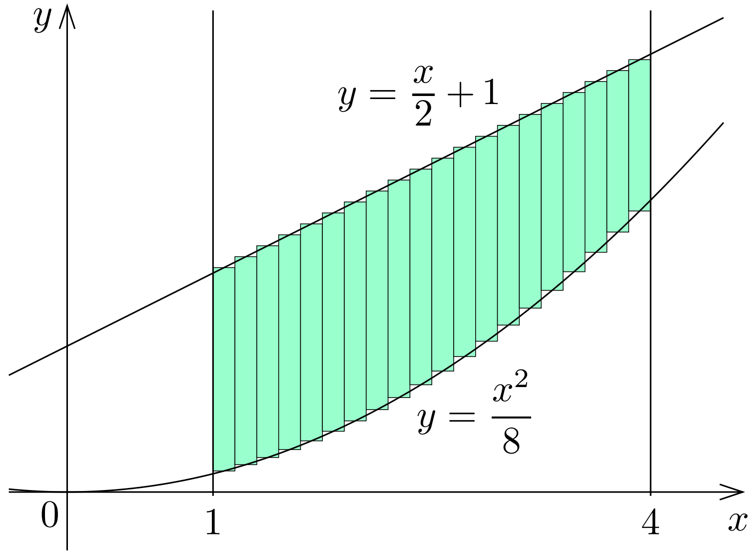
(2)　変数 n を正の自然数とする．$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ に対して，右図のような網掛けされた n 個の長方形を併せた領域の面積 S_n を表す式を記せ．またこの式を何というか記せ．



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\xi_k}{2} + 1 - \frac{{\xi_k}^2}{8} \right) (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\dfrac{x}{2} + 1 - \dfrac{x^2}{8}$ のリーマン和である.

(3) $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする；つまり $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に限りなく近付くとする．$n \to \infty$ のとき S_n は右図のように領域 D の面積に限りなく近付く；つまり S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が領域 D の面積になる．このことを用いて，定積分によって領域 D の面積を求めよ．

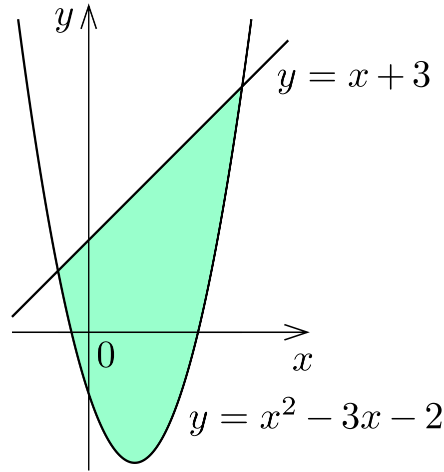


$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$ なので，関数 $\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{x^2}{8}$ のリーマン和 S_n は定積分 $\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{8}\right)dx$ に収束する．領域 D の面積は

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^4 \left(\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{8}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{24}x^3\right]_1^4 = \frac{33}{8} \ .$$

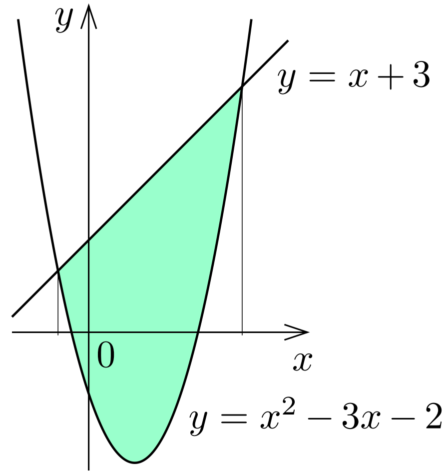
終

$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.



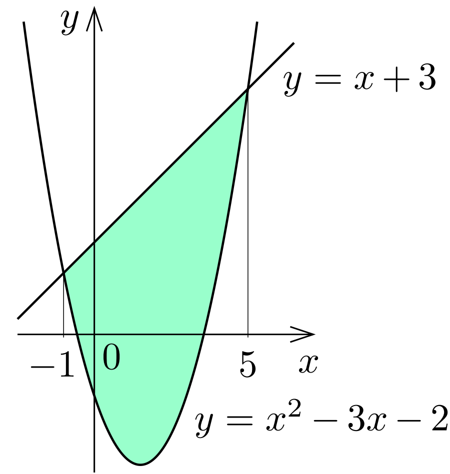
例 xy 座標平面において関数 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.

まず, $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める.



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.

まず, $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める. $x^2-3x-2=x+3$ とすると,

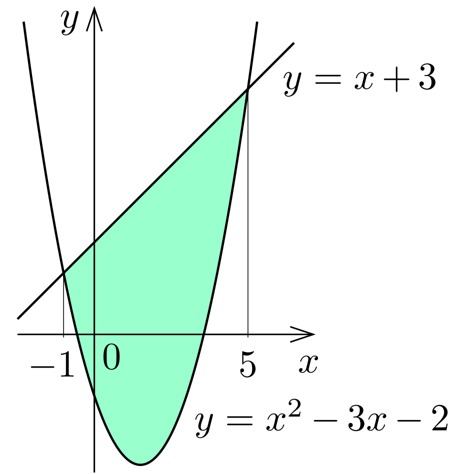


$$x^2-4x-5=0\ ,$$

$$(x+1)(x-5)=0\ ,$$

$$x=-1,5\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.



まず, $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める. $x^2-3x-2=x+3$ とすると,

$$x^2-4x-5=0\ ,$$

$$(x+1)(x-5)=0\ ,$$

$$x=-1,5\ .$$

$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 個である. $-1\leq x\leq 5$ のとき $x^2-3x-2\leq x+3$.

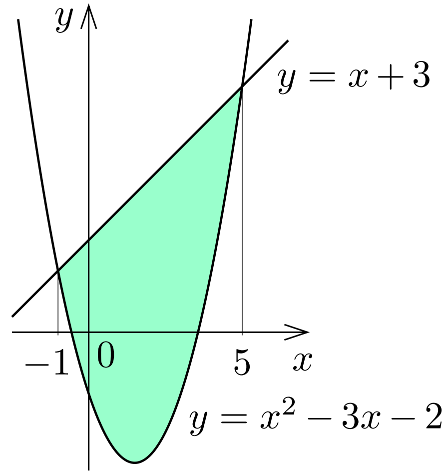
$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.

まず, $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める. $x^2-3x-2=x+3$ とすると,

$$x^2-4x-5=0\ ,$$

$$(x+1)(x-5)=0\ ,$$

$$x=-1,5\ .$$



$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 個である. $-1\leq x\leq 5$ のとき $x^2-3x-2\leq x+3$. 従って, $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\int_{-1}^{5}\{(x+3)-(x^2-3x-2)\}\,dx=\int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)\,dx$$

$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5} \{(x+3) - (x^2 - 3x - 2)\}\,dx &= \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^{5} \\ &= -\frac{125}{3} + 50 + 25 - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5\right) \\ &= 36 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問8.1.2}$ xy 座標平面において関数 $y = 9 - x^2$ のグラフと $y = 1 - 2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.

