8.3　平面領域の面積

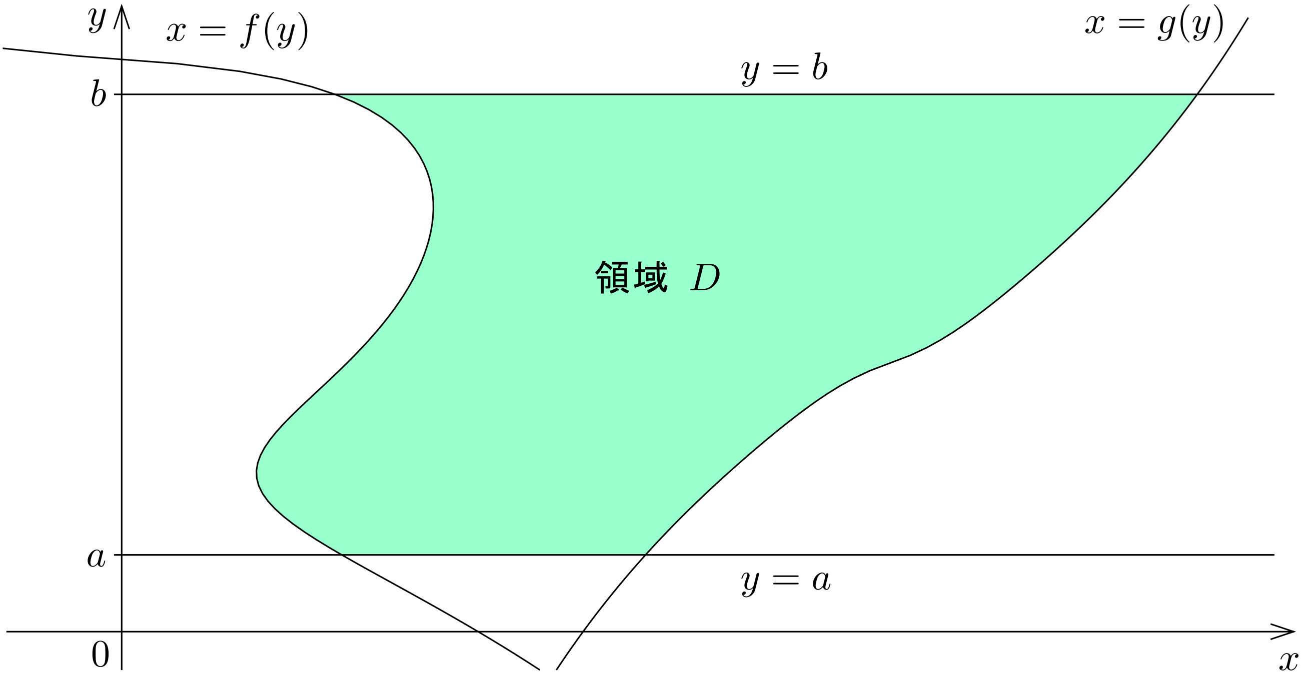
xy 座標平面における領域の面積を計算するために y で積分することがある.

実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする．xy 座標平面において，連立不等式

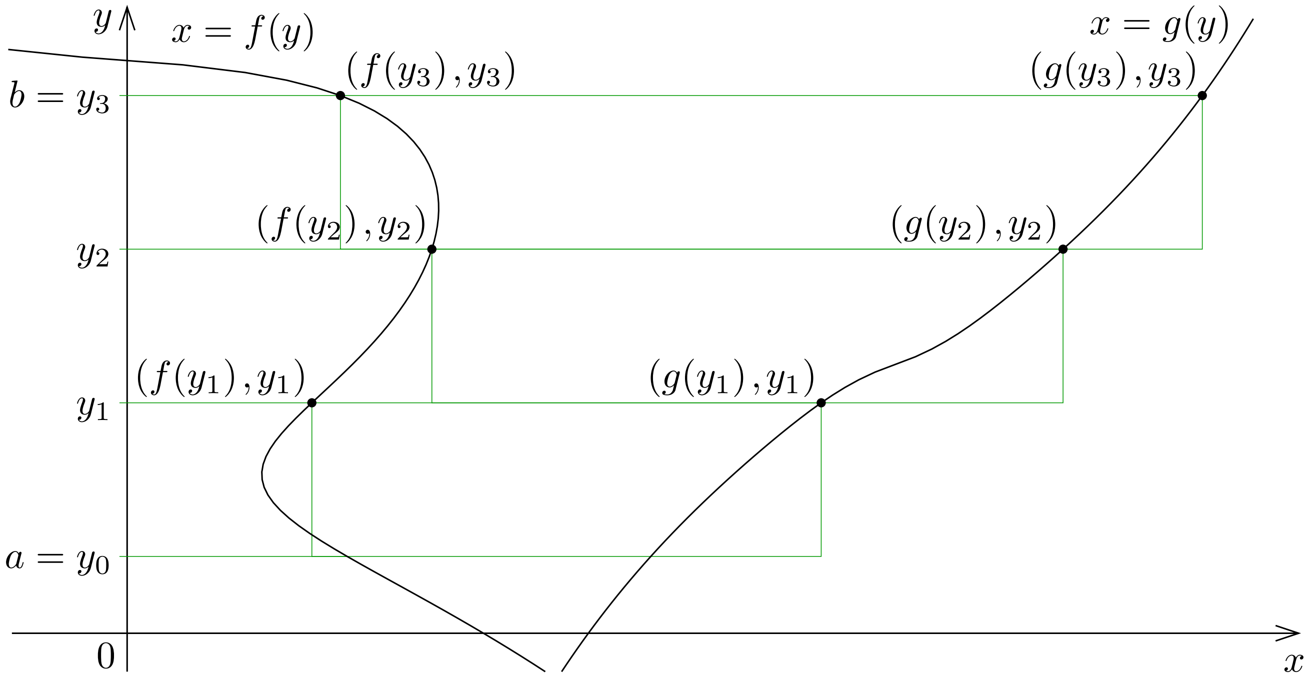
$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

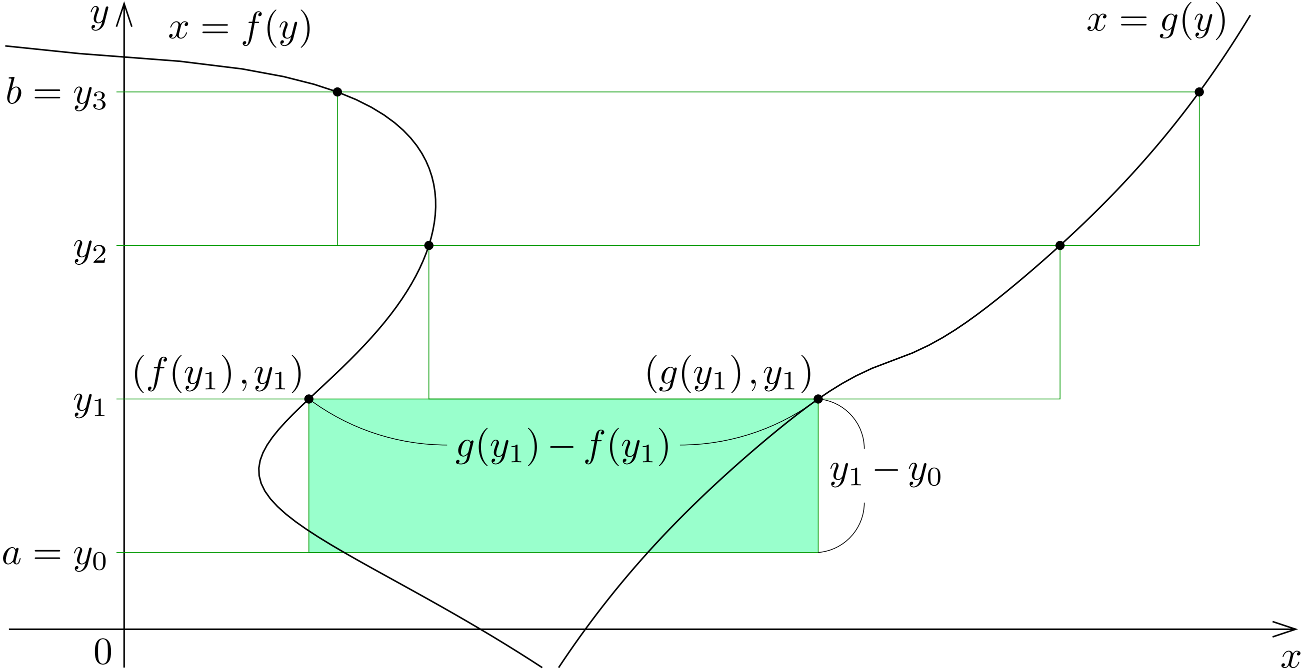
で表される領域を D の面積を考える．

例えば領域 D が下図の明緑色の図形であるとする.



