8.1 平面領域の面積

定積分の定義を復習する.

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n = \qquad\qquad\qquad\qquad$$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = \quad$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，リーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \qquad\qquad$.

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく．S_n を表す式を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，リーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する： $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない.

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

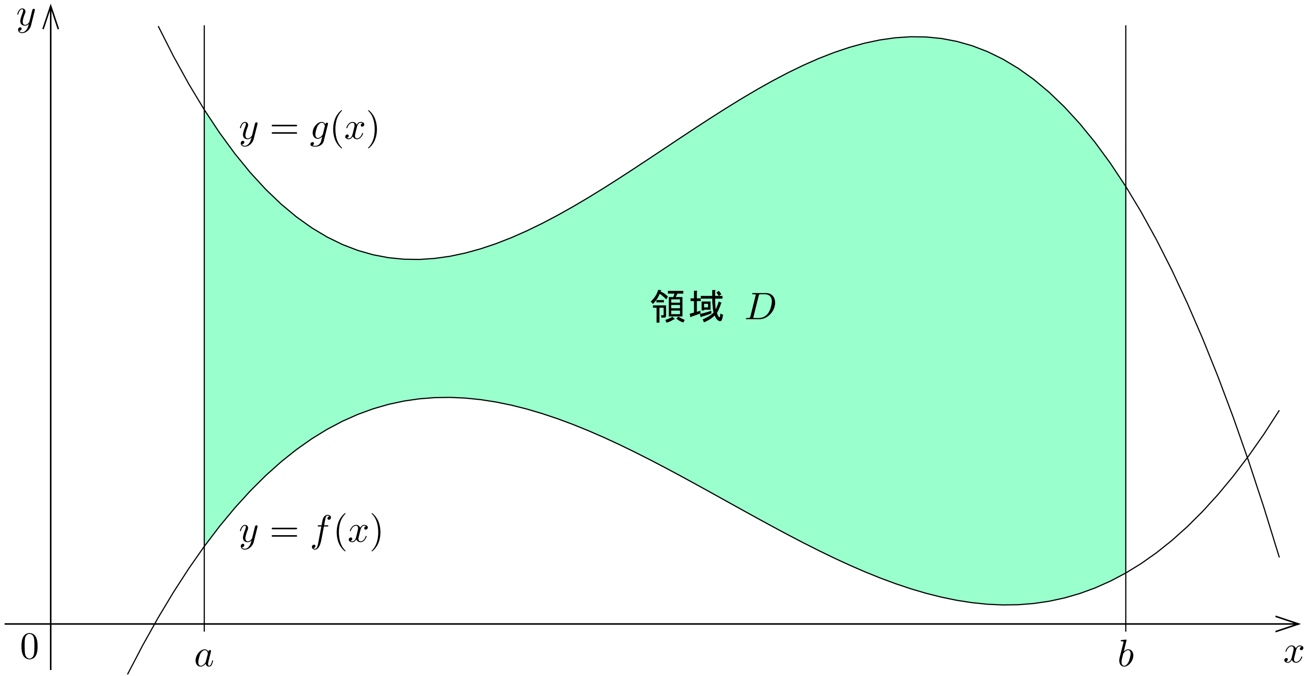
そこで，関数 f の定積分を計算するために，f のリーマン和として $\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ をしばしば用いる．

実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において，連立不等式

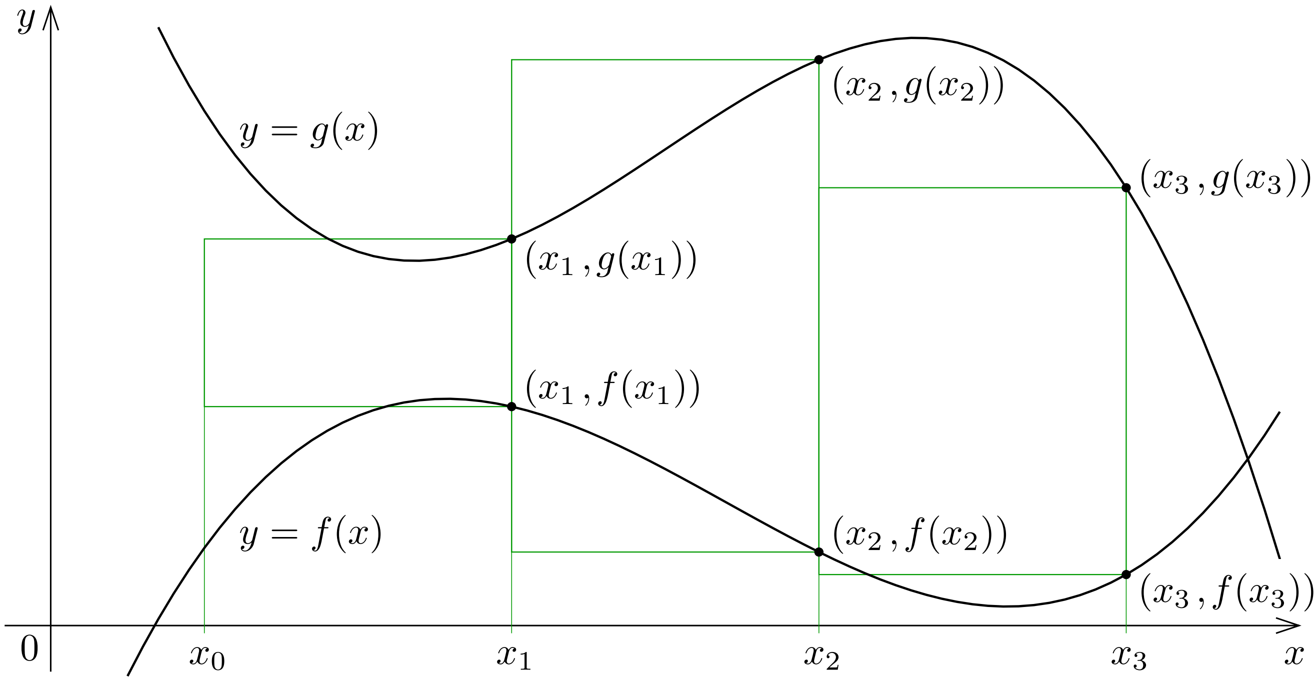
$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

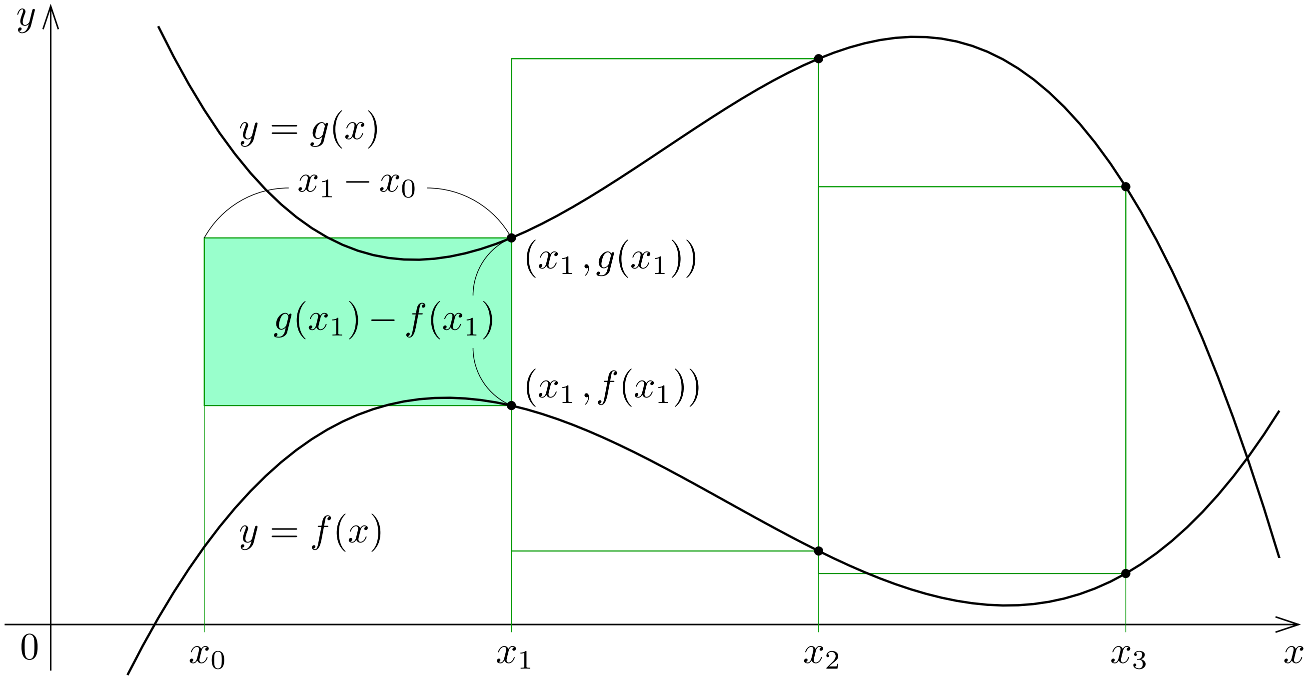
で表される領域を D の面積を考える．

例えば領域 D が下図の明緑色の図形であるとする.



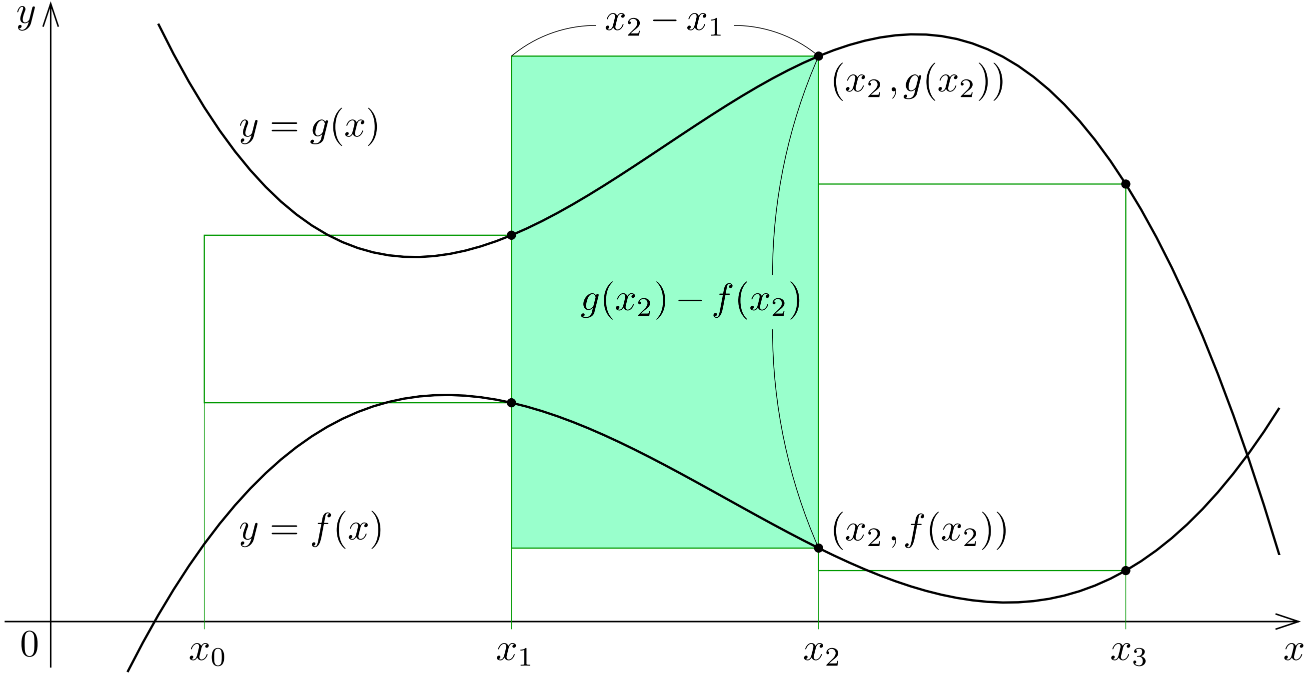
$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = b$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 に対して下図の状況を考える.