方程式 $9 - x^2 = 1 - 2x$ を解くと, $\qquad = 0$, $(x \qquad)(x \qquad) = 0$, $x = \quad , \quad$. $\quad \leq x \leq \quad$ のとき $9 - x^2 \quad 1 - 2x$. 従って求める面積は

$$\int \quad \{(\qquad) - (\qquad)\} dx =$$

$\boxed{問 8.1.2}$ xy 座標平面において関数 $y = 9 - x^2$ のグラフと $y = 1 - 2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.

方程式 $9 - x^2 = 1 - 2x$ を解くと, $x^2 - 2x - 8 = 0$ ，$(x+2)(x-4) = 0$ ，$x = 4, -2$ ． $-2 \leq x \leq 4$ のとき $9 - x^2 \geq 1 - 2x$ ．従って求める面積は

$$\int \quad \{(\qquad\qquad) - (\qquad\qquad)\}dx =$$

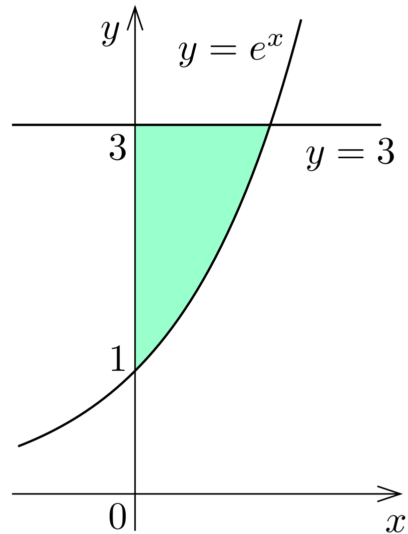
$\boxed{問8.1.2}$ xy 座標平面において関数 $y=9-x^2$ のグラフと $y=1-2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.

方程式 $9-x^2=1-2x$ を解くと, $x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$, $x=4,-2$. $-2 \leq x \leq 4$ のとき $9-x^2 \geq 1-2x$. 従って求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}\{(9-x^2)-(1-2x)\}\,dx &= \int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^{4} \\ &= 36\ .\end{aligned}$$

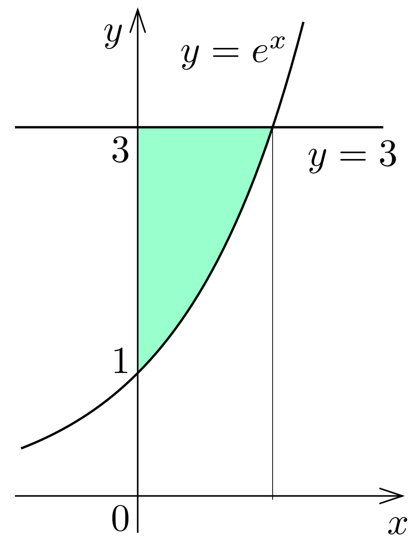
$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



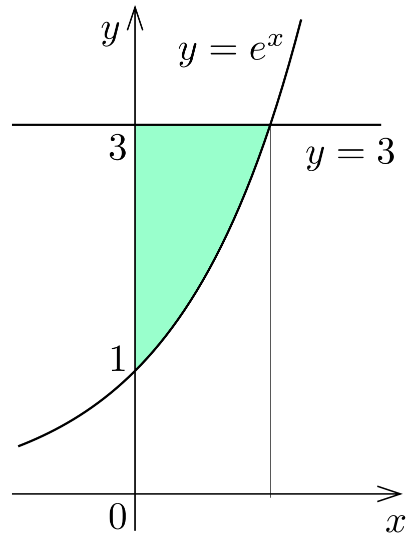
$\boxed{例}$ xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標を求める.

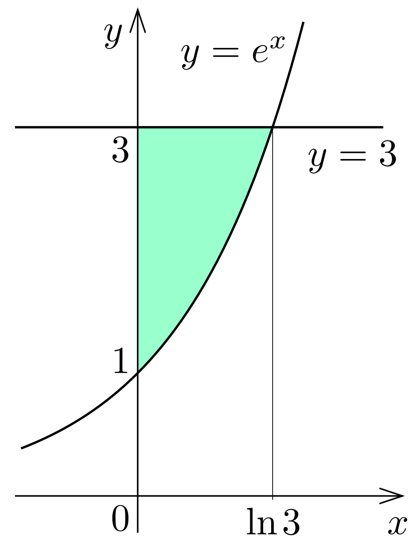


$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める. $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると, $e^x=3$ なので $x=\ln 3$.

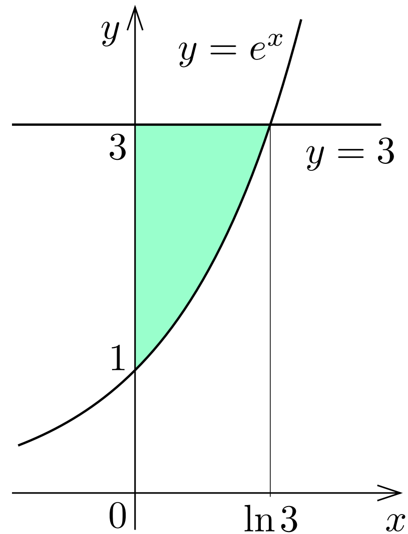


例 xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める. $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると, $e^x=3$ なので $x=\ln 3$. 関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

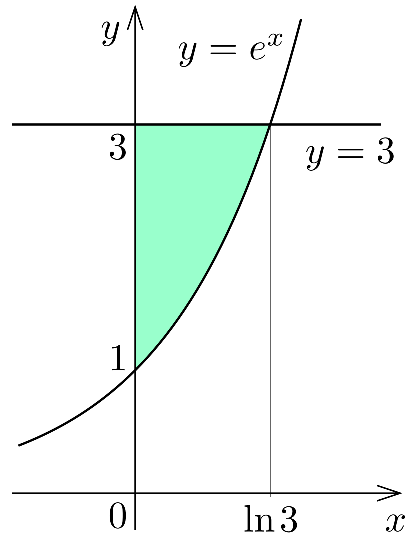


まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める. $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると, $e^x=3$ なので $x=\ln 3$. 関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である. D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり, このとき $e^x \leq e^{\ln 3}=3$.

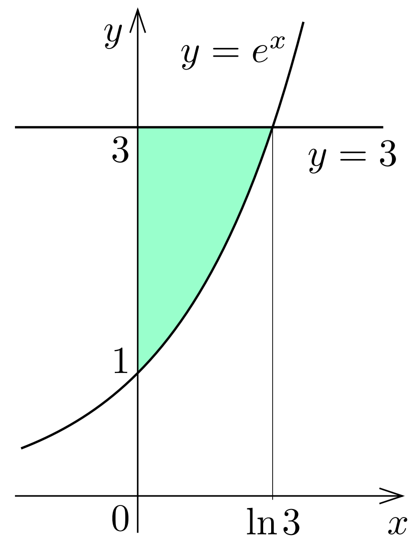
$\boxed{例}$ xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める. $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると, $e^x=3$ なので $x=\ln 3$. 関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である. D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり, このとき $e^x \leq e^{\ln 3}=3$. 領域 D の面積は

$$\int_0^{\ln 3}(3-e^x)\,dx$$



例 xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める. $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると, $e^x=3$ なので $x=\ln 3$. 関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である. D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり, このとき $e^x \leq e^{\ln 3}=3$. 領域 D の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3}(3-e^x)\,dx &= \left[3x-e^x\right]_0^{\ln 3}\\ &= 3\ln 3-e^{\ln 3}-(-1)\\ &= \ln 3^3-3+1\\ &= \ln 27-2\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}8.1.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.