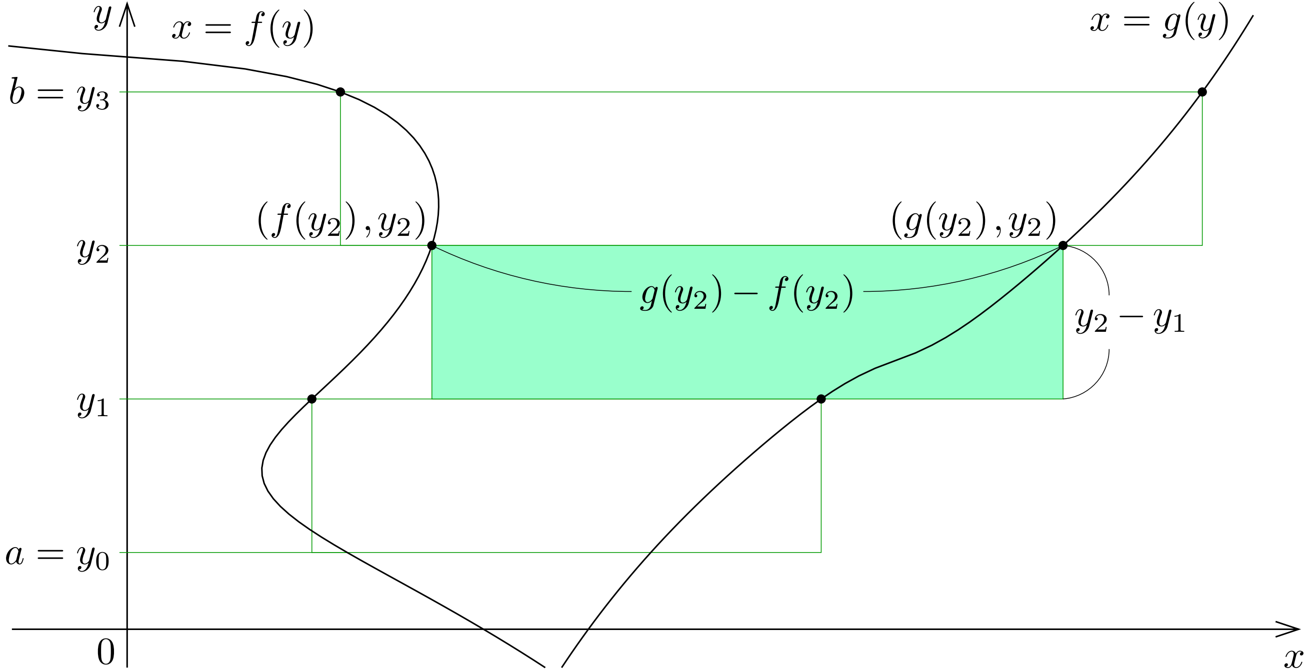
$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 = b$ である実数 y_0, y_1, y_2, y_3 をとり，下図の状況を考える．





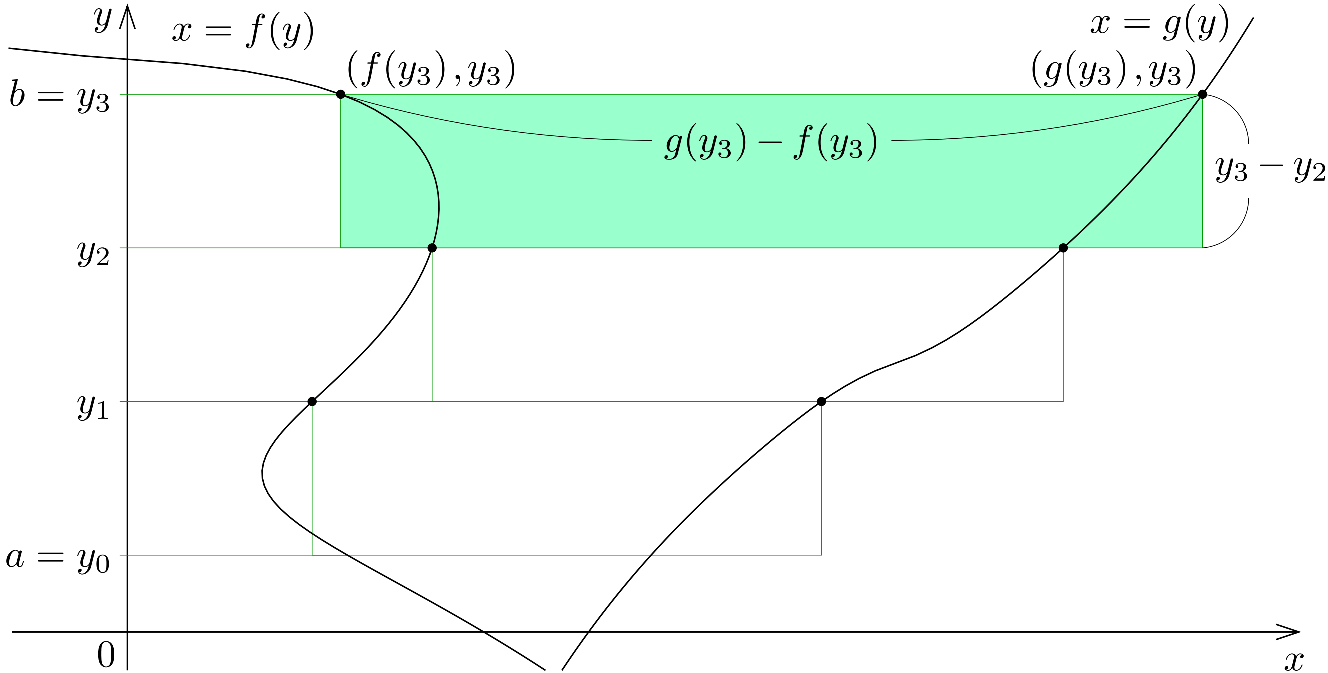
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0)\ .$$



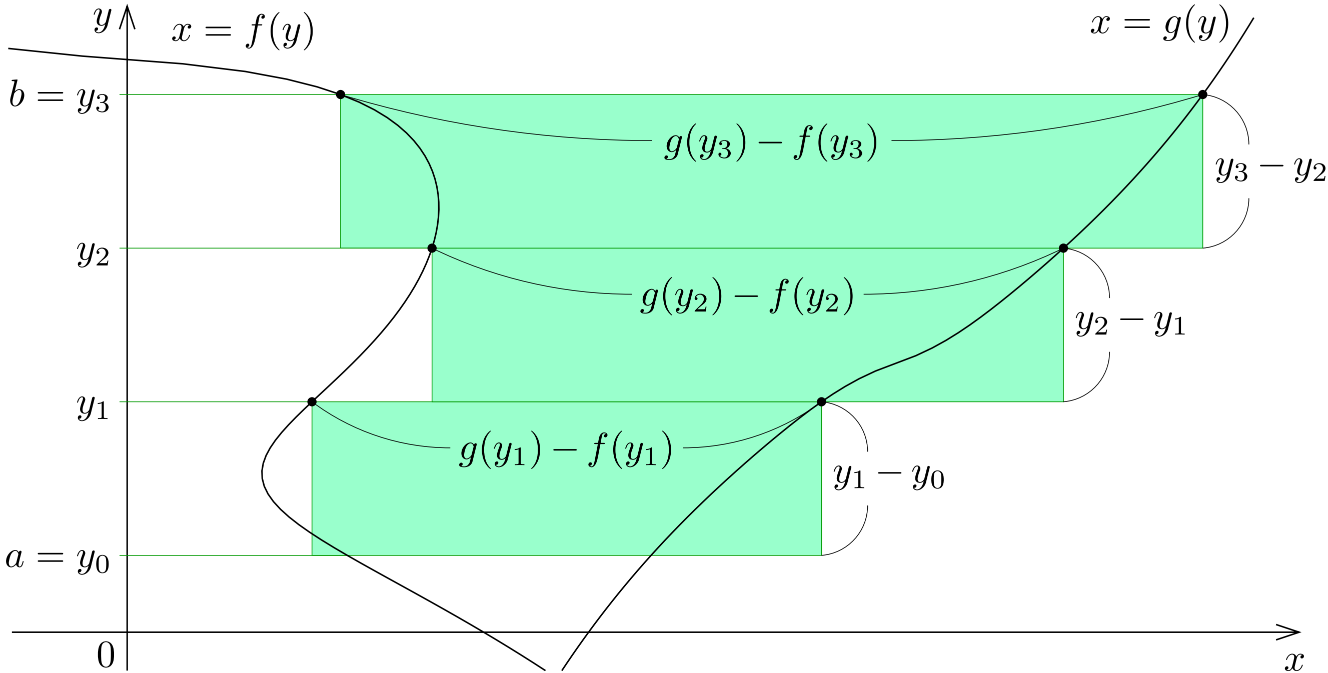
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) \ .$$