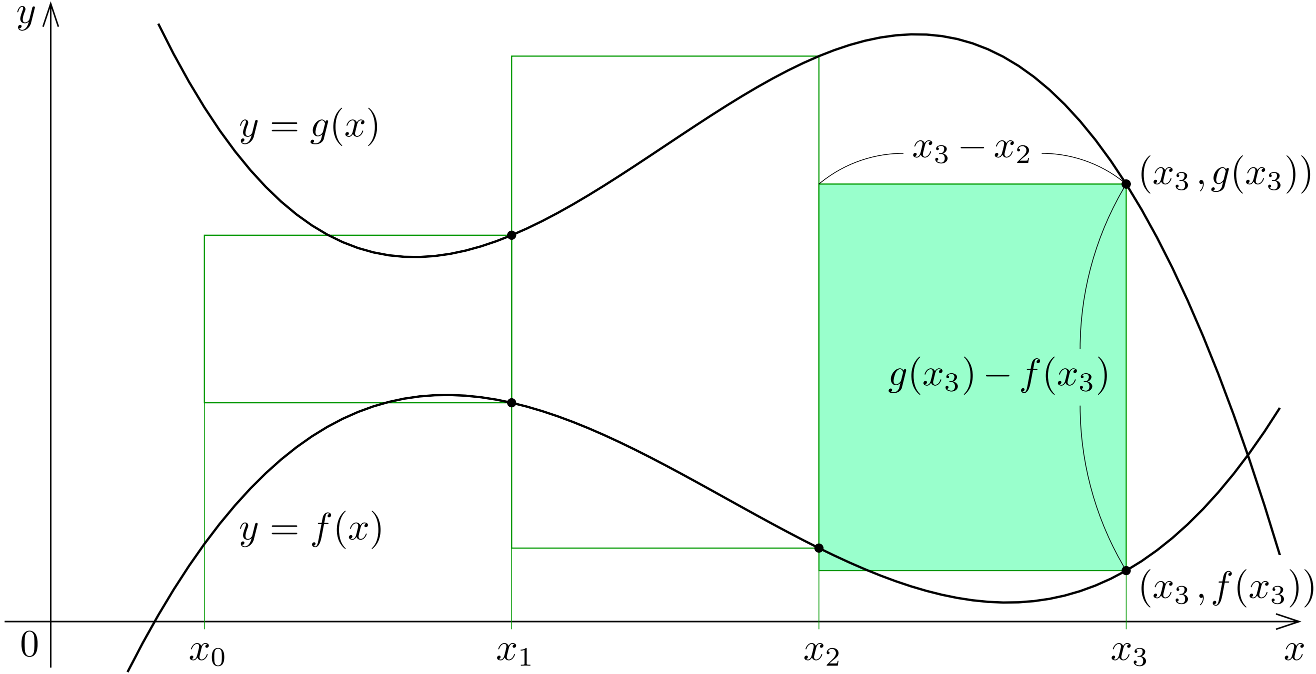
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0)\ .$$



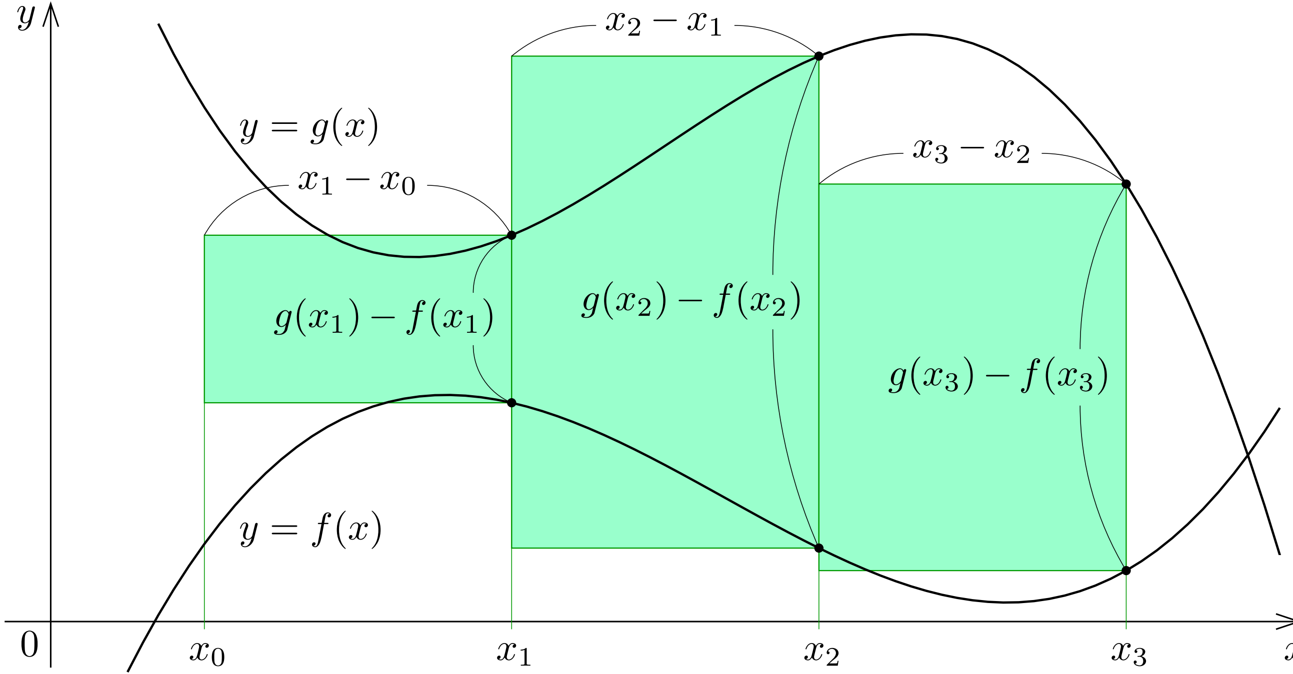
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1)\ .$$



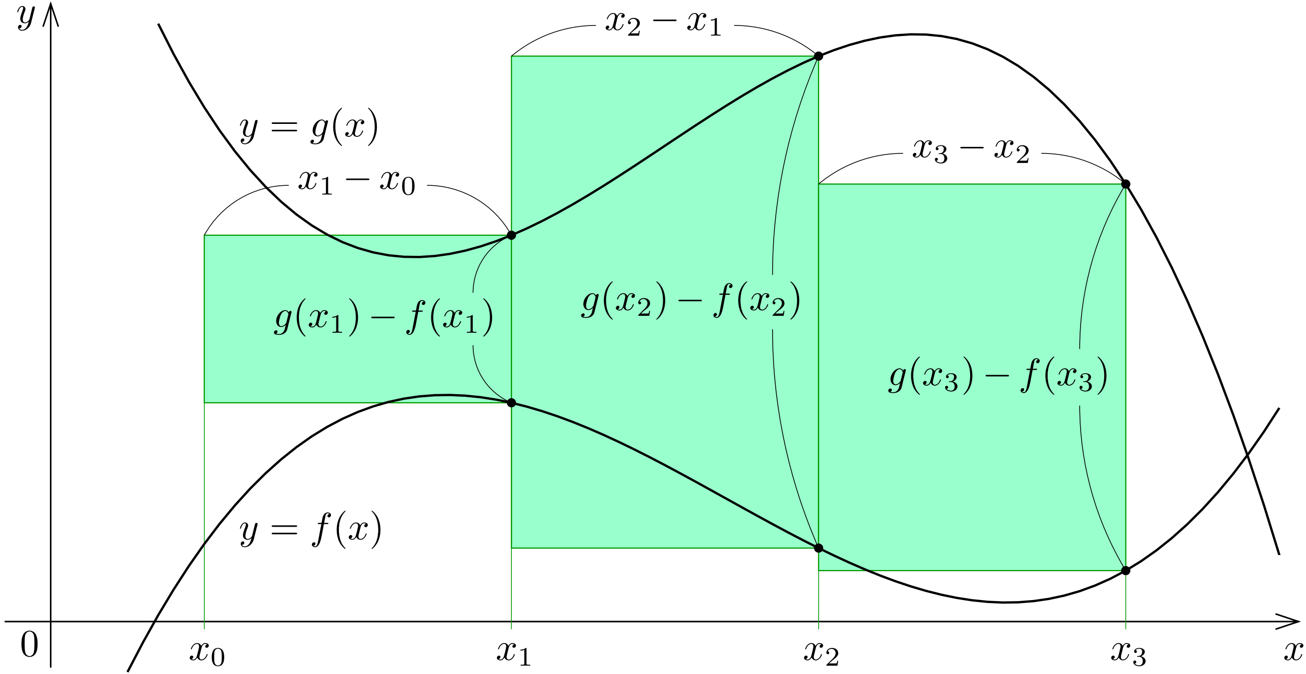
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)\ .$$



上図の 3 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積は

$$\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0) + \{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1) + \{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)\ .$$



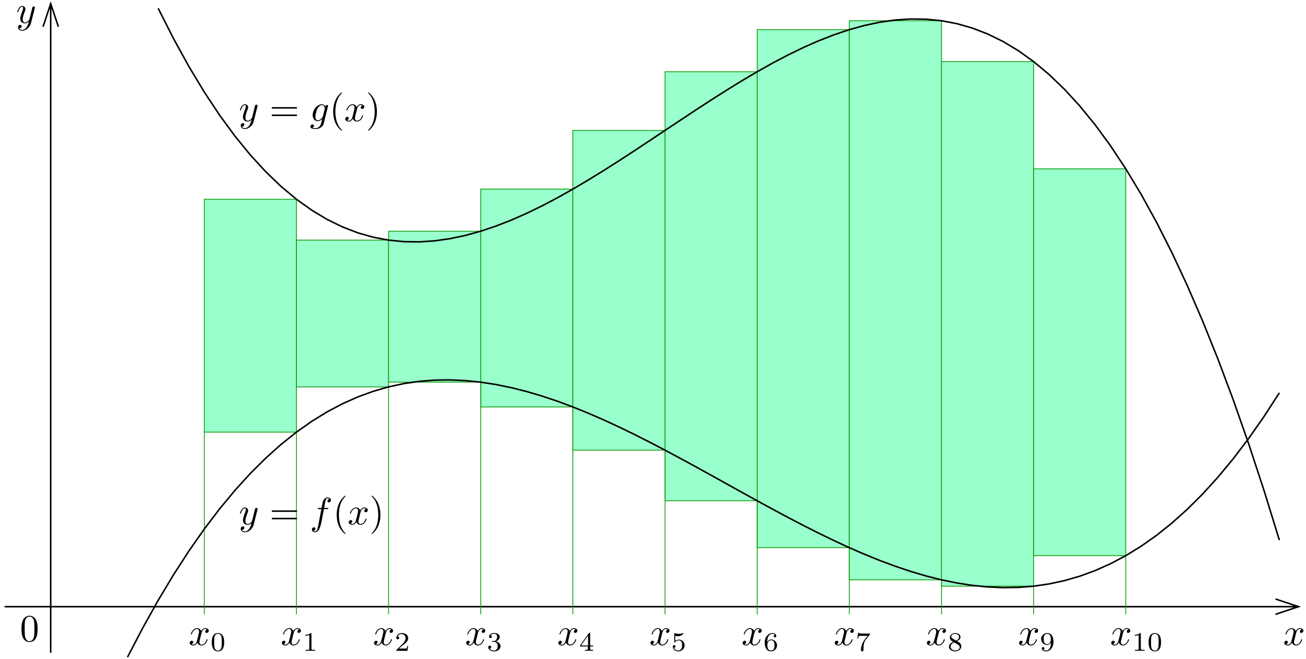
上図の 3 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_3 は

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right] .$$

長方形の個数を 10 にする.

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9 \leq x_{10} = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_9, x_{10}$ をとり，領域 D の面積を 10 個の長方形を併せた図形の面積で近似する.