$\ln x = 2$ とすると $x = \qquad < 9$. $x \geq \qquad$ のとき $\ln x \geq \ln \qquad = \qquad$. 領域 D の面積は

$$\int^{9} \left(\qquad\qquad \right) dx =$$

問8.1.3 xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.

$\ln x = 2$ とすると $x = e^2 < 9$. $x \geq e^2$ のとき $\ln x \geq \ln e^2 = 2$. 領域 D の面積は

$$\int^9 (\qquad\qquad) \, dx =$$

$\boxed{問8.1.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.

$\ln x = 2$ とすると $x = e^2 < 9$. $x \geq e^2$ のとき $\ln x \geq \ln e^2 = 2$. 領域 D の面積は

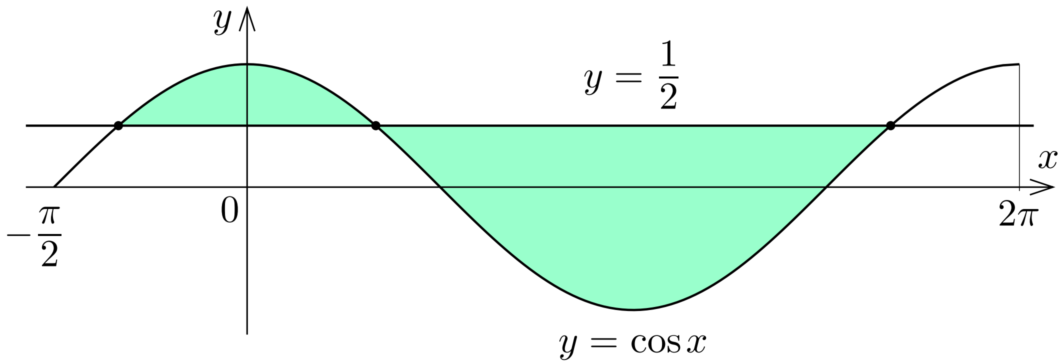
$$\int_{e^2}^{9} (\ln x - 2)\, dx = \left[x \ln x - 3x \right]_{e^2}^{9} = 9 \ln 9 - 27 - e^2 \ln e^2 + 3e^2$$

$$= 9 \ln 9 + e^2 - 27 \ .$$

$\boxed{終}$

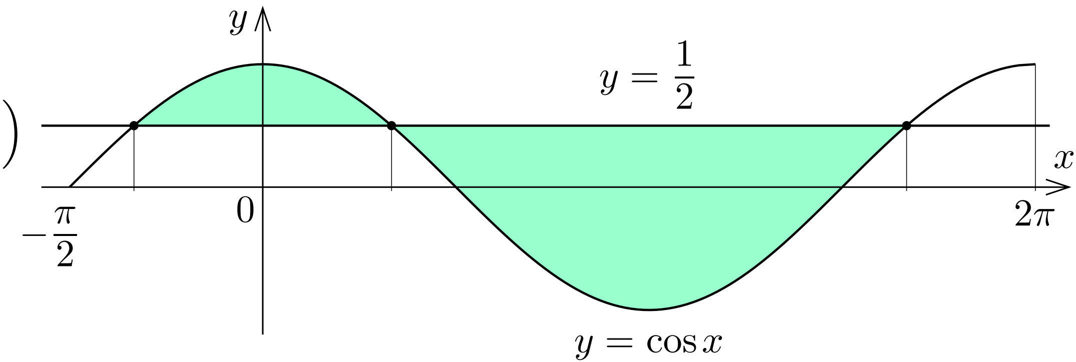
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.



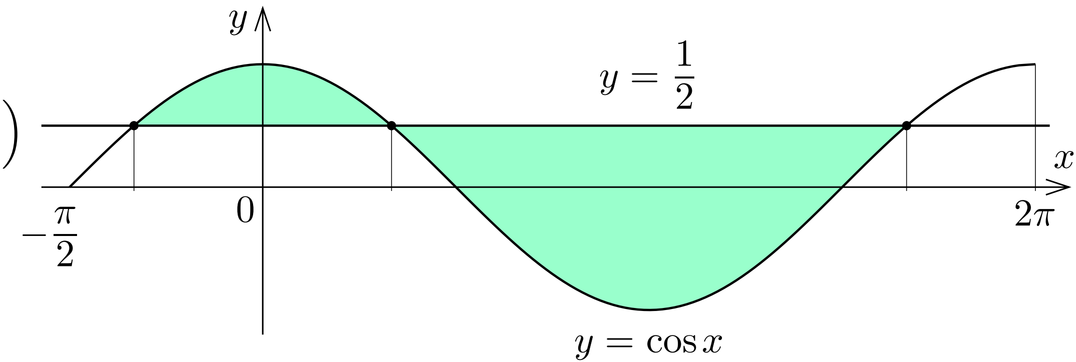
例 xy 座標平面において関数 $y=\cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

まず関数 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

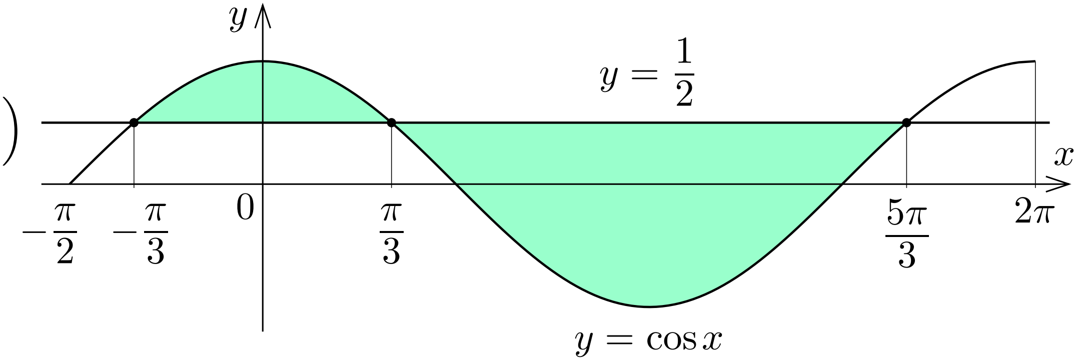
まず関数 $y = \cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



$\cos x = \dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ とすると, $x =$ 　, 　, 　.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