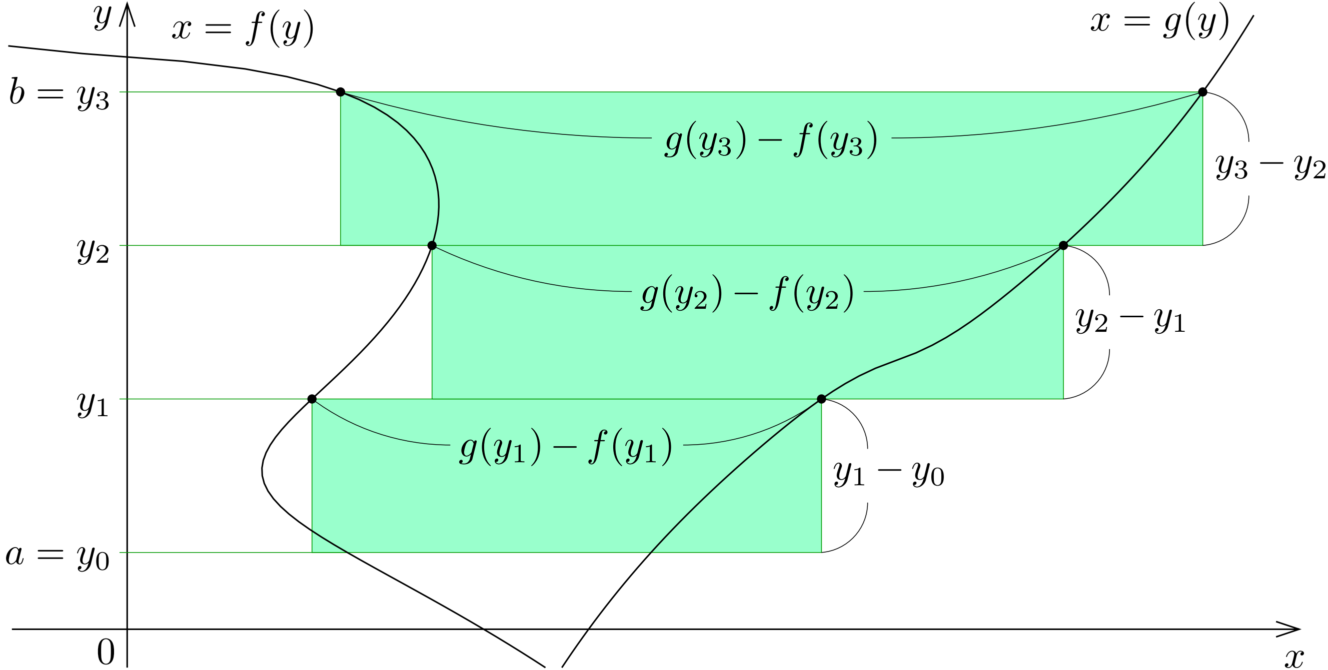
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_3)-f(y_3)\}(y_3-y_2)\ .$$



上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0) + \{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) + \{g(y_3) - f(y_3)\}(y_3 - y_2)\ .$$



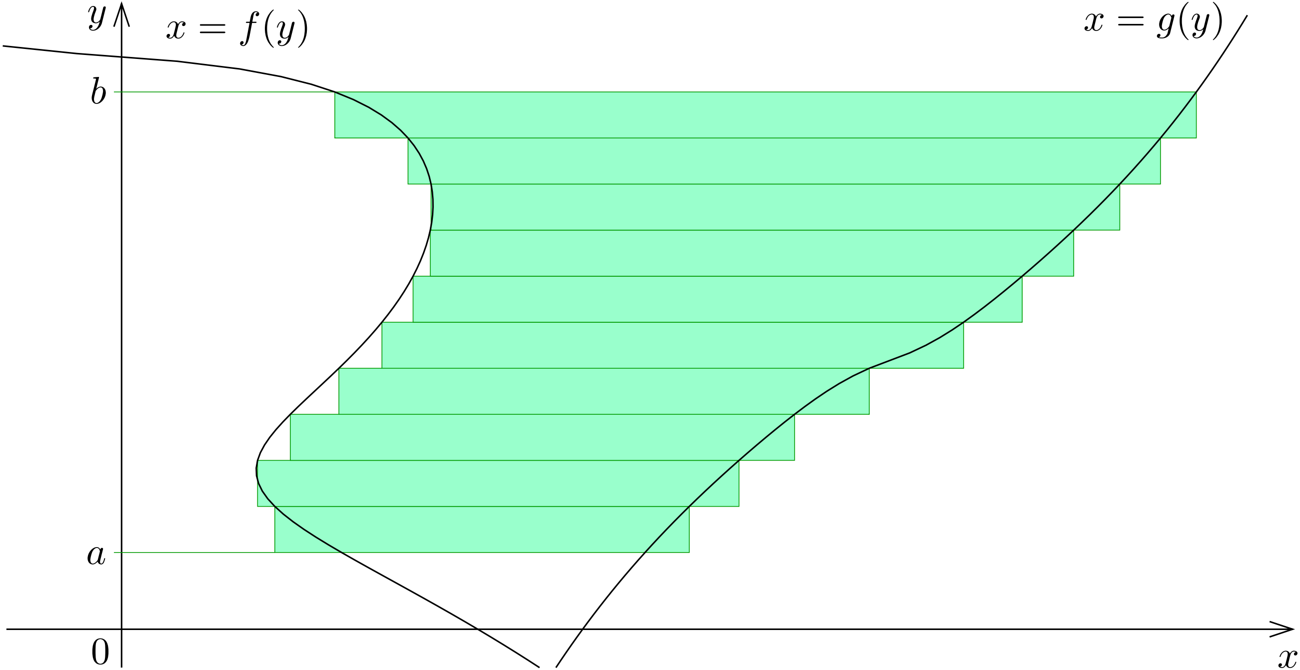
上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積 S_3 は

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1}) \right] .$$

長方形の個数を 10 にする.

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_9 \leq y_{10} = b$$

である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_9, y_{10}$ をとり，領域 D の面積を 10 個の長方形を併せた図形の面積で近似する.