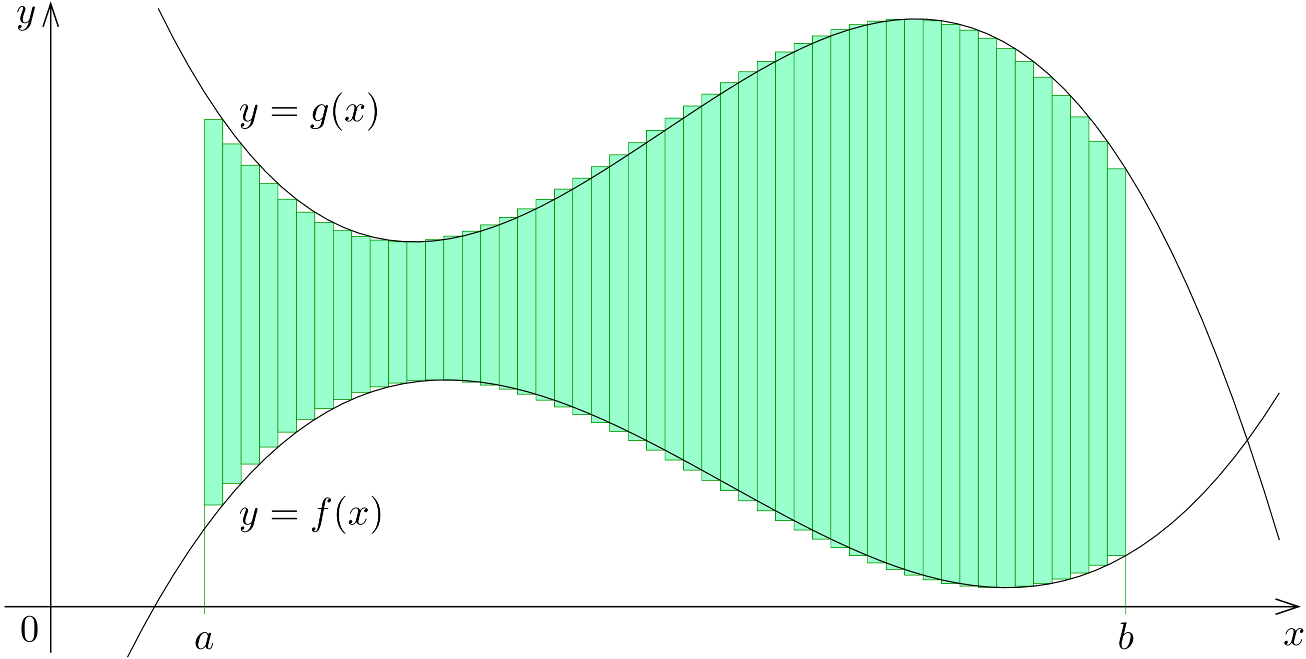
上図の 10 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_{10} は

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right] .$$

長方形の個数を 50 にする.

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{49} \leq x_{50} = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{49}, x_{50}$ をとり，領域 D の面積を 50 個の長方形を併せた図形の面積で近似する.



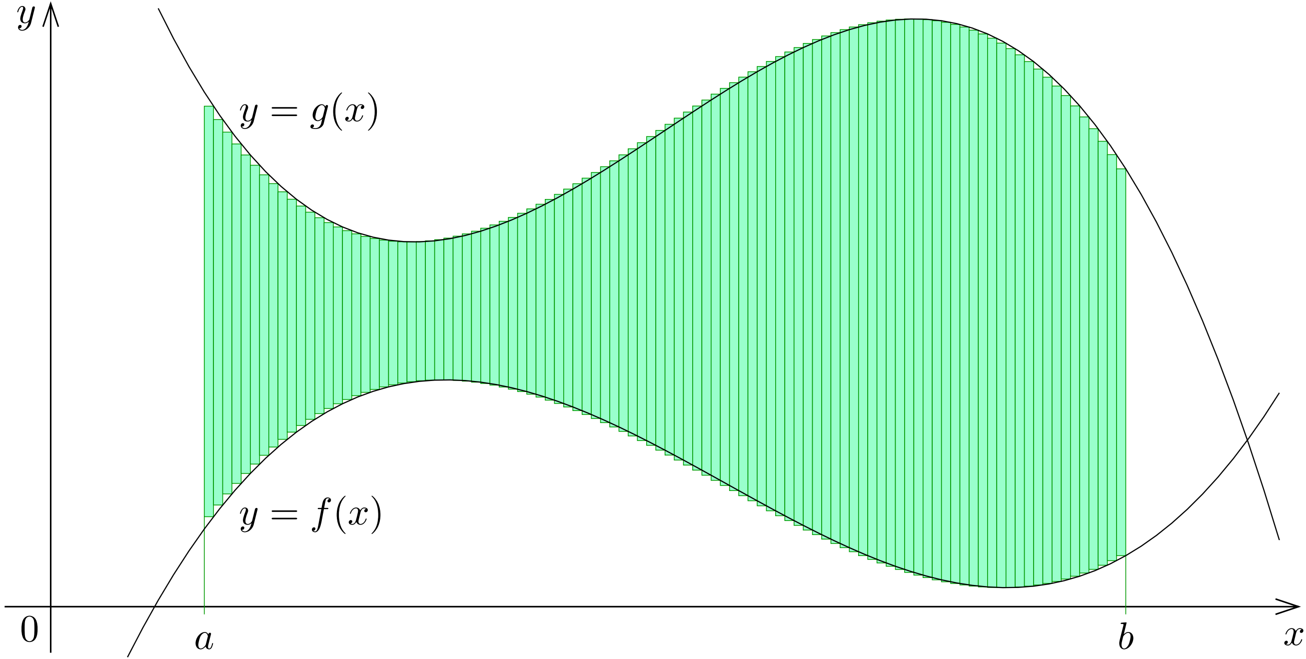
上図の 50 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_{50} は

$$S_{50} = \sum_{k=1}^{50} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right] .$$

長方形の個数を 100 にする.

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{99} \leq x_{100} = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{99}, x_{100}$ をとり，領域 D の面積を 100 個の長方形を併せた図形の面積で近似する.



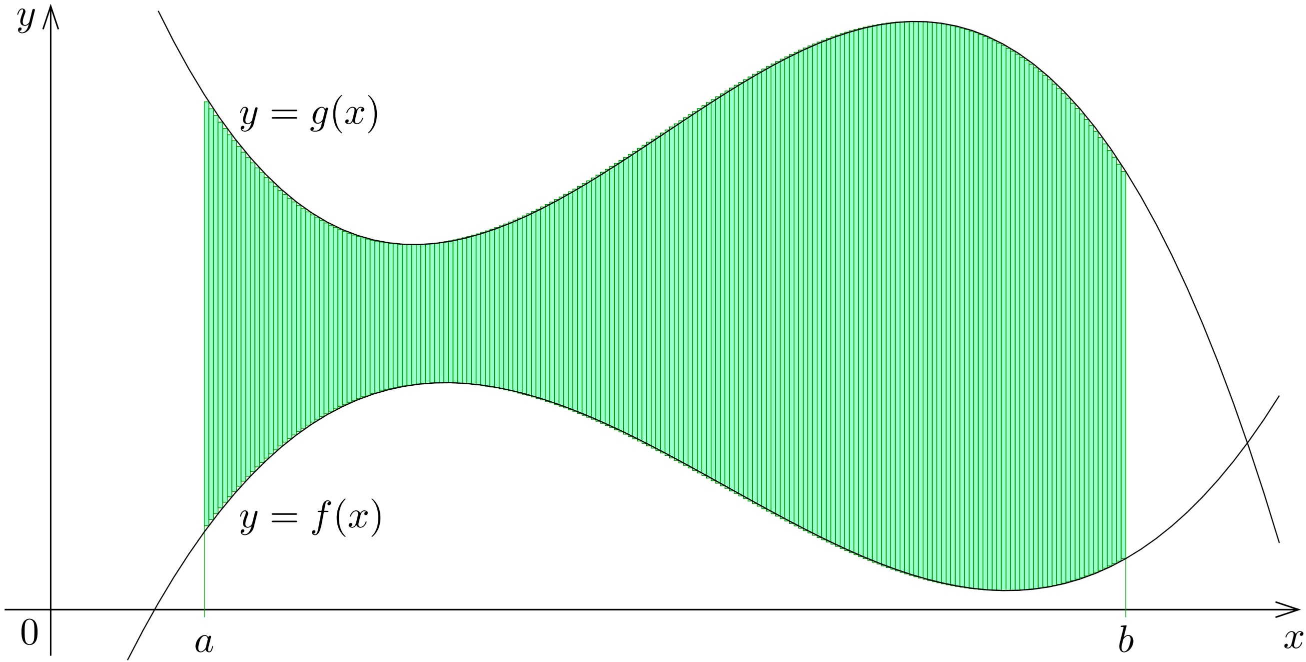
上図の 100 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_{100} は

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \left[\{g(x_k) - f(x_k)\} (x_k - x_{k-1}) \right] .$$

長方形の個数を 200 にする.

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{199} \leq x_{200} = b$$

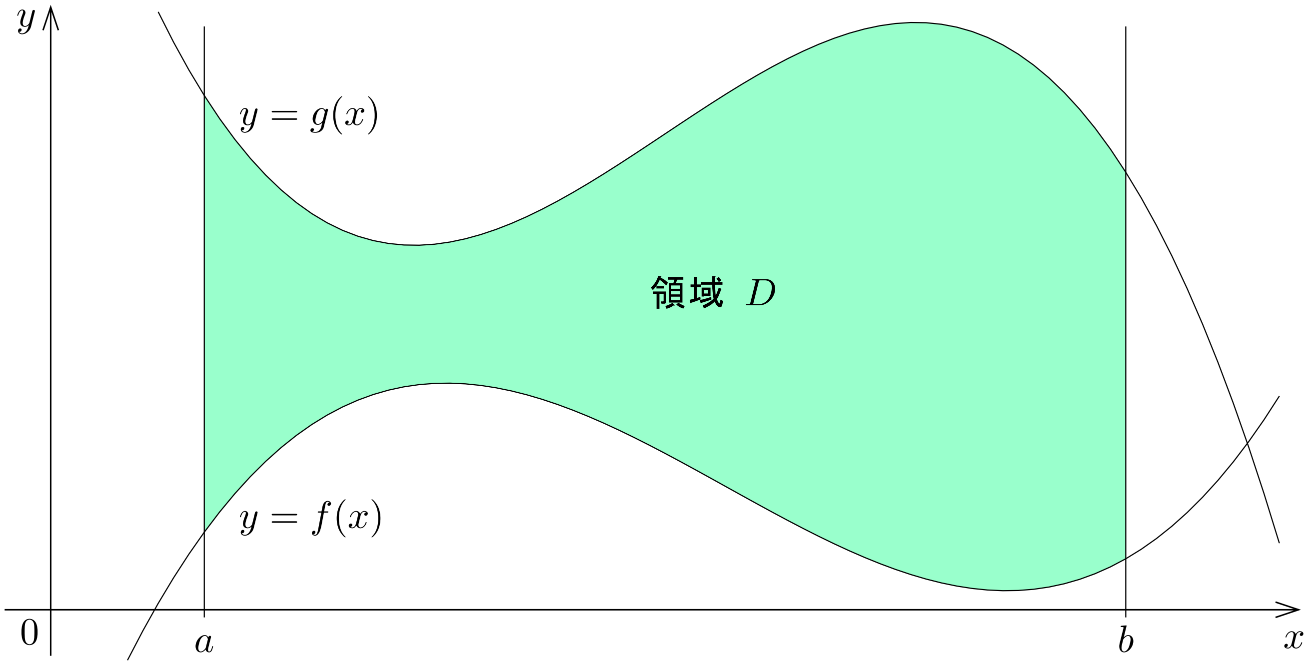
である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{199}, x_{200}$ をとり, 領域 D の面積を 200 個の長方形を併せた図形の面積で近似する.



上図の 200 個の長方形を併せた図形（明緑色の部分の図形）の面積 S_{200} は

$$S_{200} = \sum_{k=1}^{200}\left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})\right] .$$

このようにして長方形の個数を限りなく増やしていくと，長方形を併せた図形の面積は元の領域 D の面積に限りなく近づく．



正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ をとる．これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right] \,.$$

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる. これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})\right] .$$

これは関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和である.

　正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right] .$$

これは関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和である．

$$\delta_n = \max\{ x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} \}$$

について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_{n-1} , x_n$ をとる．これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right] .$$

これは関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和である．

$$\delta_n = \max\{ x_1 - x_0 , x_2 - x_1 , x_3 - x_2 , \ldots , x_n - x_{n-1} \}$$

について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする．長方形の個数 n を限りなく大きくして一つ一つの長方形を限りなく細くすると，n 個の長方形を併せた図形の面積 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right]$ は領域 D の面積に限りなく近づく．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとる．これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right] .$$

これは関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和である．

$$\delta_n = \max\{ x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1} \}$$

について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする．長方形の個数 n を限りなく大きくして一つ一つの長方形を限りなく細くすると，n 個の長方形を併せた図形の面積 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(x_k) - f(x_k) \} (x_k - x_{k-1}) \right]$ は領域 D の面積に限りなく近づく．よって領域 D の面積はリーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n \to \infty} S_n$ である．

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k)-f(x_k)\} (x_k - x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である.