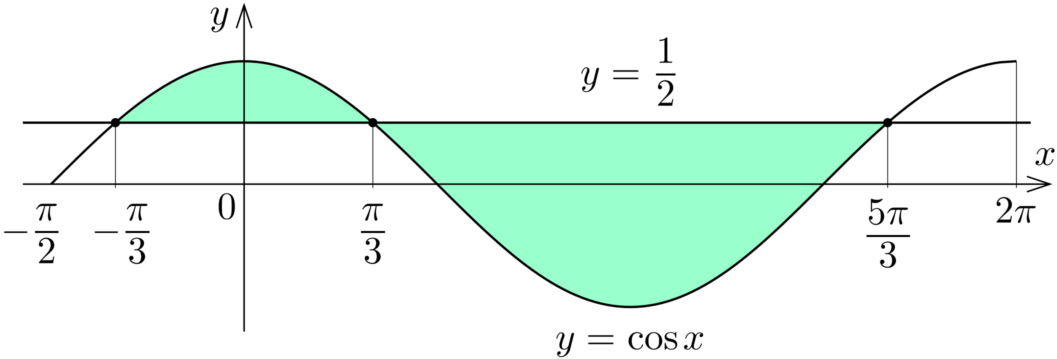
　まず関数 $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



$\cos x = \dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ とすると, $x = -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$. $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \quad \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \quad \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

まず関数 $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



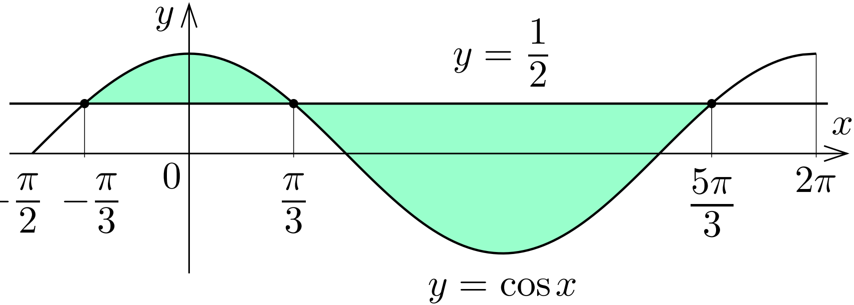
$\cos x = \dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ とすると, $x = -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$. $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \geqq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \leqq \dfrac{1}{2}$.

$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ のとき

$\cos x \geq \frac{1}{2}$ ， $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$

のとき $\cos x \leq \frac{1}{2}$ ． 領域

の面積は



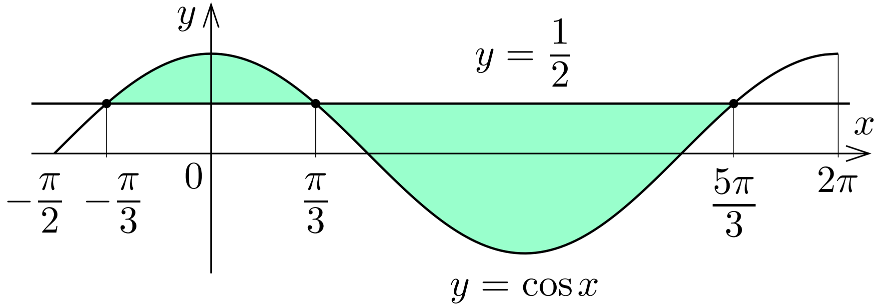
$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\qquad\qquad\qquad \right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\qquad\qquad\qquad \right) dx$$

$-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$ のとき

$\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ ，$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$

のとき $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ ．領域

の面積は



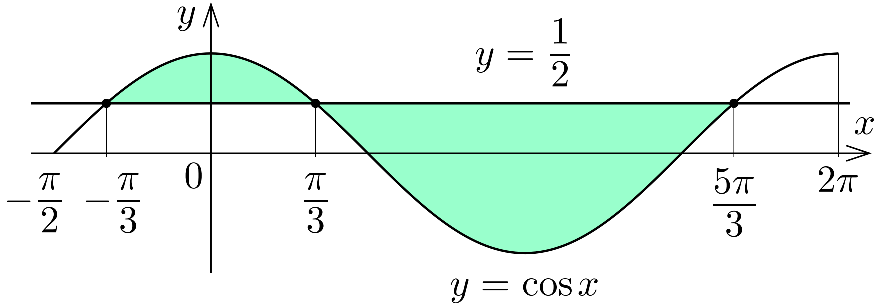
$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx$$

$-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$ のとき

$\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ ， $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$

のとき $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$. 領域

の面積は



$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx$$

$$= \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} \ .$$

終

$\boxed{問8.1.4}$ xy 座標平面において関数 $y = \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2} \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x = \quad , \quad , \quad .$

$\leq x \leq$ 　　のとき $\sin x \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 　　$\leq x \leq$ 　　のとき $\sin x \quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int \quad \left(\qquad\qquad\qquad \right) dx + \int \quad \left(\qquad\qquad\qquad \right) dx$$

$\boxed{問 8.1.4}$ xy 座標平面において関数 $y = \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2} \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}$.

$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{3}$ のとき $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int \quad \left(\qquad\qquad\qquad \right) dx + \int \quad \left(\qquad\qquad\qquad \right) dx$$

$\boxed{\text{問}8.1.4}$ xy 座標平面において関数 $y = \sin x \quad \left(\ 0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}\ \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}$.

$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{3}$ のとき $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x\right) dx$$

領域の面積は

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right)dx$$

$$=\left[-\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}$$

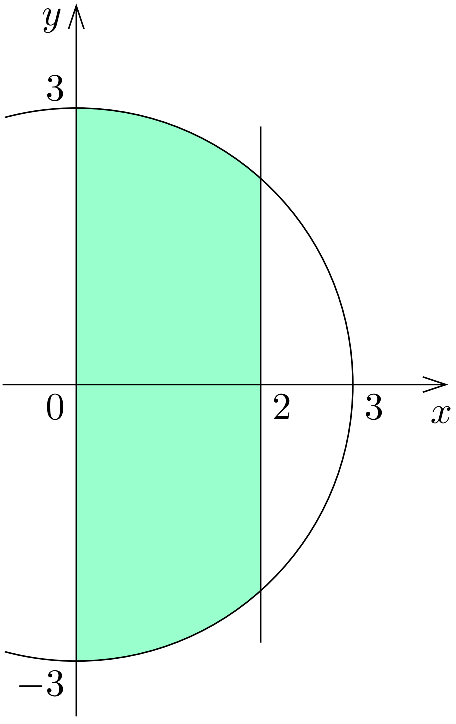
$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}+\frac{7\sqrt{3}\,\pi}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{1}{2}$$