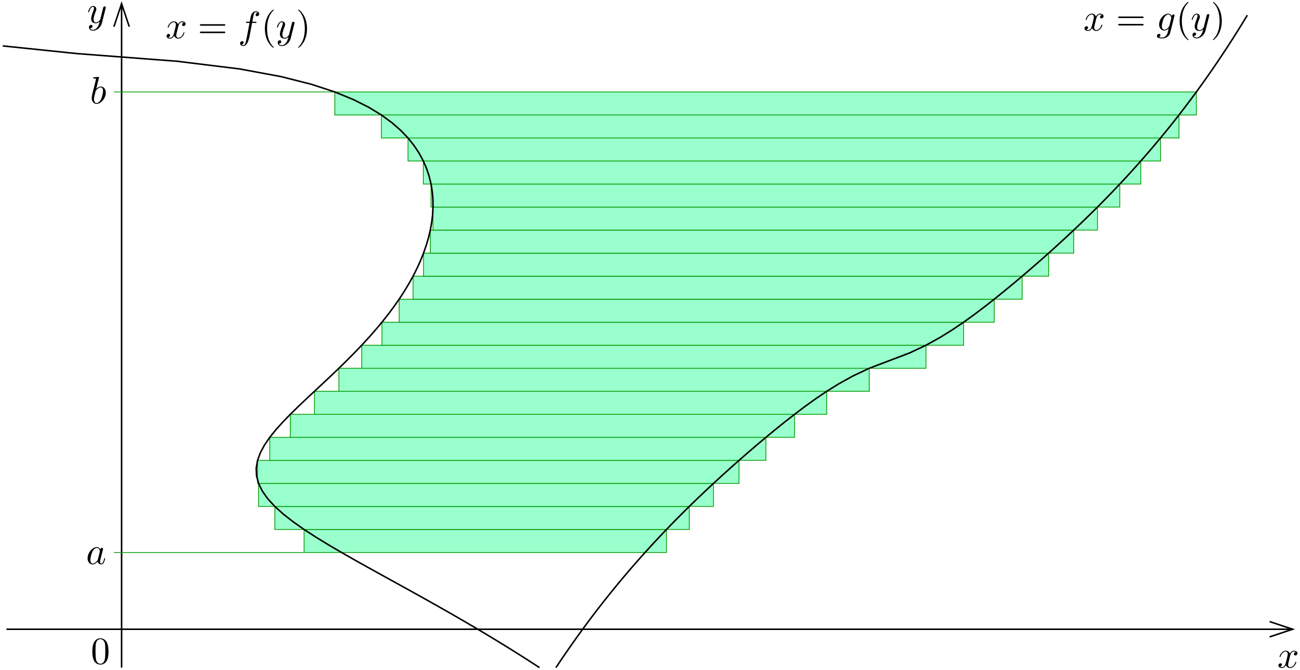
上図の明緑色の 10 個の長方形を併せた図形の面積 S_{10} は

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1}) \right] .$$

長方形の個数を 20 にする.

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{19} \leq y_{20} = b$$

である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{19}, y_{20}$ をとり，領域 D の面積を20個の長方形を併せた図形の面積で近似する.



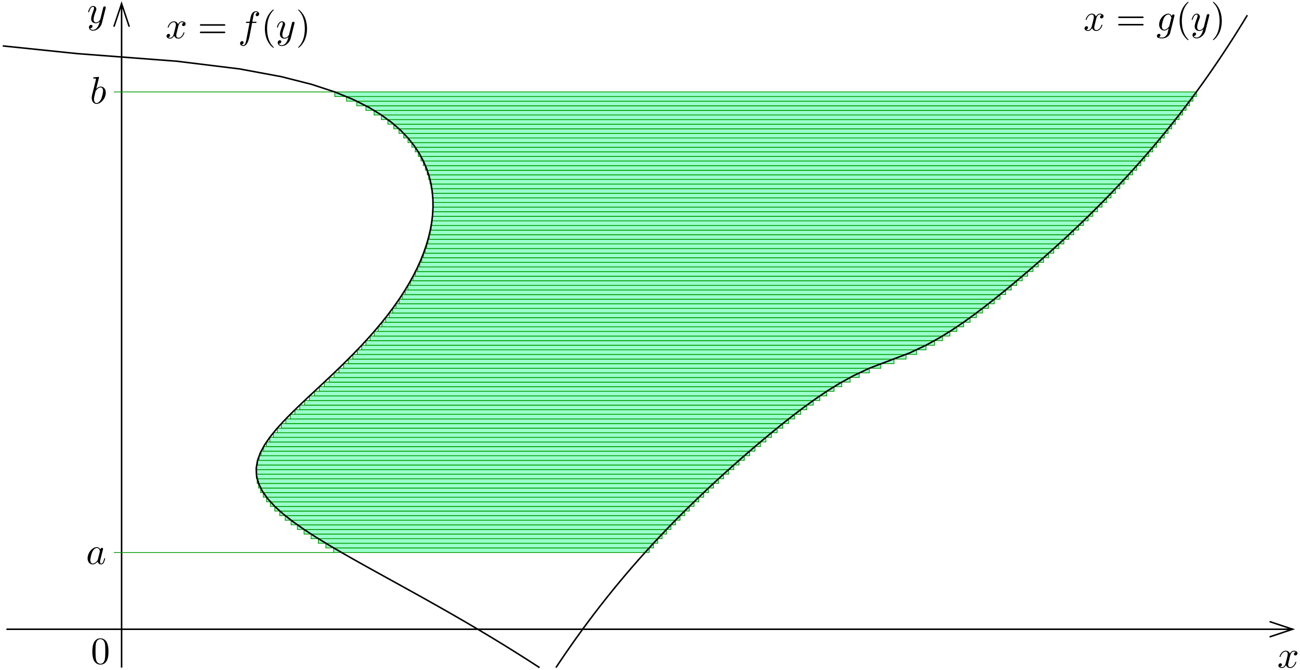
上図の明緑色の 20 個の長方形を併せた図形の面積 S_{20} は

$$S_{20} = \sum_{k=1}^{20} \left[\{ g(y_k) - f(y_k) \} (y_k - y_{k-1}) \right] .$$

　長方形の個数を 100 にする.

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{99} \leq y_{100} = b$$

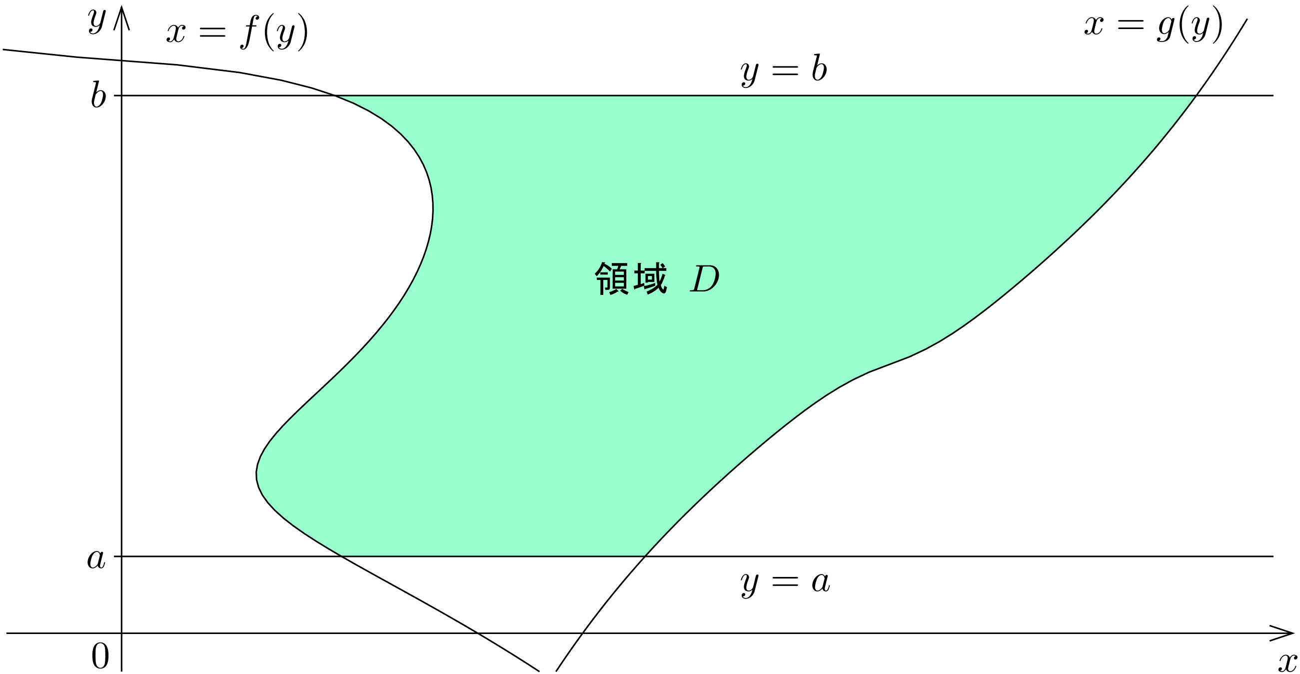
である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{99}, y_{100}$ をとり，領域 D の面積を 100 個の長方形を併せた図形の面積で近似する.