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である．

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}dx\ .$$

領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\int_a^b\{g(x)-f(x)\}\,dx\ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(x)-f(x)$ の定積分 $\int_a^b\{g(x)-f(x)\}\,dx$ である．

　このようにして次の定理が成り立つ．

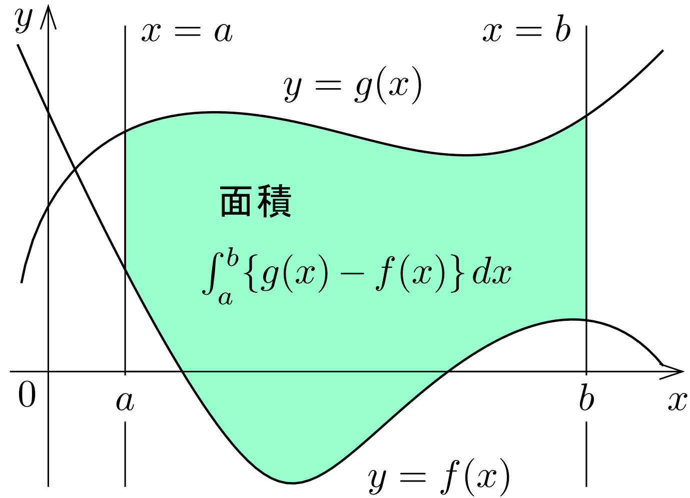
定理　実数 a と b について $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

である．



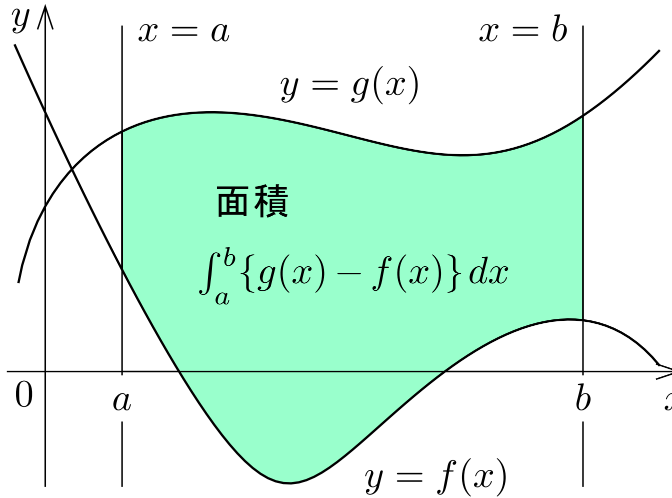
定理　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\}\,dx$$

である．

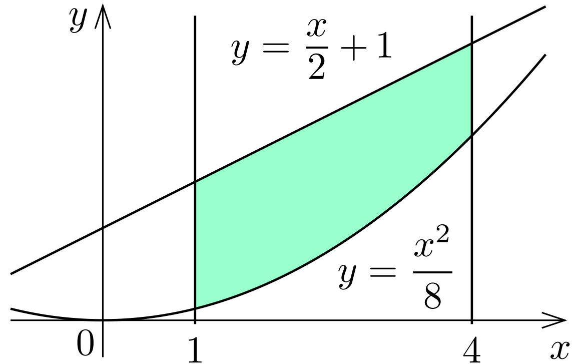


この定理を用いる際には，領域の点の x 座標の範囲と，その範囲で $f(x) \leq g(x)$ であるかどうかに注意すること．

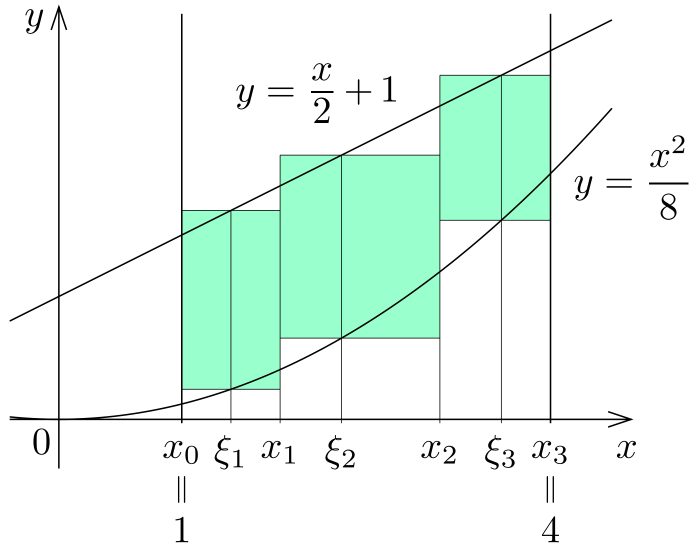
$\boxed{問 8.1.1}$ xy 座標平面において連立不等式

$$1 \leq x \leq 4 \quad かつ \quad \frac{x^2}{8} \leq y \leq \frac{x}{2}+1$$

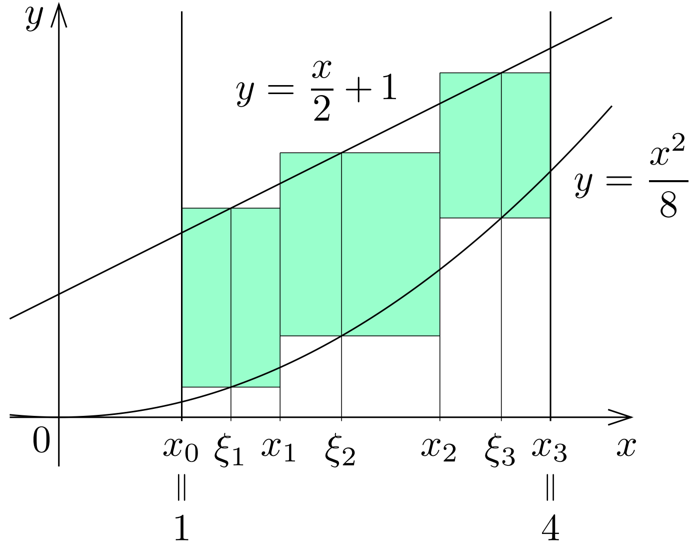
で表される領域 D の面積を求める.



(1) 　$1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$ である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して，右図の網掛けされた 3 個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記せ．



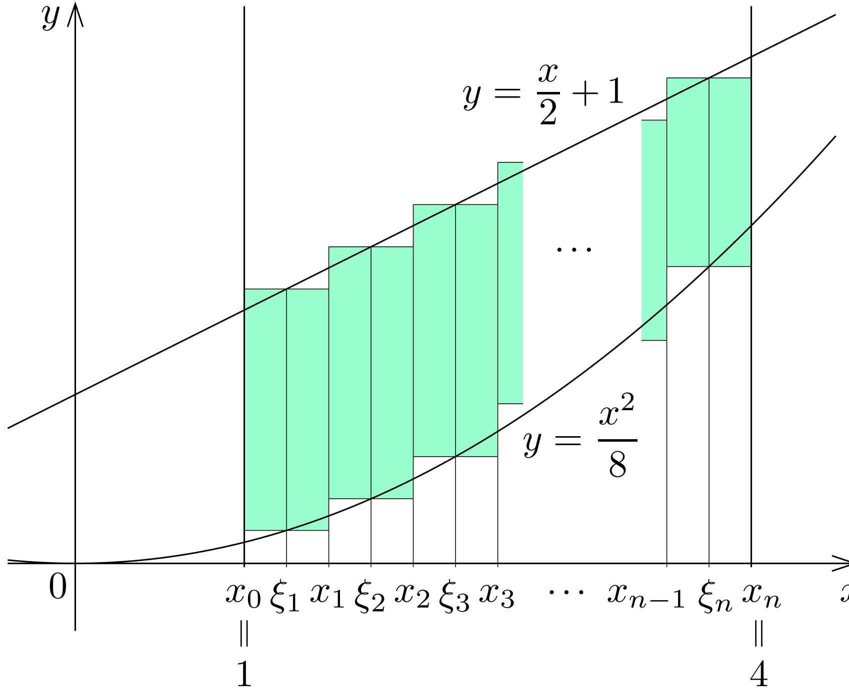
(1) $1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$ である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して，右図の網掛けされた 3 個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記せ．



$$S_3 = \left(\frac{\xi_1}{2} + 1 - \frac{{\xi_1}^2}{8}\right)(x_1 - x_0) + \left(\frac{\xi_2}{2} + 1 - \frac{{\xi_2}^2}{8}\right)(x_2 - x_1) + \left(\frac{\xi_3}{2} + 1 - \frac{{\xi_3}^2}{8}\right)(x_3 - x_2)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\xi_k}{2} + 1 - \frac{{\xi_k}^2}{8}\right)(x_k - x_{k-1}) \ .$$

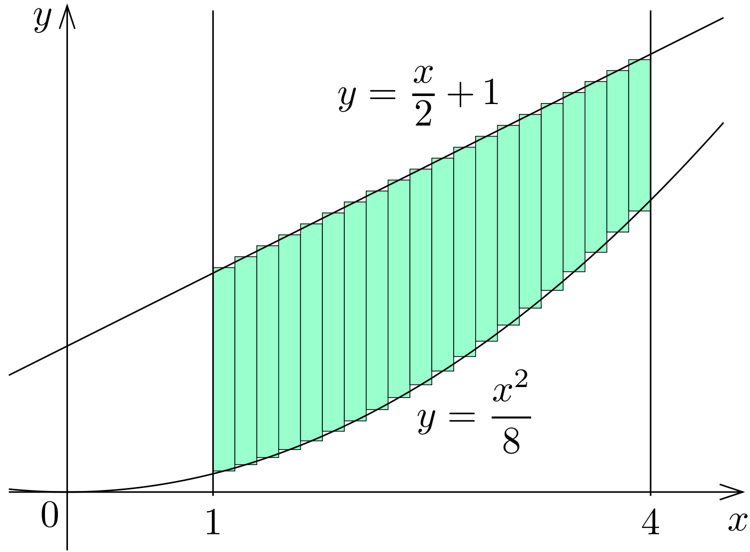
(2)　変数 n を正の自然数とする． $1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ に対して，右図のような網掛けされた n 個の長方形を併せた領域の面積 S_n を表す式を記せ．またこの式を何というか記せ．



$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\xi_k}{2} + 1 - \frac{{\xi_k}^2}{8} \right) (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\dfrac{x}{2} + 1 - \dfrac{x^2}{8}$ のリーマン和である.

(3) $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする；つまり $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に限りなく近付くとする． $n \to \infty$ のとき S_n は右図のように領域 D の面積に限りなく近付く；つまり S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が領域 D の面積になる．このことを用いて，定積分によって領域 D の面積を求めよ．

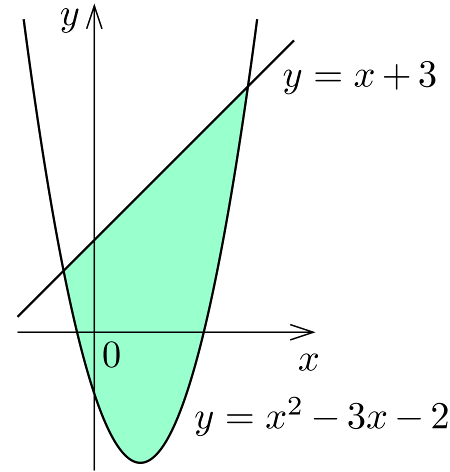


$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ なので，関数 $\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{x^2}{8}$ のリーマン和 S_n は定積分 $\displaystyle\int_1^4\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{8}\right)dx$ に収束する．領域 D の面積は

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \int_1^4\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{8}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2+x-\frac{1}{24}x^3\right]_1^4 = \frac{33}{8}\ .$$

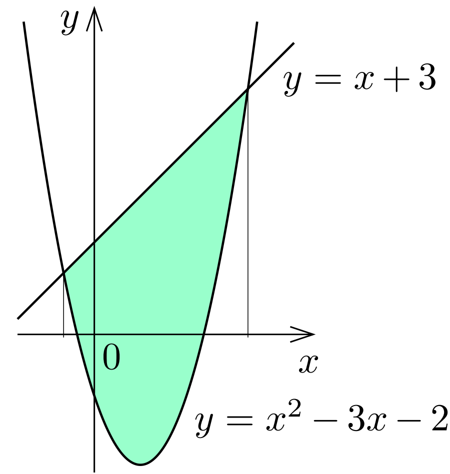
$\boxed{\text{終}}$

例 xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.