$$=2+\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

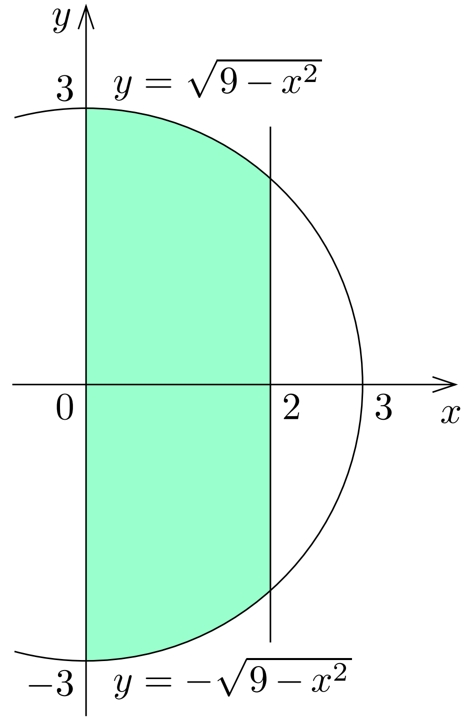
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2 \leq 9-x^2$ なので,

$$-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \ .$$



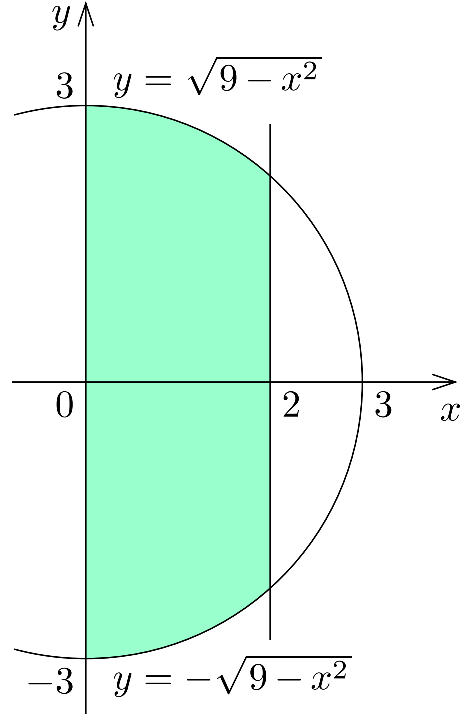
$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

　不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2 \leq 9-x^2$ なので,

$$-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \ .$$

従って, 不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積は

$$\int_0^2 \left\{\sqrt{9-x^2} - \left(-\sqrt{9-x^2}\right)\right\} dx$$
$$= \int_0^2 2\sqrt{9-x^2}\, dx$$
$$= 2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\, dx \ .$$



$9-x^2 \geq 0$ なので， $(x+3)(x-3) \leq 0$ ， $-3 \leq x \leq 3$ ．

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく.

$9-x^2 \geq 0$ なので, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. 変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく. $\sin t=\dfrac{x}{3}$ なので $x=3\sin t$.

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく．$\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t\ .$$

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$，$-3 \leq x \leq 3$．変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく．$\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t \ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\, dt$．

$9-x^2 \geq 0$ なので, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく. $\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$.

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t \ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\, dt$. $x = 0$ のとき $t = 0$. $x = 2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$.

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$，$-3 \leq x \leq 3$．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく．$\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t\ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\, dt$．$x=0$ のとき $t=0$．$x=2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$．領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\, dx = 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 3\cos t\, 3\cos t\, dt = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 t\, dt$$

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$，$-3 \leq x \leq 3$．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく．$\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t\ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\,dt$．$x = 0$ のとき $t = 0$．$x = 2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$．領域 D の面積は

$$\begin{aligned}
2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx &= 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 3\cos t\, 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 t\,dt \\
&= 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} (1+\cos 2t)\,dt = 9\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} \\
&= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\ .
\end{aligned}$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \qquad \sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

ここで，

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \ .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\ .$$

ここで，

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\ .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}\ .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{2}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \geq 0$ ，よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}\ .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right) \geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} .$$

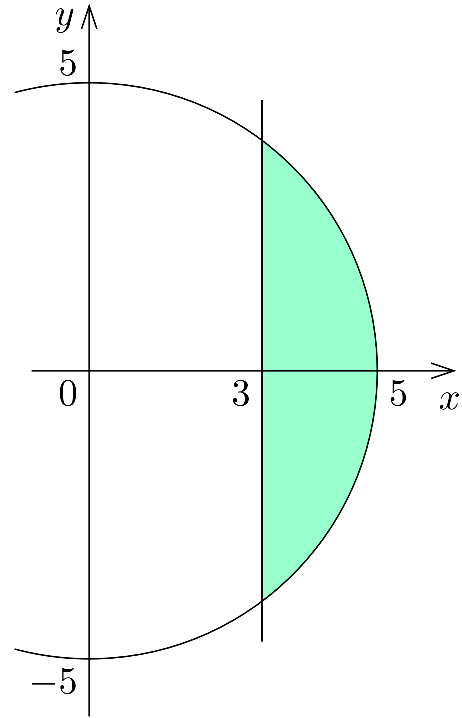
故に

$$9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 2\sqrt{5} .$$

領域 D の面積は $2\sqrt{5}+9\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である.

終

$\boxed{問8.1.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2+y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.



不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ より, $y^2 \leq 25-x^2$ なので,

$$\qquad \leq y \leq \qquad .$$

領域 D の面積は

$$\int_3^5 \{ \qquad - (\qquad) \} dx$$

$$= \int_3^5 \qquad dx$$

$25-x^2 \geq 0$ なので, $(x+ \quad)(x- \quad) \leq 0$,

$\leq x \leq \quad$. 変数 t を $t = \qquad$ とおく.

$\sin t = \qquad$ なので $x = \qquad$.

$\boxed{\text{問}8.1.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2 + y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

不等式 $x^2 + y^2 \leq 25$ より, $y^2 \leq 25 - x^2$ なので,

$$-\sqrt{25 - x^2} \leq y \leq \sqrt{25 - x^2} \ .$$

領域 D の面積は

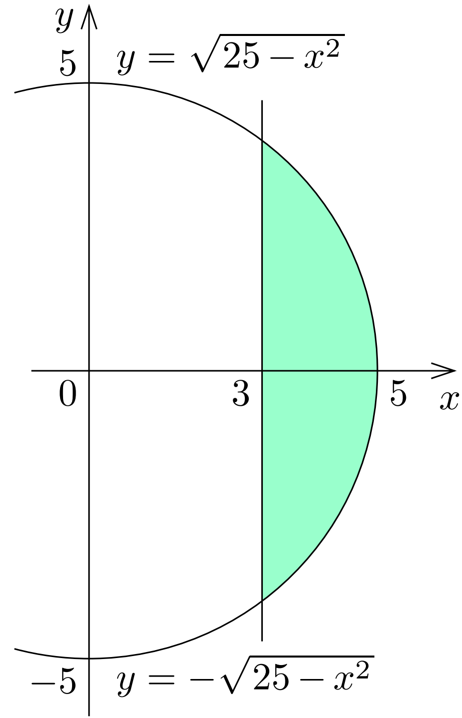
$$\int_3^5 \left\{ \sqrt{25 - x^2} - \left(-\sqrt{25 - x^2} \right) \right\} dx$$

$$= \int_3^5 2\sqrt{25 - x^2}\, dx = 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx$$