上図の明緑色の 100 個の長方形を併せた図形の面積 S_{100} は

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1}) \right] .$$

　このようにして長方形の個数を限りなく増やしていくと，長方形を併せた図形の面積は領域 D の面積に限りなく近づく．



正の各自然数 n に対して，

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0\,, y_1\,, y_2\,, y_3\,, \cdots, y_{n-1}\,, y_n$ をとる．これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(y_k) - f(y_k) \} (y_k - y_{k-1}) \right] .$$

正の各自然数 n に対して,

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n$ をとる. これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(y_k) - f(y_k) \} (y_k - y_{k-1}) \right] .$$

これは関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和である.

正の各自然数 n に対して，

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0\,, y_1\,, y_2\,, y_3\,, \ldots, y_{n-1}\,, y_n$ をとる．これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})\right] .$$

これは関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和である．

$$\delta_n = \max\{y_1 - y_0\,, y_2 - y_1\,, y_3 - y_2\,, \ldots, y_n - y_{n-1}\}$$

について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする．

正の各自然数 n に対して，

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0 , y_1 , y_2 , y_3 , \ldots , y_{n-1} , y_n$ をとる．これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(y_k) - f(y_k) \} (y_k - y_{k-1}) \right] .$$

これは関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和である．

$$\delta_n = \max\{ y_1 - y_0 , y_2 - y_1 , y_3 - y_2 , \ldots , y_n - y_{n-1} \}$$

について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする．長方形の個数 n を限りなく大きくして一つ一つの長方形を限りなく薄くすると，n 個の長方形を併せた図形の面積 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(y_k) - f(y_k) \} (y_k - y_{k-1}) \right]$ は領域 D の面積に限りなく近づく．

正の各自然数 n に対して，

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0\,, y_1\,, y_2\,, y_3\,, \ldots\,, y_{n-1}\,, y_n$ をとる．これまで述べてきたような n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1}) \right] \,.$$

これは関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和である．

$$\delta_n = \max\{ y_1 - y_0\,, y_2 - y_1\,, y_3 - y_2\,, \ldots\,, y_n - y_{n-1} \}$$

について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする．長方形の個数 n を限りなく大きくして一つ一つの長方形を限りなく薄くすると，n 個の長方形を併せた図形の面積 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\} (y_k - y_{k-1}) \right]$ は領域 D の面積に限りなく近づく．よって領域 D の面積はリーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である.

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である．

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので，関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b \{g(y)-f(y)\}\,dy$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \{g(y)-f(y)\}\,dy \ .$$

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}dy$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(y)-f(y)\}dy\ .$$

故に，領域 D の面積は定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}dy$ である．

　このようにして次の定理が成り立つ．

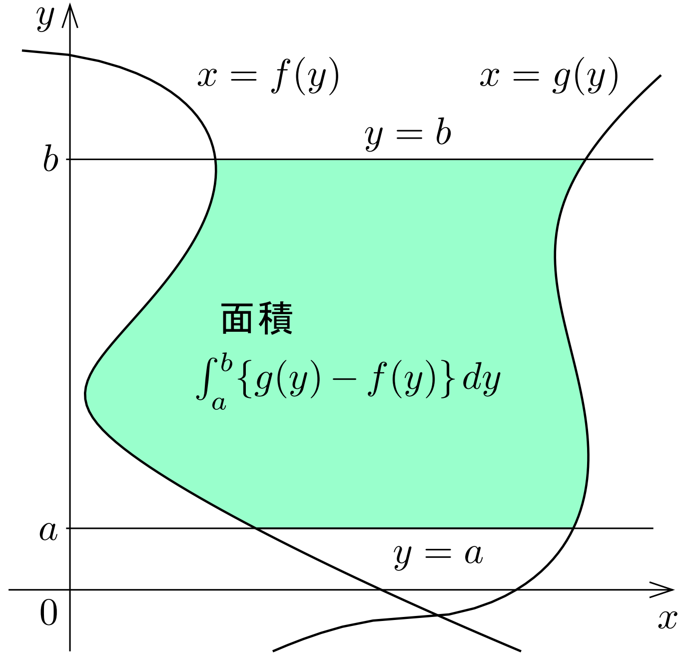
定理　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a,b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(y) - f(y)\}\,dy$$

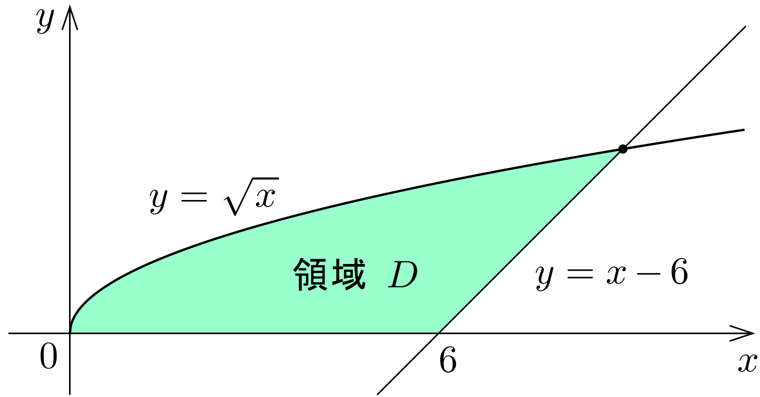
である．



この定理において，領域の点の y 座標の範囲と，その範囲で $f(y) \leq g(y)$ であるかどうかに注意すること．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

例 xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



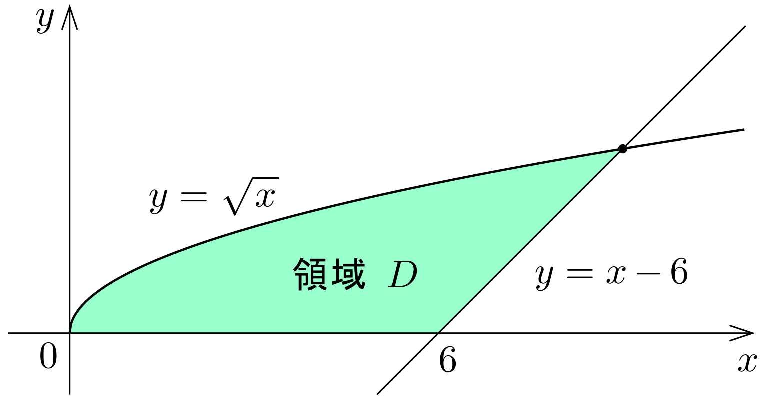
例 xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

$$y=\sqrt{x} \iff x=y^2 .$$

また,

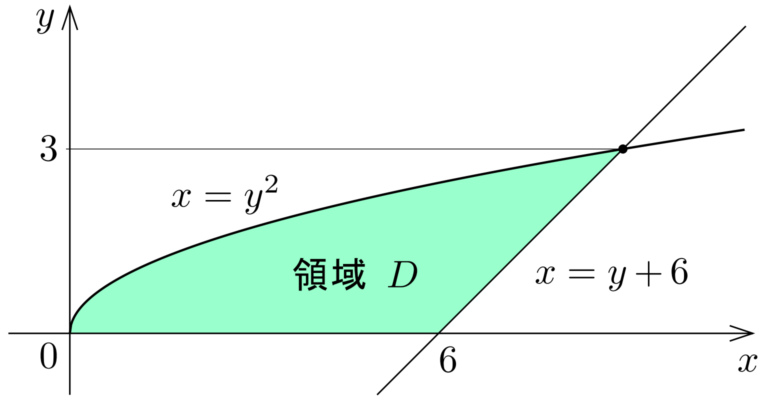
$$y=x-6 \iff x=y+6 .$$



$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \quad .$$



また,

$$y = x-6 \iff x = y+6 \ .$$

$x=y^2$ かつ $x=y+6$ とすると, $y^2=y+6$, $y=3,-2$;

更に $y \geq 0$ とすると $y=3$.