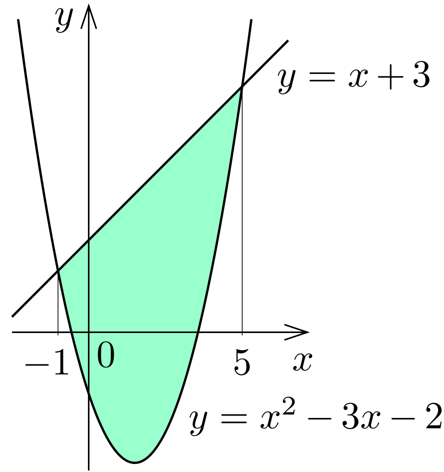


例 xy 座標平面において関数 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.

まず, $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める.



$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.



まず, $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める. $x^2-3x-2=x+3$ とすると,

$$x^2-4x-5=0\ ,$$

$$(x+1)(x-5)=0\ ,$$

$$x=-1,5\ .$$

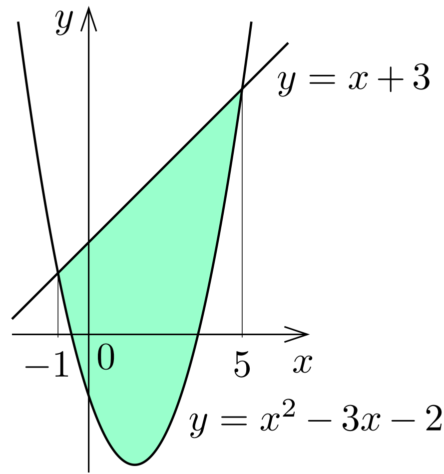
例 xy 座標平面において関数 $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.

まず, $y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める. $x^2-3x-2=x+3$ とすると,

$$x^2-4x-5=0\ ,$$

$$(x+1)(x-5)=0\ ,$$

$$x=-1,5\ .$$



$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 個である. $-1\leq x\leq 5$ のとき $x^2-3x-2\leq x+3$.

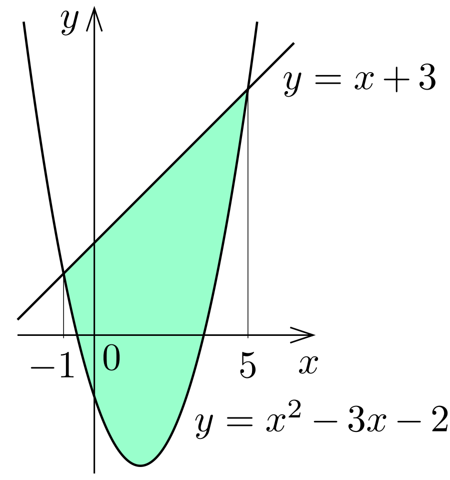
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.

まず, $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める. $x^2 - 3x - 2 = x + 3$ とすると,

$$x^2 - 4x - 5 = 0 \ ,$$

$$(x+1)(x-5) = 0 \ ,$$

$$x = -1, 5 \ .$$



$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 個である. $-1 \leq x \leq 5$ のとき $x^2 - 3x - 2 \leq x + 3$. 従って, $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\int_{-1}^{5} \{(x+3) - (x^2 - 3x - 2)\}\,dx = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)\,dx$$

$y=x^2-3x-2$ のグラフと $y=x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5}\{(x+3)-(x^2-3x-2)\}\,dx &= \int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^{5} \\ &= -\frac{125}{3}+50+25-\left(\frac{1}{3}+2-5\right) \\ &= 36\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問8.1.2}$ xy 座標平面において関数 $y=9-x^2$ のグラフと $y=1-2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.

方程式 $9-x^2=1-2x$ を解くと, $\qquad\qquad =0$, $(x \qquad)(x \qquad)=0$,
$x= \quad , \quad$. $\qquad \le x \le \qquad$ のとき $9-x^2 \qquad 1-2x$. 従って求める面積は

$$\int \quad \{(\qquad\qquad)-(\qquad\qquad)\}dx=$$

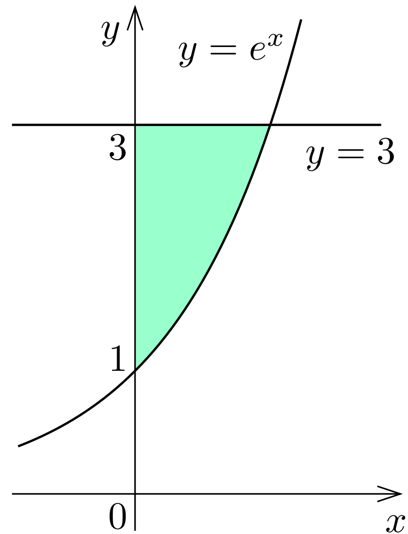
$\boxed{問8.1.2}$ xy 座標平面において関数 $y=9-x^2$ のグラフと $y=1-2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めよ.

方程式 $9-x^2=1-2x$ を解くと, $x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$, $x=4,-2$. $-2\leq x\leq 4$ のとき $9-x^2\geq 1-2x$. 従って求める面積は

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{4}\{(9-x^2)-(1-2x)\}\,dx &= \int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^{4} \\ &= 36\ .\end{aligned}$$

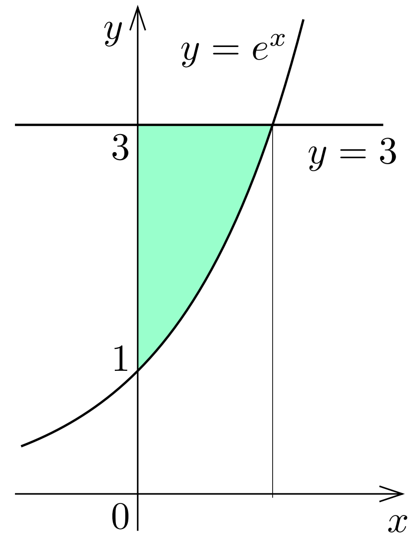
$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

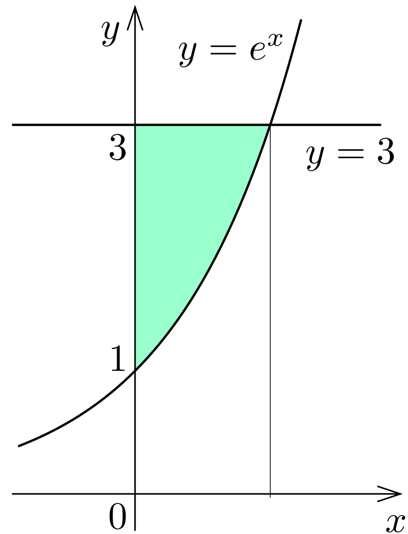


$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める.



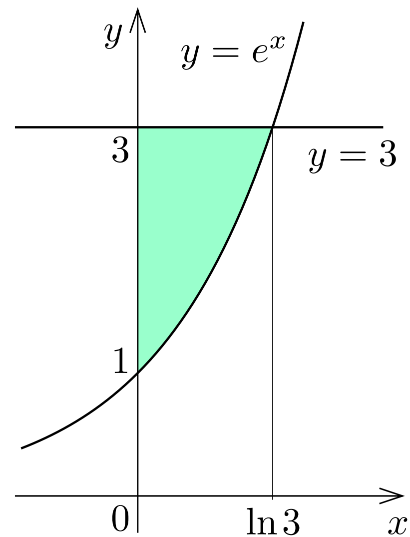
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める. $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると, $e^x=3$ なので $x=\ln 3$.

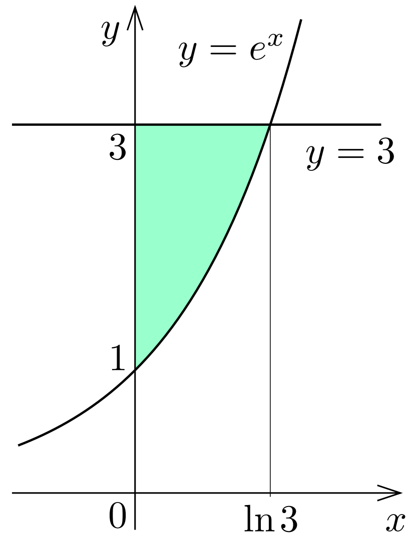
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標を求める. $y = e^x$ かつ $y = 3$ とすると, $e^x = 3$ なので $x = \ln 3$. 関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である.

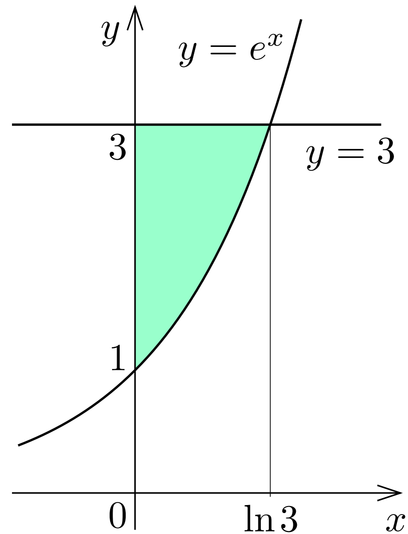


$\boxed{例}$ xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標を求める. $y = e^x$ かつ $y = 3$ とすると, $e^x = 3$ なので $x = \ln 3$. 関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である. D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり, このとき $e^x \leq e^{\ln 3} = 3$.



例 xy 座標平面において指数関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める．



まず関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標を求める． $y=e^x$ かつ $y=3$ とすると， $e^x=3$ なので $x=\ln 3$ ． 関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である． D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり，このとき $e^x \leq e^{\ln 3}=3$ ．領域 D の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 3}(3-e^x)\,dx &= \left[3x-e^x\right]_0^{\ln 3} \\ &= 3\ln 3-e^{\ln 3}-(-1) \\ &= \ln 3^3-3+1 \\ &= \ln 27-2\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問 8.1.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.

$\ln x = 2$ とすると $x = \quad < 9$. $x \geq \quad$ のとき $\ln x \geq \ln \quad = \quad$. 領域 D の面積は

$$\int^{9} (\qquad\qquad) \, dx =$$

$\boxed{\text{問}8.1.3}$ xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めよ.

$\ln x = 2$ とすると $x = e^2 < 9$. $x \geq e^2$ のとき $\ln x \geq \ln e^2 = 2$. 領域 D の面積は

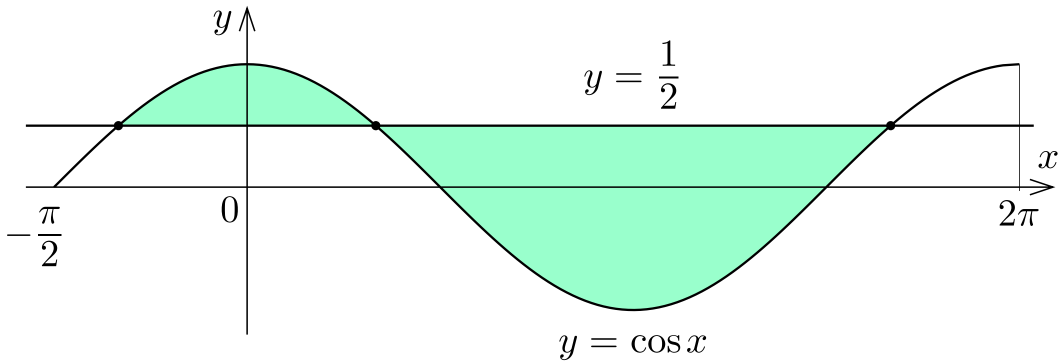
$$\int_{e^2}^{9} (\ln x - 2)\, dx = \Big[x \ln x - 3x \Big]_{e^2}^{9} = 9 \ln 9 - 27 - e^2 \ln e^2 + 3e^2$$

$$= 9 \ln 9 + e^2 - 27 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

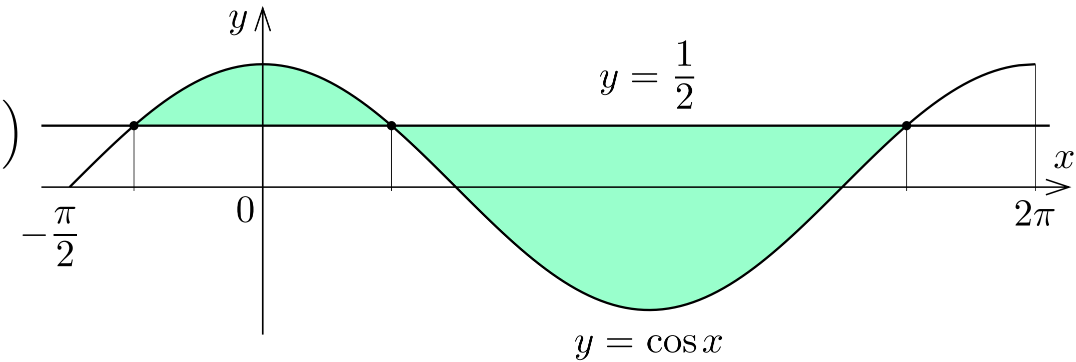
$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.