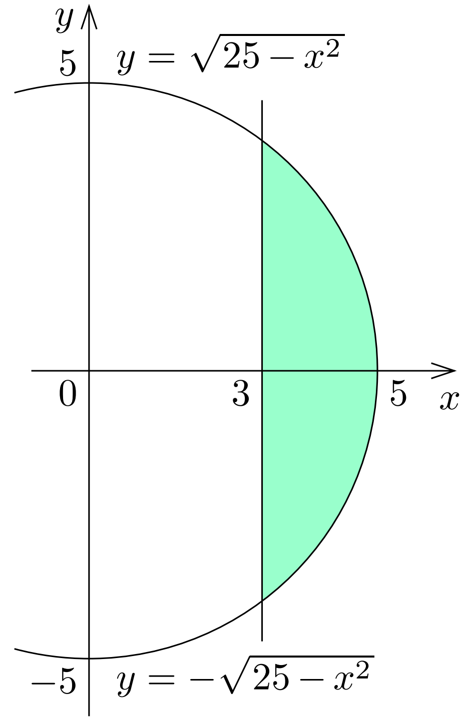
$25 - x^2 \geq 0$ なので, $(x + \quad)(x - \quad) \leq 0$,

$\quad \leq x \leq \quad$. 変数 t を $t = \qquad\qquad$ とおく.

$\sin t = \qquad$ なので $x = \qquad\qquad$.



$\boxed{問8.1.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2+y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.



　不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ より, $y^2 \leq 25-x^2$ なので,

$$-\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} .$$

領域 D の面積は

$$\int_3^5 \left\{\sqrt{25-x^2} - \left(-\sqrt{25-x^2}\right)\right\} dx$$
$$= \int_3^5 2\sqrt{25-x^2}\, dx = 2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\, dx$$

$25-x^2 \geq 0$ なので, $(x+5)(x-5) \leq 0$, $-5 \leq x \leq 5$. 変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく.

$\sin t = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$.

$25-x^2 \geq 0$ なので，$(x+5)(x-5) \leq 0$，$-5 \leq x \leq 5$．変数 t を $t=\sin^{-1}\frac{x}{5}$ とおく．$\sin t = \frac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$．　　$\leq \sin^{-1}\frac{x}{5} \leq$ 　　つまり　　$\leq t \leq$ 　　なので $\cos t$ 　 0．

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(\qquad)^2} = $$

$x=$ 　　　　より $\frac{dx}{dt}=$ 　　　　なので $dx=$ 　　　　．$x=3$ のとき $t=$ 　　　　．$x=5$ のとき $t=$ 　　．領域 D の面積は

$$2\int_3^5\sqrt{25-x^2}\,dx = 2\int \qquad\qquad dt = $$

$$= \qquad\qquad\qquad = $$

$$= \qquad\qquad\qquad -\frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right).$$

$25-x^2 \geq 0$ なので， $(x+5)(x-5) \leq 0$ ， $-5 \leq x \leq 5$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく． $\sin t = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25(1-\sin^2 t)} = 5\sqrt{\cos^2 t} = 5\cos t \ .$$

$x = 5\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 5\cos t$ なので $dx = 5\cos t\, dt$ ． $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ ． $x = 5$ のとき $t = \dfrac{\pi}{2}$ ．領域 D の面積は

$$2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\, dx = 2\int \qquad\qquad dt =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad -\frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) \ .$$

$25-x^2 \geq 0$ なので， $(x+5)(x-5) \leq 0$ ， $-5 \leq x \leq 5$ ． 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく． $\sin t = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25(1-\sin^2 t)} = 5\sqrt{\cos^2 t} = 5\cos t\ .$$

$x = 5\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 5\cos t$ なので $dx = 5\cos t\,dt$ ． $x=3$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ ． $x=5$ のとき $t = \dfrac{\pi}{2}$ ． 領域 D の面積は

$$\begin{aligned}
2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx &= 2\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 5\cos t\,5\cos t\,dt = 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt \\
&= 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = 25\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\ .
\end{aligned}$$

領域 D の面積は

$$2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$$
$$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{3}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right) \geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} .$$

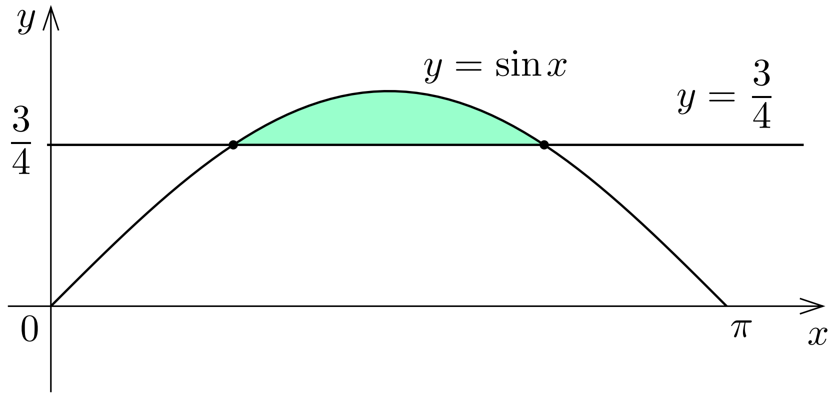
故に

$$\frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12 .$$

領域 D の面積は $\dfrac{25\pi}{2} - 12 - 25\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ である. $\boxed{\text{終}}$

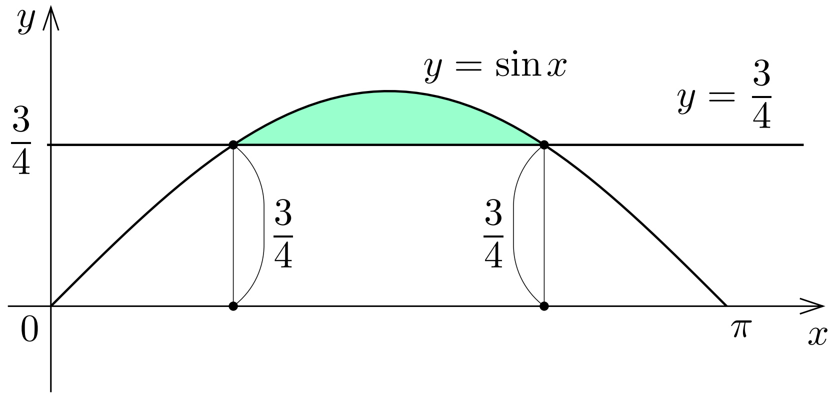
$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



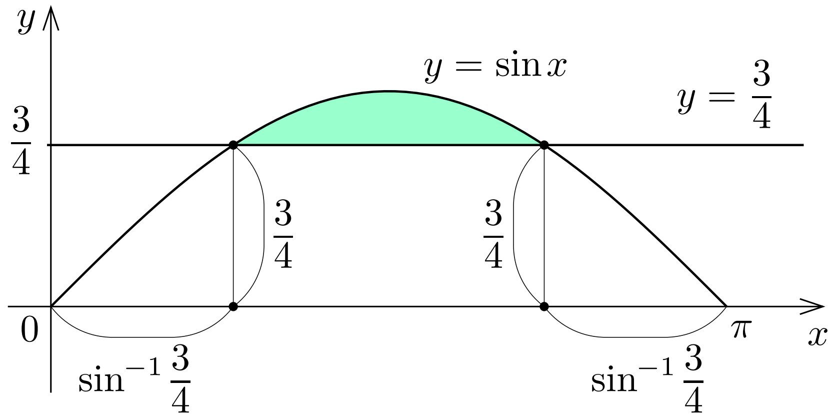
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

領域 D の点の x 座標の範囲を求める.