領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq 3$ で, この範囲で $y+6 \geq y^2$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

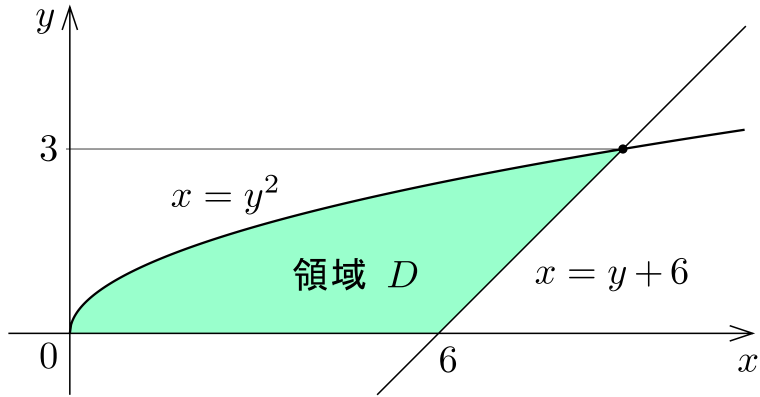
$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \quad .$$

また,

$$y = x-6 \iff x = y+6 \; .$$

$x=y^2$ かつ $x=y+6$ とすると, $y^2=y+6$, $y=3,-2$;

更に $y \geq 0$ とすると $y=3$.

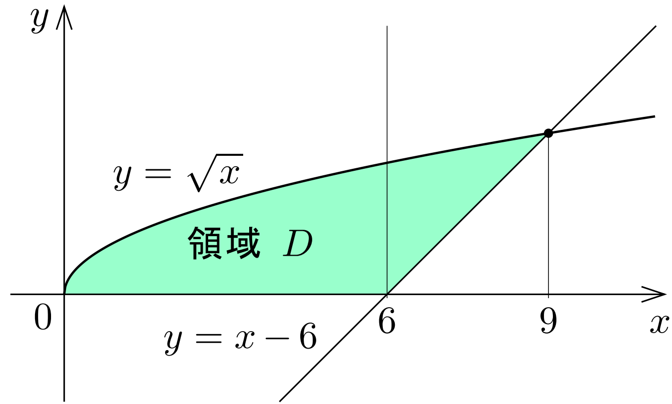


領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq 3$ で, この範囲で $y+6 \geq y^2$. 領域 D の面積は

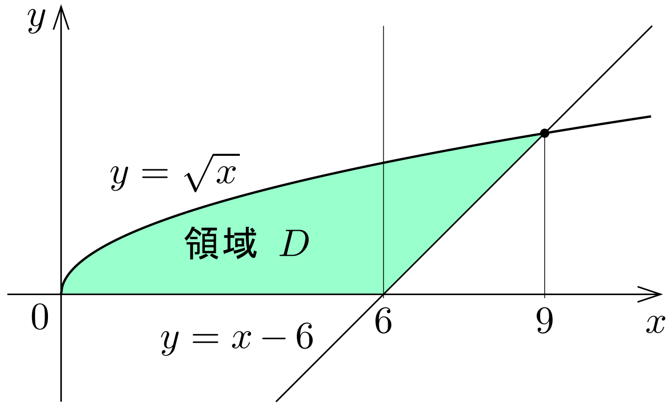
$$\int_0^3 (y+6-y^2)\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2+6y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^3 = \frac{27}{2} \; .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

領域 D の面積を x について積分して求めるには, D を $0 \leq x \leq 6$ の部分と $6 \leq x \leq 9$ の部分とに分けて計算する.



例 xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



領域 D の面積を x について積分して求めるには, D を $0 \leq x \leq 6$ の部分と $6 \leq x \leq 9$ の部分とに分けて計算する.

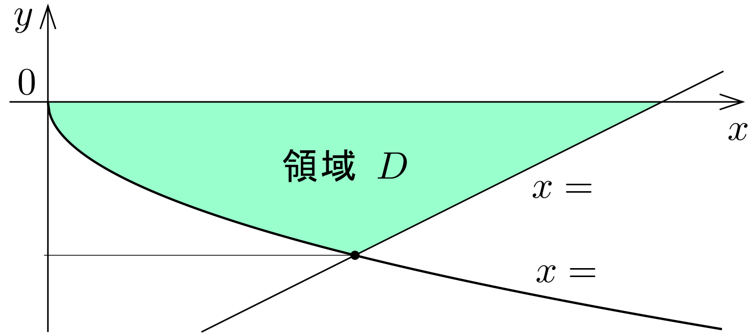
$$\int_0^6 \sqrt{x}\,dx+\int_6^9\left\{\sqrt{x}-(x-6)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^6+\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_6^9$$

$$=4\sqrt{6}+6\sqrt{9}-\frac{81}{2}+54-4\sqrt{6}+18-36$$

$$=\frac{27}{2}\ .$$

問8.2.1 xy 座標平面において関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=\dfrac{x}{2}-4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.



$y=-\sqrt{x}$ のとき $y \le 0$.

$x \ge 0$ かつ $y \le 0$ のとき

$y=-\sqrt{x} \iff x= \qquad .$

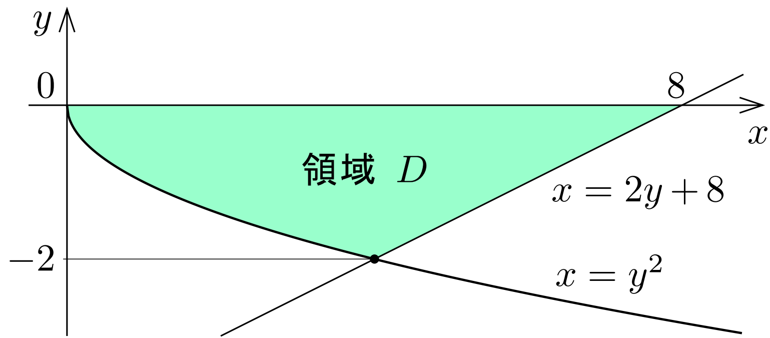
また,

$y=\dfrac{x}{2}-4 \iff x= \qquad .$

$x=$ かつ $x=$ とすると, $=$, $y=$, ; 更に $y \le 0$ とすると $y=$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $\le y \le 0$ で, この範囲で $\ge$. 領域の面積は

$$\int^{0} \left(\qquad \right) dy =$$

$\boxed{問8.2.1}$ xy 座標平面において関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=\dfrac{x}{2}-4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.



$y=-\sqrt{x}$ のとき $y \leq 0$.

$x \geq 0$ かつ $y \leq 0$ のとき

$$y=-\sqrt{x} \iff x=y^2 \quad .$$

また,

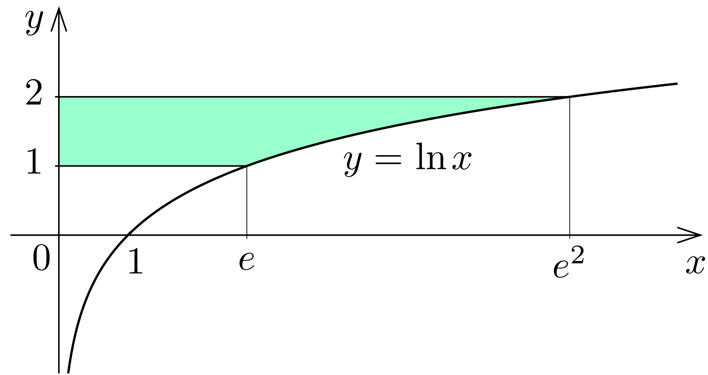
$$y=\frac{x}{2}-4 \iff x=2y+8 \ .$$

$x=y^2$ かつ $x=2y+8$ とすると, $y^2=2y+8$, $y=4,-2$; 更に $y \leq 0$ とすると $y=-2$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $-2 \leq y \leq 0$ で, この範囲で $2y+8 \geq y^2$. 領域の面積は

$$\int_{-2}^{0}(2y+8-y^2)\,dy=\left[y^2+8y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{0}=\frac{28}{3} \ .$$

$\boxed{終}$

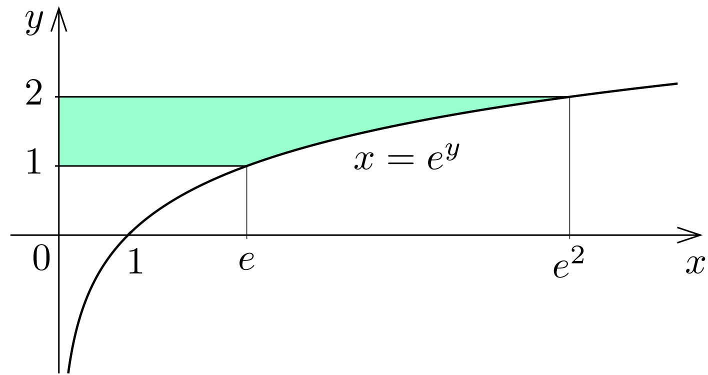
$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ ($x > 0$) のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.