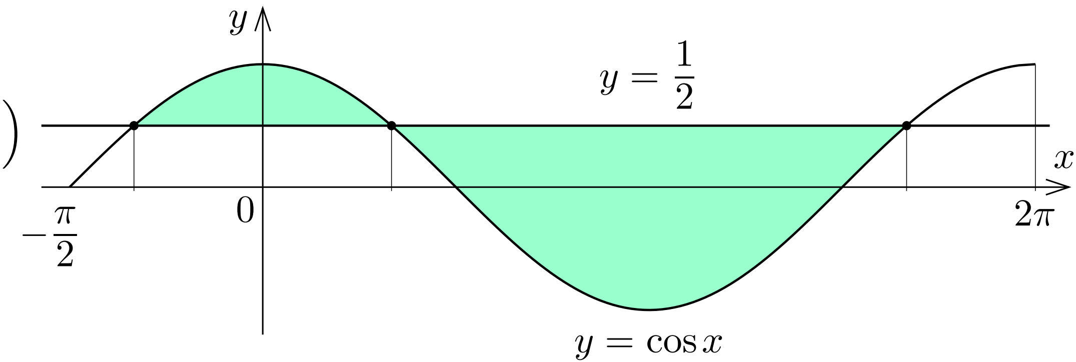
$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

まず関数 $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

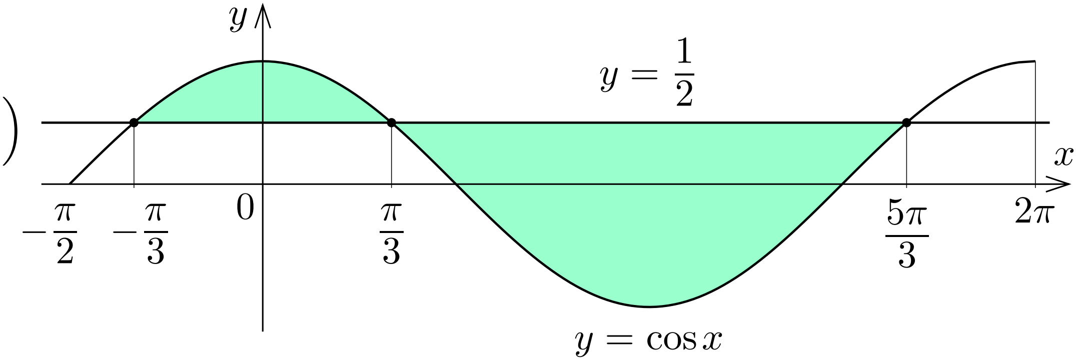
まず関数 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



$\cos x=\dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq 2\pi$ とすると, $x=$ 　, 　, 　.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = \cos x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

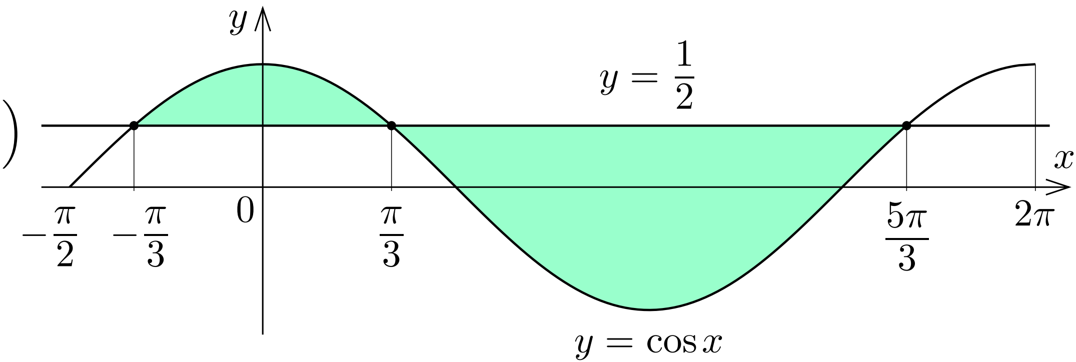
まず関数 $y = \cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



$\cos x = \dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 2\pi$ とすると, $x = -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$. $-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \quad \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \quad \dfrac{1}{2}$.

例 xy 座標平面において関数 $y=\cos x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

まず関数 $y=\cos x \ \left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi\right)$ のグラフと直線 $y=\dfrac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める.



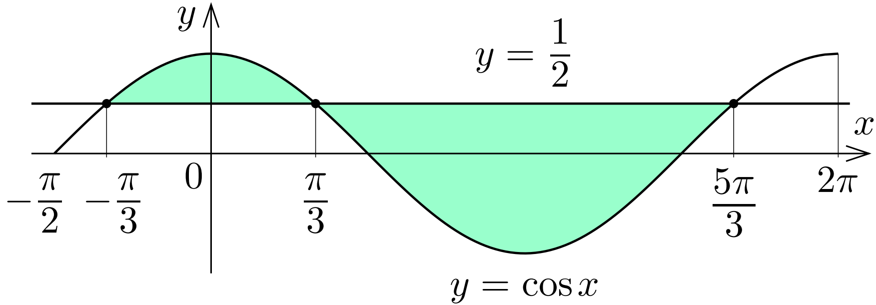
$\cos x=\dfrac{1}{2}$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ とすると, $x=-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$. $-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$.

$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}$ のとき

$\cos x \geqq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{5\pi}{3}$

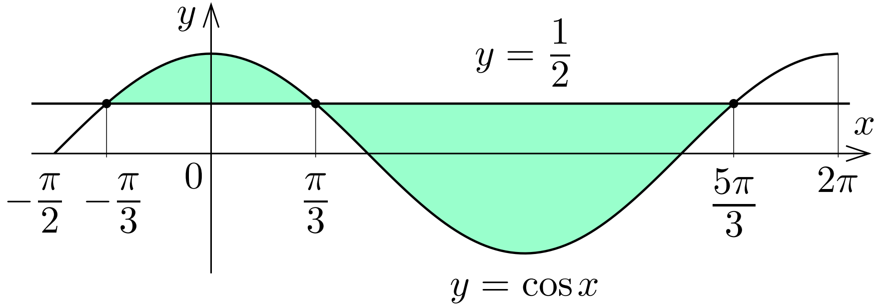
のとき $\cos x \leqq \dfrac{1}{2}$. 領域

の面積は



$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx$$

$-\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$ ，$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \leq \dfrac{1}{2}$ ．領域の面積は



$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx$$

$$= \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} \ .$$

終

$\boxed{問8.1.4}$ xy 座標平面において関数 $y = \sin x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2} \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x = \quad , \quad , \quad .$

$\leq x \leq$ 　　のとき $\sin x$ 　 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\leq x \leq$ 　　のとき $\sin x$ 　 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int \left(\qquad\qquad \right) dx + \int \left(\qquad\qquad \right) dx$$

$\boxed{問8.1.4}$ xy 座標平面において関数 $y = \sin x \quad \left(0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2} \right)$ のグラフと直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{7\pi}{3}$.

$\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}$ のとき $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{7\pi}{3}$ のとき $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x \right) dx$$

領域の面積は

$$
\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin x\right) dx \\
&= \left[-\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6} + \frac{7\sqrt{3}\,\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + \frac{1}{2} \\
&= 2 + \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} \quad .
\end{aligned}
$$

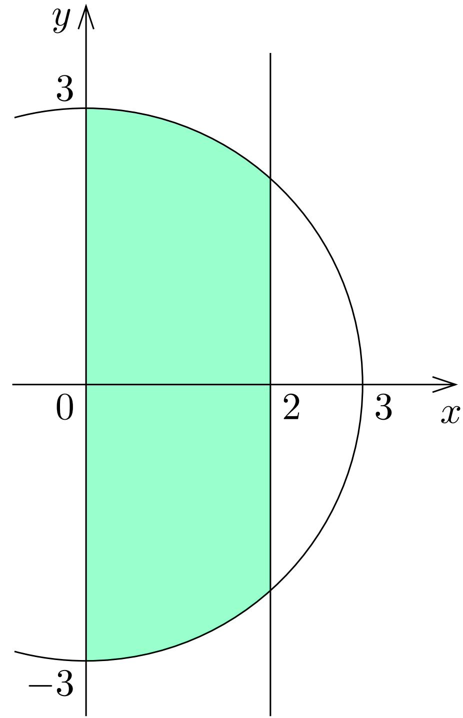
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

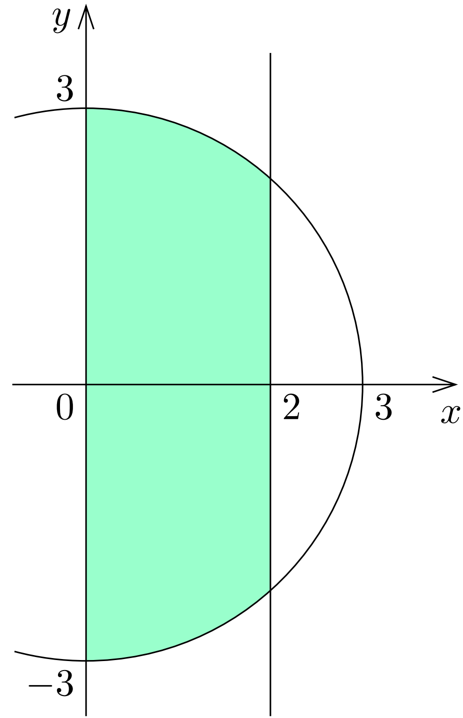
例 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

　不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2 \leq 9-x^2$ なので,

$$-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \ .$$



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ より, $y^2 \leq 9-x^2$ なので,

$$-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq \sqrt{9-x^2} \ .$$

従って, 不等式 $0 \leq x \leq 2$ と $x^2+y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積は

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \left\{ \sqrt{9-x^2} - \left(-\sqrt{9-x^2}\right) \right\} dx \\ =& \int_0^2 2\sqrt{9-x^2}\, dx \\ =& 2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\, dx \ . \end{aligned}$$

$9 - x^2 \geq 0$ なので， $(x+3)(x-3) \leq 0$ ， $-3 \leq x \leq 3$ ．

$9-x^2 \geq 0$ なので， $(x+3)(x-3) \leq 0$ ， $-3 \leq x \leq 3$ ． 変数 t を $t = \sin^{-1} \dfrac{x}{3}$

とおく.

$9-x^2 \geq 0$ なので, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. 変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく. $\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$.

$9-x^2 \geq 0$ なので, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく. $\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$.