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

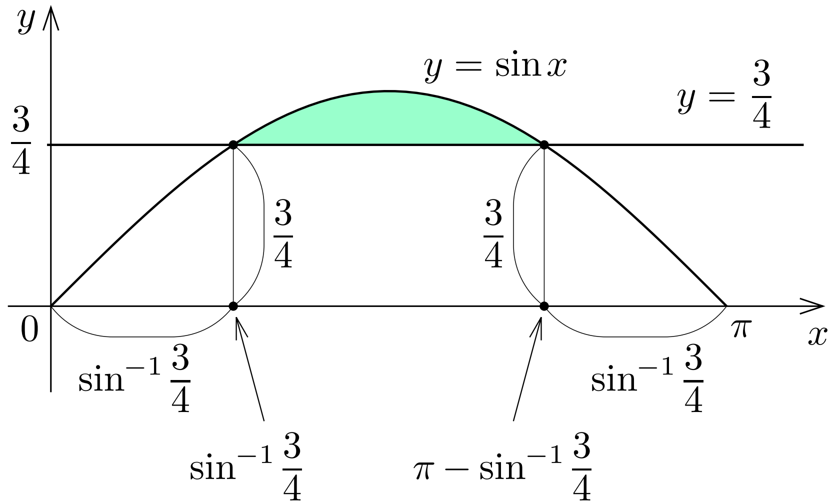
領域 D の点の x 座標の範囲を求める. xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと 直線 $y = \dfrac{3}{4}$ との共有点を考える.



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

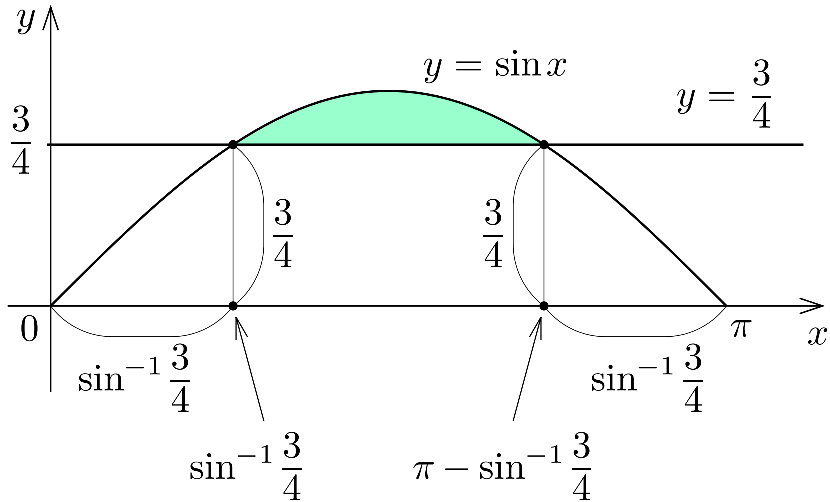
領域 D の点の x 座標の範囲を求める. xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと 直線 $y = \dfrac{3}{4}$ との共有点を考える.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{3}{4}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ である.



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

領域 D の点の x 座標の範囲を求める. xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと 直線 $y = \dfrac{3}{4}$ との共有点を考える.



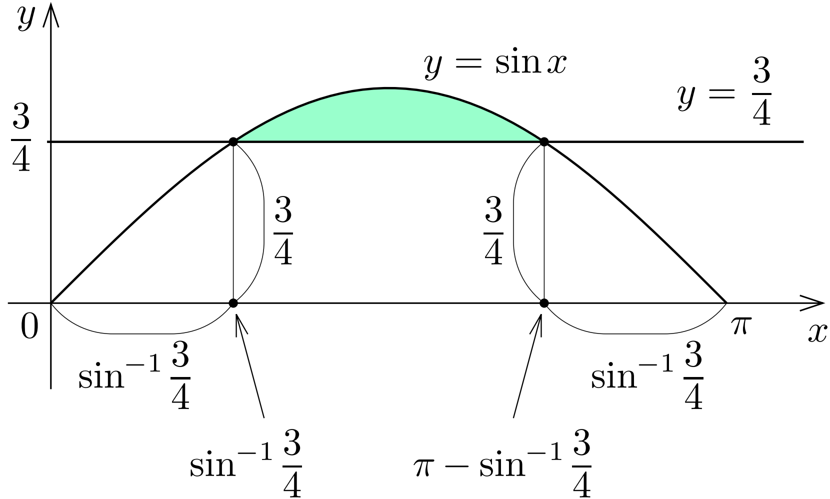
$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{3}{4}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$; この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$.

領域 D の点の

x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$.



領域 D の点の

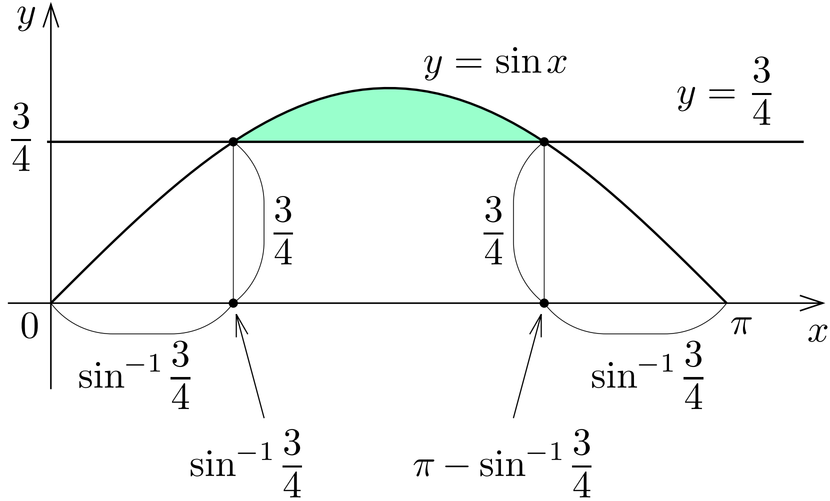
x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\frac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \frac{3}{4}$.