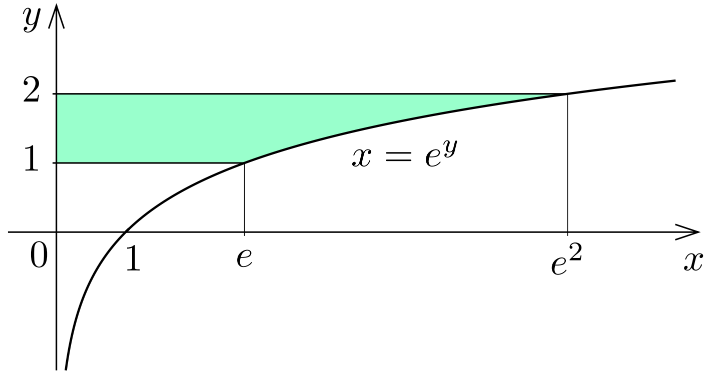
例 xy 座標平面において関数 $y=\ln x$ ($x>0$) のグラフと直線 $y=1$ と直線 $y=2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

正の各実数 x 及び各実数 y について

$$y=\ln x \iff x=e^y \quad .$$



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ ($x > 0$) のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.



正の各実数 x 及び各実数 y について

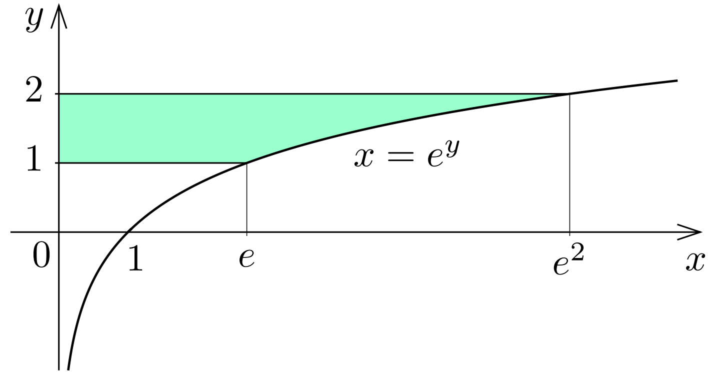
$$y = \ln x \iff x = e^y \quad .$$

領域の点の y 座標の範囲は $1 \leq y \leq 2$. 各実数 x について $e^x > 0$.

例 xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ （ $x > 0$ ）のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

正の各実数 x 及び各実数 y について

$$y = \ln x \iff x = e^y \quad .$$

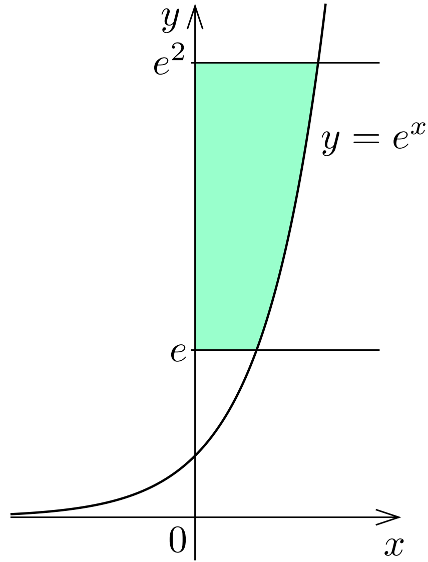


領域の点の y 座標の範囲は $1 \leq y \leq 2$. 各実数 x について $e^x > 0$. 領域の面積は

$$\int_1^2 e^y \, dy = \left[e^y \right]_1^2 = e^2 - e \quad .$$

終

$\boxed{問8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = e$ と直線 $y = e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.



各実数 x 及び正の各実数 y について

$$y \geq e^x \iff x \leq$$

領域を表す連立不等式は

$$\leq y \leq \quad かつ \quad \leq x \leq$$

領域の面積は

$$\int \qquad dy =$$

$\boxed{問8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=e$ と直線 $y=e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

各実数 x 及び正の各実数 y について

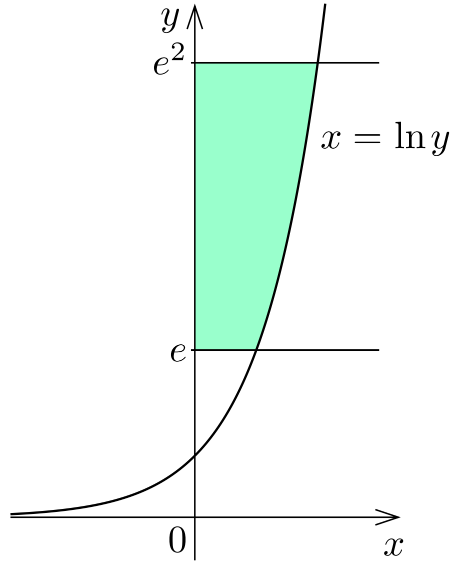
$$y \geq e^x \iff x \leq \ln y \quad .$$

領域を表す連立不等式は

$$e \leq y \leq e^2 \text{ かつ } 0 \leq x \leq \ln y \quad .$$

領域の面積は

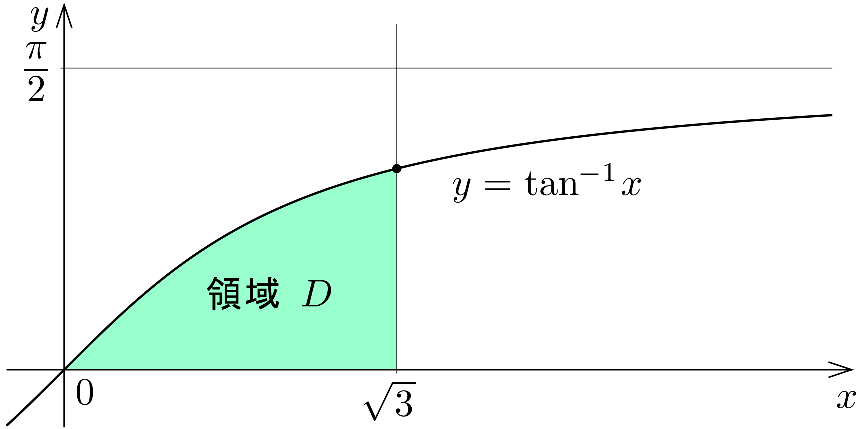
$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \ln y \, dy &= \left[y \ln y - y\right]_e^{e^2} \\ &= 2e^2 - e^2 - (e - e) \\ &= e^2 \ .\end{aligned}$$



$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

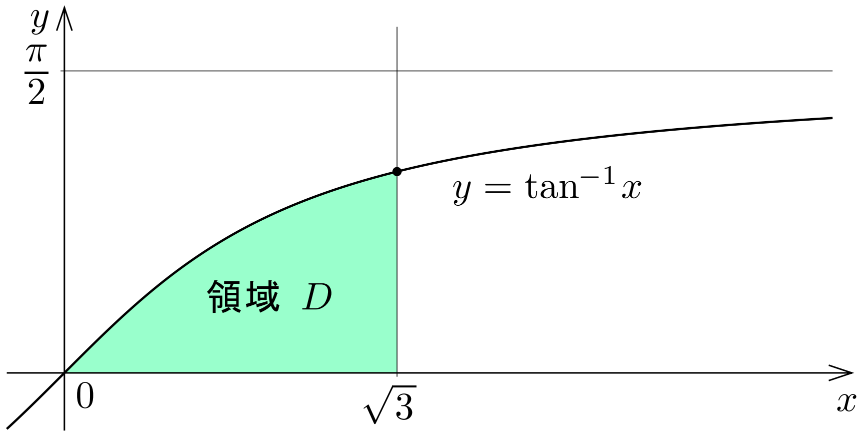
例 xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$.