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t .$$

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$，$-3 \leq x \leq 3$．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく．$\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t\ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\,dt$．

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$，$-3 \leq x \leq 3$．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$

とおく．$\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり

$-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\,dt$．$x=0$ のとき $t=0$．

$x=2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$．

$9-x^2 \geq 0$ なので，$(x+3)(x-3) \leq 0$ ，$-3 \leq x \leq 3$ ．変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく．$\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$ ．$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t \ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\,dt$ ．$x = 0$ のとき $t = 0$ ．$x = 2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ ．領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 3\cos t\, 3\cos t\,dt = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 t\,dt$$

$9-x^2 \geq 0$ なので, $(x+3)(x-3) \leq 0$, $-3 \leq x \leq 3$. 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ とおく. $\sin t = \dfrac{x}{3}$ なので $x = 3\sin t$. $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$.

$$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3\sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = 3\sqrt{\cos^2 t} = 3\cos t\ .$$

$x = 3\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 3\cos t$ なので $dx = 3\cos t\, dt$. $x=0$ のとき $t=0$. $x=2$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\begin{aligned}
2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\, dx &= 2\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 3\cos t\, 3\cos t\, dt = 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} 2\cos^2 t\, dt \\
&= 9\int_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} (1+\cos 2t)\, dt = 9\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\frac{2}{3}} \\
&= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\ .
\end{aligned}$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \qquad \sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \ .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$

$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right) \geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} .$$

領域 D の面積は

$$2\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + \frac{9}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \ .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} \ .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \ .$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{2}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) \geq 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \ .$$

故に

$$9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\sin\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 9\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$= 9\sin^{-1}\frac{2}{3} + 2\sqrt{5} \ .$$

領域 D の面積は $2\sqrt{5}+9\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}8.1.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2 + y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ．

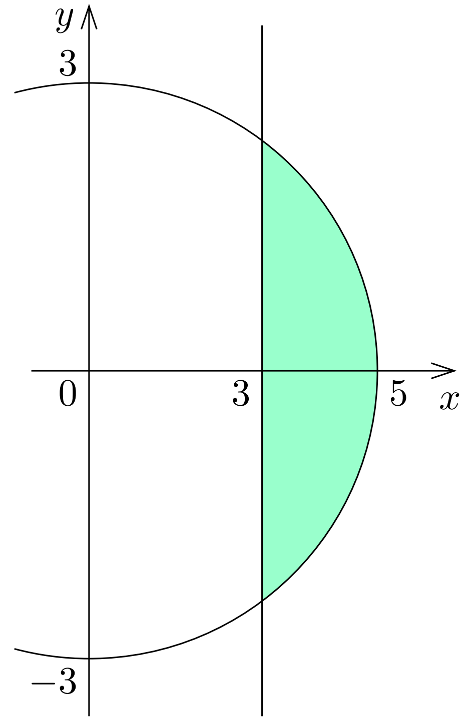
　不等式 $x^2 + y^2 \leq 25$ より， $y^2 \leq 25 - x^2$ なので，

$$\qquad \leq y \leq \qquad .$$

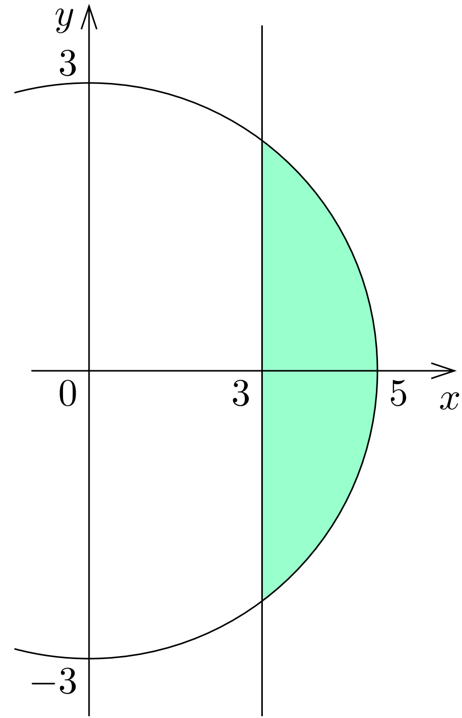
領域 D の面積は

$$\int_3^5 \left\{ \qquad - \left(\qquad \right) \right\} dx$$

$$= \int_3^5 \qquad dx$$



$\boxed{\text{問}8.1.5}$ xy 座標平面において不等式 $x \geq 3$ と $x^2+y^2 \leq 25$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.



不等式 $x^2+y^2 \leq 25$ より, $y^2 \leq 25-x^2$ なので,

$$-\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \ .$$

領域 D の面積は

$$\int_3^5 \left\{\sqrt{25-x^2} - \left(-\sqrt{25-x^2}\right)\right\} dx$$

$$= \int_3^5 2\sqrt{25-x^2}\, dx = 2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\, dx$$

$25-x^2 \geq 0$ なので，$(x+5)(x-5) \leq 0$，　　　$\leq x \leq$　　．変数 t を

$t =$　　　　　　　とおく．$\sin t =$　　　なので $x =$　　　　　．$-\frac{\pi}{2} \leq$　　　　　　$\leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(\qquad)^2} =$$

$x =$　　　　　　　より $\frac{dx}{dt} =$　　　　　なので $dx =$　　　　　　．$x = 3$ のとき

$t =$　　　　　　．$x = 5$ のとき $t =$　　　．領域 D の面積は

$$2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = 2\int \qquad\qquad dt =$$

$$= \qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad - \frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) .$$

$25-x^2 \geq 0$ なので， $(x+5)(x-5) \leq 0$ ， $-5 \leq x \leq 5$ ． 変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ とおく． $\sin t=\dfrac{x}{5}$ なので $x=5\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25(1-\sin^2 t)} = 5\sqrt{\cos^2 t} = 5\cos t \ .$$

$x=5\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt}=5\cos t$ なので $dx=5\cos t\,dt$ ． $x=3$ のとき $t=\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ ． $x=5$ のとき $t=\dfrac{\pi}{2}$ ． 領域 D の面積は

$$2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = 2\int \qquad dt =$$

$$= \qquad =$$

$$= \qquad -\frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) \ .$$

$25-x^2 \geq 0$ なので， $(x+5)(x-5) \leq 0$ ， $-5 \leq x \leq 5$ ．変数 t を $t=\sin^{-1}\frac{x}{5}$ とおく． $\sin t = \frac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$ ． $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos t \geq 0$ ．

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25(1-\sin^2 t)} = 5\sqrt{\cos^2 t} = 5\cos t \ .$$

$x = 5\sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 5\cos t$ なので $dx = 5\cos t\,dt$ ． $x=3$ のとき $t = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ ． $x=5$ のとき $t=\frac{\pi}{2}$ ．領域 D の面積は

$$\begin{aligned}2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx &= 2\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 5\cos t\, 5\cos t\,dt = 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\,dt \\ &= 25\int_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)\,dt = 25\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\ .\end{aligned}$$

領域 D の面積は

$$2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - \frac{25}{2}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)$$
$$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) .$$

ここで,

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} .$$

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} .$$

$-\dfrac{\pi}{2} \le \sin^{-1}\dfrac{3}{5} \le \dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{5}\right) \ge 0$, よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} .$$

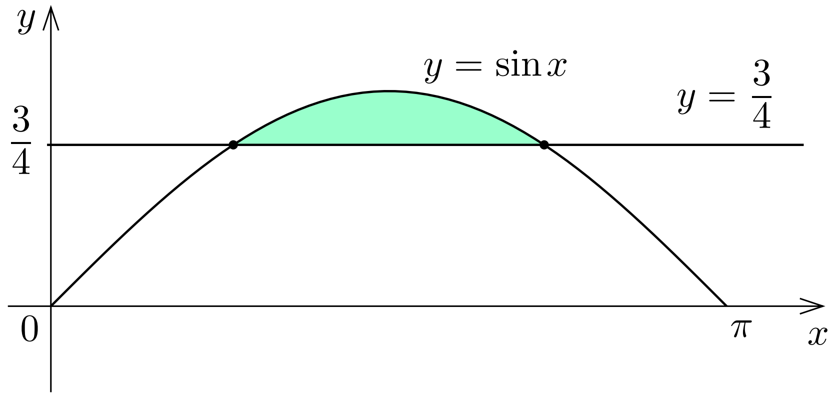
故に

$$\frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}\right) = \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 25\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$$
$$= \frac{25\pi}{2} - 25\sin^{-1}\frac{3}{5} - 12 .$$

領域 D の面積は $\dfrac{25\pi}{2} - 12 - 25\sin^{-1}\dfrac{3}{5}$ である. $\boxed{終}$

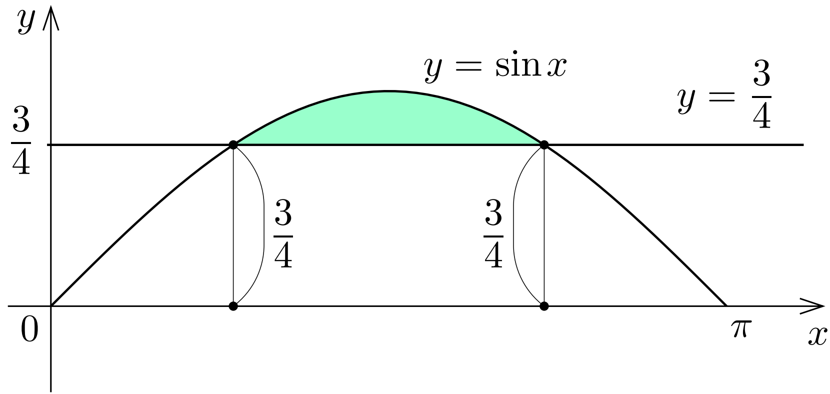
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\frac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



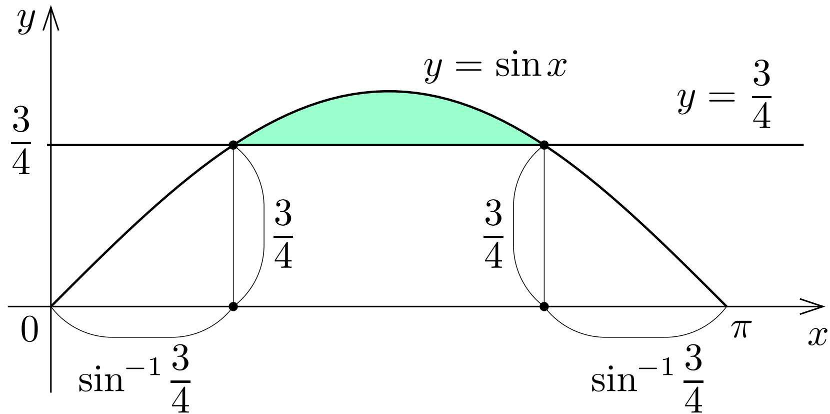
$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

　領域 D の点の x 座標の範囲を求める.



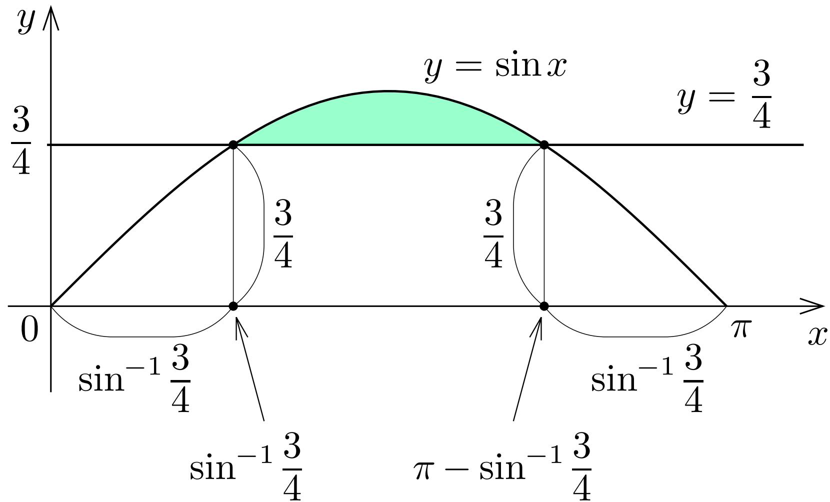
$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

領域 D の点の x 座標の範囲を求める. xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと 直線 $y = \dfrac{3}{4}$ との共有点を考える.

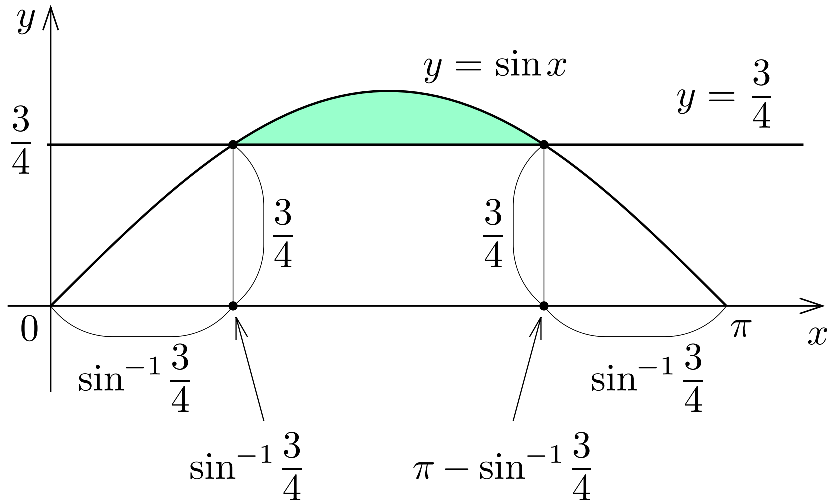


$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

領域 D の点の x 座標の範囲を求める. xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと 直線 $y = \dfrac{3}{4}$ との共有点を考える. $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{3}{4}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ である.