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$



領域 D の点の

x 座標の範囲は

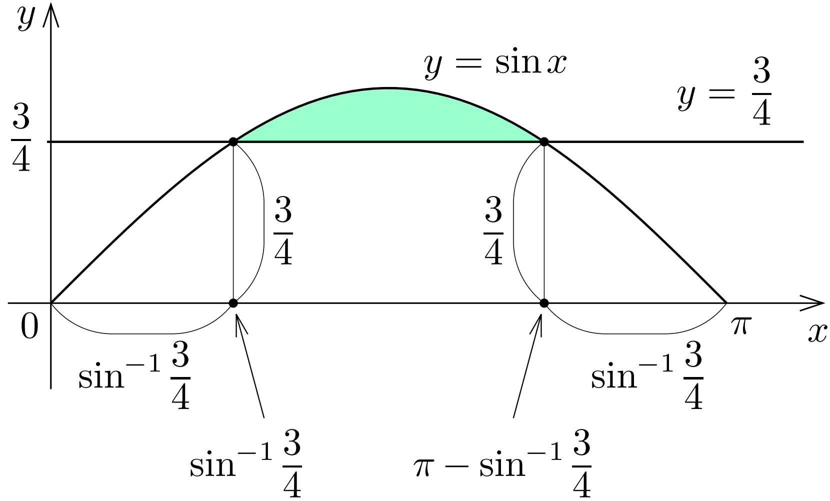
$\sin^{-1}\frac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \frac{3}{4}$.

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$



領域 D の点の

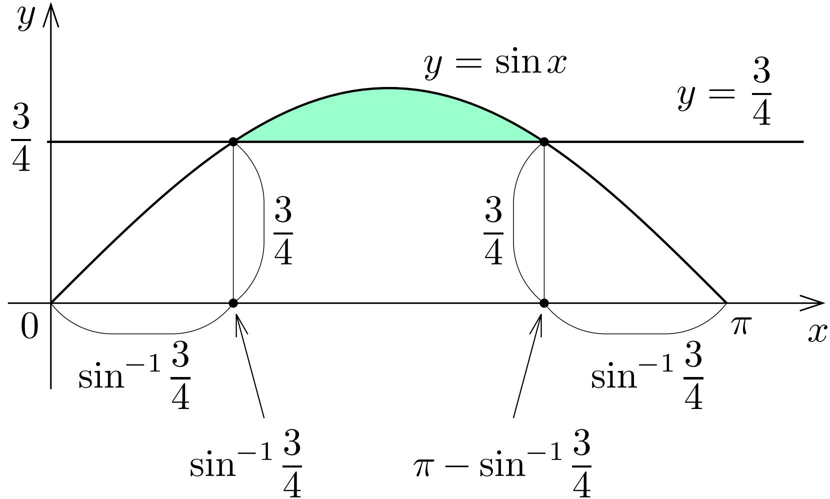
x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$.

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$



$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$

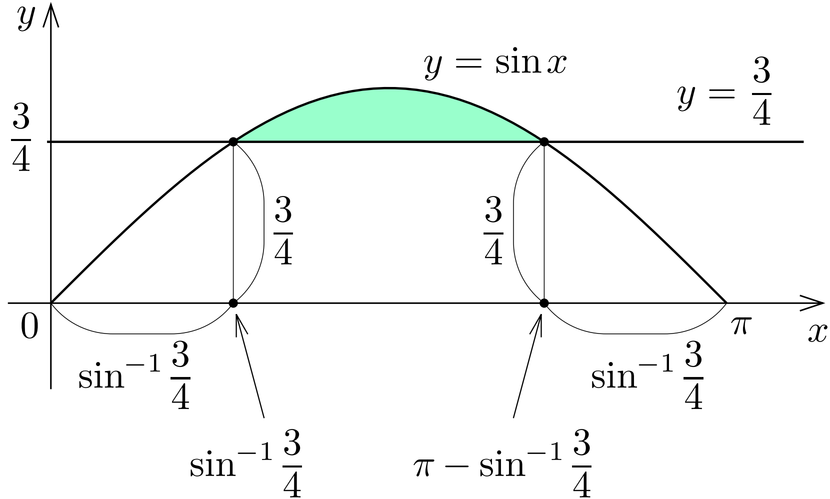
$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

領域 D の点の

x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$.



領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$\cos(\pi - a) = \cos(a - \pi) = -\cos a$

領域 D の点の

x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$.

領域 D の面積は

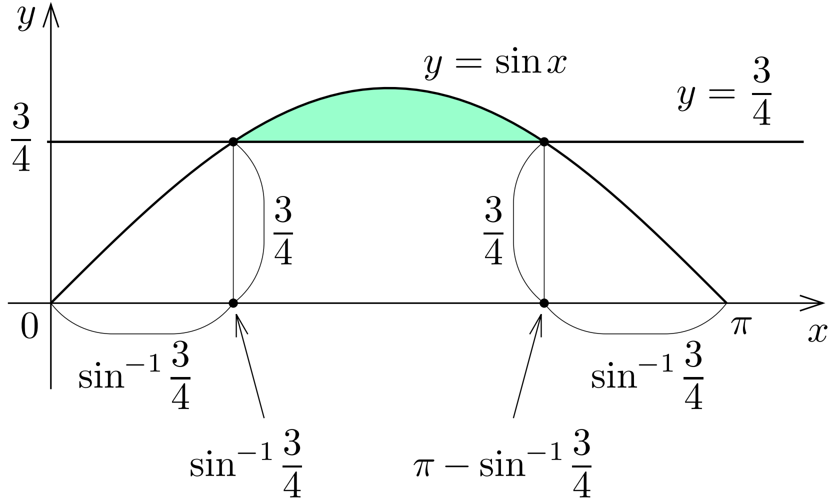
$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4} \ .$$



領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x - \frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4}\ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$ なので,

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4}\ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$ なので,

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}\ .$$

$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\frac{3}{4}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}\ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$ なので，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ .$$

$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\frac{3}{4}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\geq 0$ ， よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \ .$$

故に

$$\begin{aligned}2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} &= 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \ .\end{aligned}$$

領域 D の面積は $\dfrac{\sqrt{7}}{2} + \dfrac{3}{2}\sin^{-1}\dfrac{3}{4} - \dfrac{3\pi}{4}$ である. 終

$\boxed{問}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\frac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \frac{2}{3}$ の解は　　　　と　　　　である. 領域 D の点の x 座標の範囲は　　　　$\leq x \leq$　　　　; この範囲で $\sin x$ 　 $\frac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int \qquad \left(\qquad \right) dx =$$

$\boxed{\text{問}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\frac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \frac{2}{3}$ の解は $\sin^{-1}\frac{2}{3}$ と $\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\frac{2}{3} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}$; この範囲で $\sin x \geq \frac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int \qquad\qquad \Big(\qquad\qquad \Big) dx =$$

$\boxed{問}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$; この範囲で $\sin x \geq \dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}} \left(\sin x - \frac{2}{3}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{2}{3}x\right]_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$\boxed{問}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$; この範囲で $\sin x \geq \dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}} \left(\sin x - \frac{2}{3}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{2}{3}x\right]_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3} - \frac{2\pi}{3} \ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}\left(\sin x-\frac{2}{3}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3} .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$ を計算する. $\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$ なので,

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} .$$

$-\frac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\frac{2}{3}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{9} .$$

故に

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3} &= 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3} . \end{aligned}$$

領域 D の面積は $\dfrac{2\sqrt{5}}{3} + \dfrac{4}{3}\sin^{-1}\dfrac{2}{3} - \dfrac{2\pi}{3}$ である.

$\boxed{終}$