$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{3}{4} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



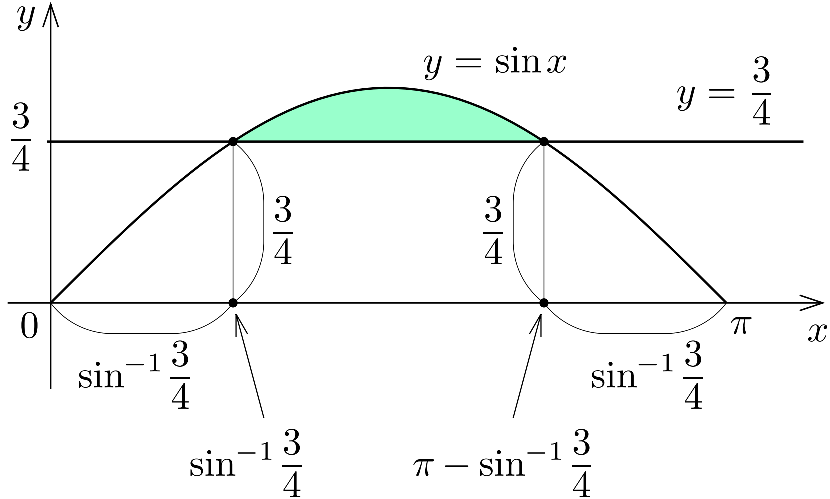
　領域 D の点の x 座標の範囲を求める. xy 座標平面において $y = \sin x$ のグラフと 直線 $y = \dfrac{3}{4}$ との共有点を考える.
$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{3}{4}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$; この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$.

領域 D の点の

x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$.



領域 D の点の

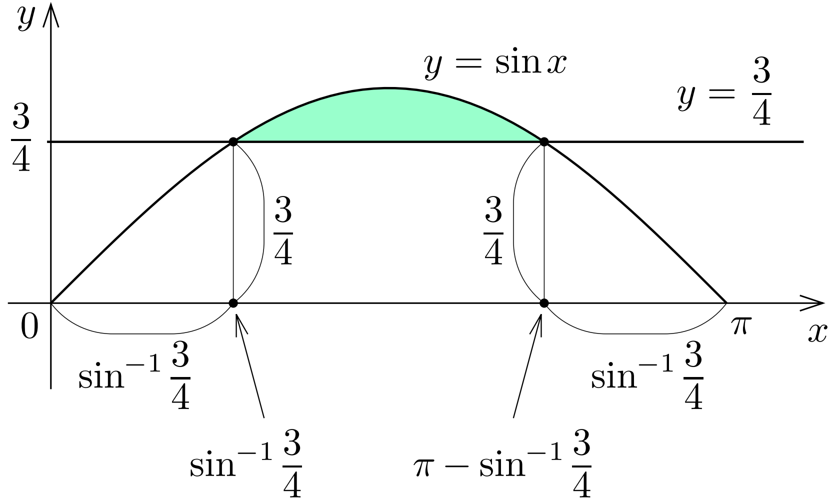
x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leqq x \leqq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geqq \dfrac{3}{4}$.

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$



領域 D の点の

x 座標の範囲は

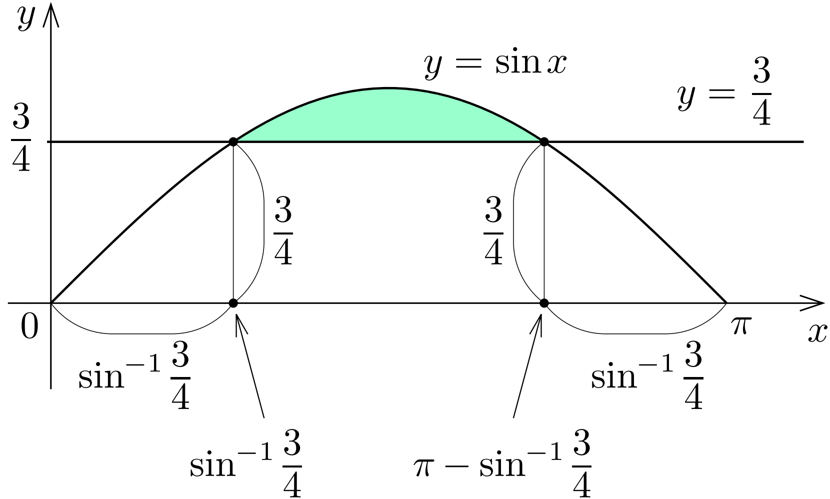
$\sin^{-1}\frac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \frac{3}{4}$.

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$

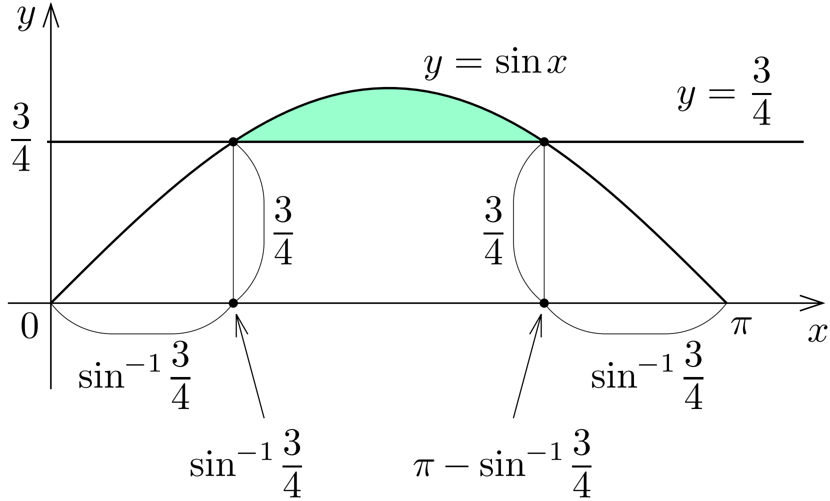


領域 D の点の

x 座標の範囲は

$$\sin^{-1}\frac{3}{4} \leqq x \leqq \pi - \sin^{-1}\frac{3}{4} \quad ;$$

この範囲で $\sin x \geqq \dfrac{3}{4}$.



領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$

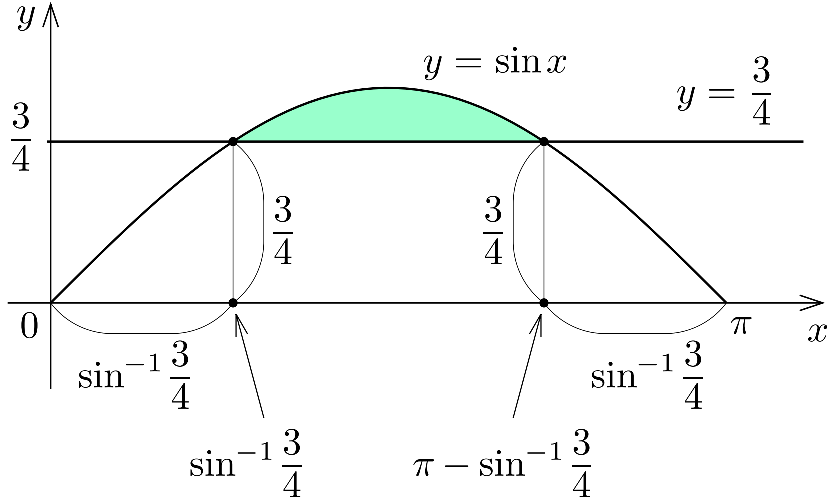
$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

領域 D の点の

x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leqq x \leqq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geqq \dfrac{3}{4}$.



領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$\cos(\pi - a) = \cos(a - \pi) = -\cos a$

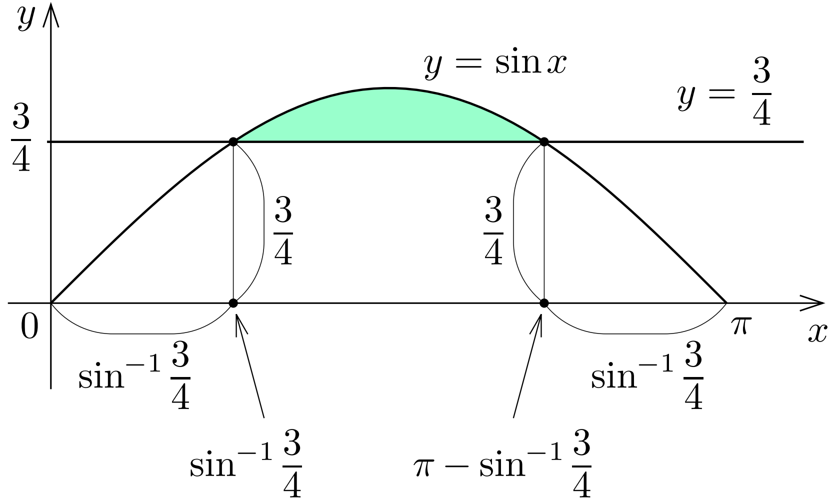
領域 D の点の

x 座標の範囲は

$\sin^{-1}\dfrac{3}{4} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{3}{4}$;

この範囲で $\sin x \geq \dfrac{3}{4}$.

領域 D の面積は



$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}} \left(\sin x - \frac{3}{4}\right) dx$$

$$= \left[-\cos x - \frac{3}{4}x\right]_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) - \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{4} .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$ なので，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{4}$ なので，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ .$$

$-\dfrac{\pi}{2}\leq\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\leq\dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{3}{4}\right)\geq 0$ ，よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{3}{4}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{3}{4}}\left(\sin x-\frac{3}{4}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する． $\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$ なので，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16} \ .$$

$-\frac{\pi}{2}\leq \sin^{-1}\frac{3}{4}\leq\frac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\geq 0$ ，よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \ .$$

故に

$$\begin{aligned}2\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} &= 2\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2}+\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}-\frac{3\pi}{4} \ .\end{aligned}$$

領域 D の面積は $\dfrac{\sqrt{7}}{2}+\dfrac{3}{2}\sin^{-1}\dfrac{3}{4}-\dfrac{3\pi}{4}$ である. 終

$\boxed{\text{問}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は　　　　と　　　　である. 領域 D の点の x 座標の範囲は　　　　$\leq x \leq$　　　　; この範囲で $\sin x$ 　 $\dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int \qquad \left(\qquad \qquad \right) dx =$$

$\boxed{\text{問}}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$; この範囲で $\sin x \geq \dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}} \left(\sin x - \frac{2}{3}\right)dx = \left[-\cos x - \frac{2}{3}x\right]_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$=$$

$\boxed{問}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $\dfrac{2}{3} \leq y \leq \sin x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$0 \leq x \leq \pi$ の範囲で方程式 $\sin x = \dfrac{2}{3}$ の解は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ と $\pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$ である. 領域 D の点の x 座標の範囲は $\sin^{-1}\dfrac{2}{3} \leq x \leq \pi - \sin^{-1}\dfrac{2}{3}$; この範囲で $\sin x \geq \dfrac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}} \left(\sin x - \frac{2}{3}\right) dx = \left[-\cos x - \frac{2}{3}x\right]_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}}$$

$$= -\cos\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$= \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) - \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3} + \cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}$$

$$= 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3} - \frac{2\pi}{3} \ .$$

領域 D の面積は

$$\int_{\sin^{-1}\frac{2}{3}}^{\pi-\sin^{-1}\frac{2}{3}}\left(\sin x-\frac{2}{3}\right)dx = 2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3}\ .$$

$\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right)$ を計算する. $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$ なので,

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}\ .$$

$-\dfrac{\pi}{2}\le\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\le\dfrac{\pi}{2}$ なので $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{2}{3}\right)\ge 0$ ，よって

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{9}\ .$$

故に

$$\begin{aligned}2\cos\left(\sin^{-1}\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3} &= 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3}\\ &= \frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{4}{3}\sin^{-1}\frac{2}{3}-\frac{2\pi}{3}\ .\end{aligned}$$

領域 D の面積は $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}+\dfrac{4}{3}\sin^{-1}\dfrac{2}{3}-\dfrac{2\pi}{3}$ である.

$\boxed{\text{終}}$