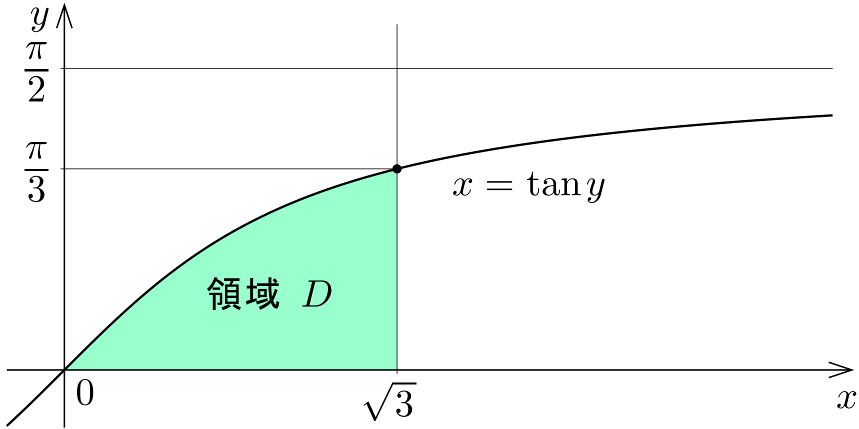
例 xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$.

関数 $y = \tan^{-1} x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき

$y = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

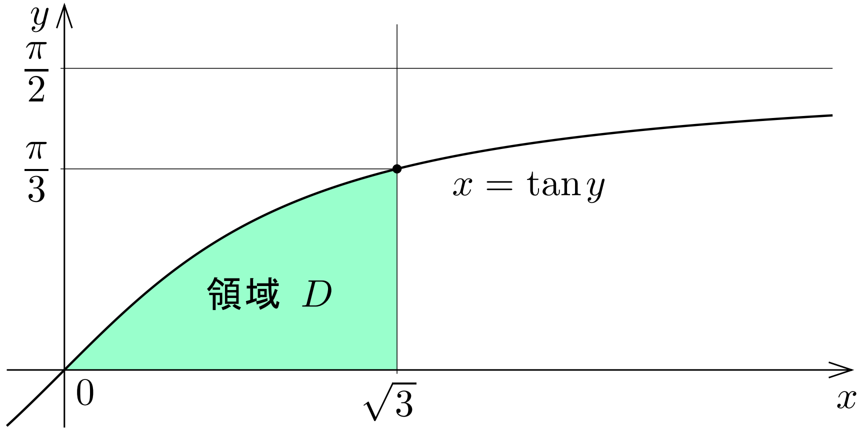


$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

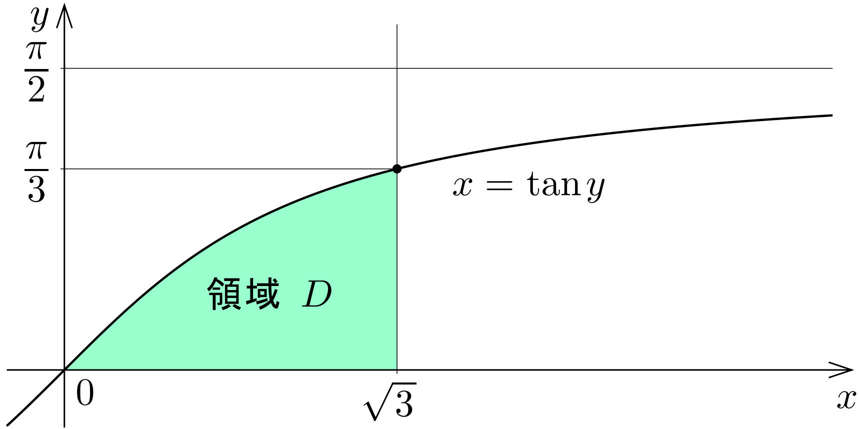
$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$.

関数 $y = \tan^{-1} x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき $y = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. 領域 D の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ であり, この範囲で $\tan y \leq \sqrt{3}$.



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$.

関数 $y = \tan^{-1} x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき $y = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. 領域 D の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$ であり, この範囲で $\tan y \leq \sqrt{3}$. 領域 D の面積は

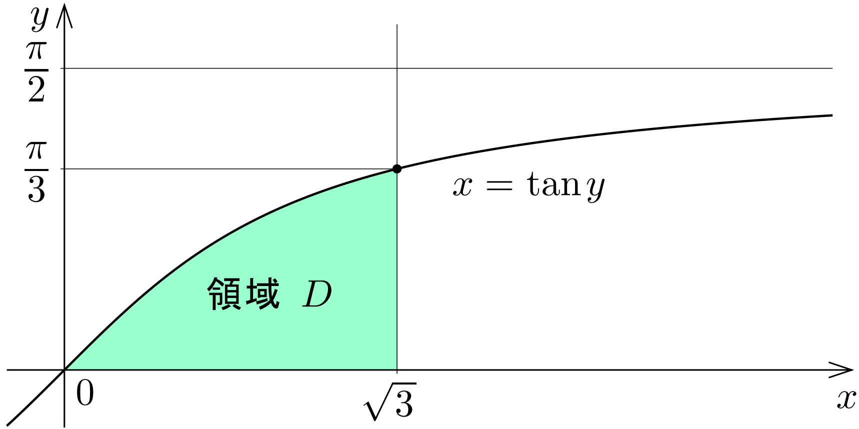
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3} - \tan y\right) dy = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

例 xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$.

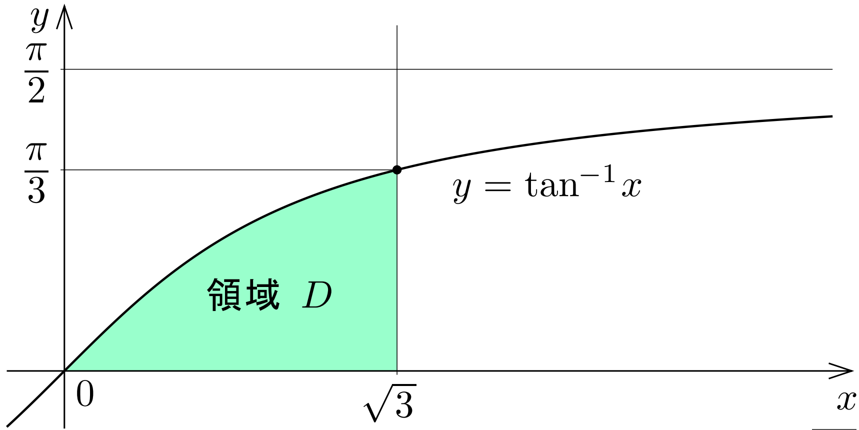
関数 $y = \tan^{-1} x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき $y = \tan^{-1} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. 領域 D の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ であり, この範囲で $\tan y \leq \sqrt{3}$. 領域 D の面積は



$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3} - \tan y\right) dy = \left[\sqrt{3}\, y + \ln|\cos y|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} + \ln\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} - \ln 2 .$$

領域 D の面積を次のようにも計算できる．x の関数 $y=\tan^{-1}x$ を考える． $x=\tan y$ ， $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d}{dy}\tan y=\sec^2 y$ なので $dx=\sec^2 y\,dy$ ． $x=0$ のとき $y=0$ ． $x\sqrt{3}$ のとき $y=\dfrac{\pi}{3}$ ．領域 D の面積は

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}}\tan^{-1}x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}y\sec^2 y\,dy\\
&=\left[y\tan y-\int\tan y\,dy\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\Big[y\tan y+\ln|\cos y|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}+\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\\
&=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3}-\ln 2\ .
\end{aligned}
$$



終

$\boxed{問8.2.3}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $0 \leq y \leq \sin^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ．

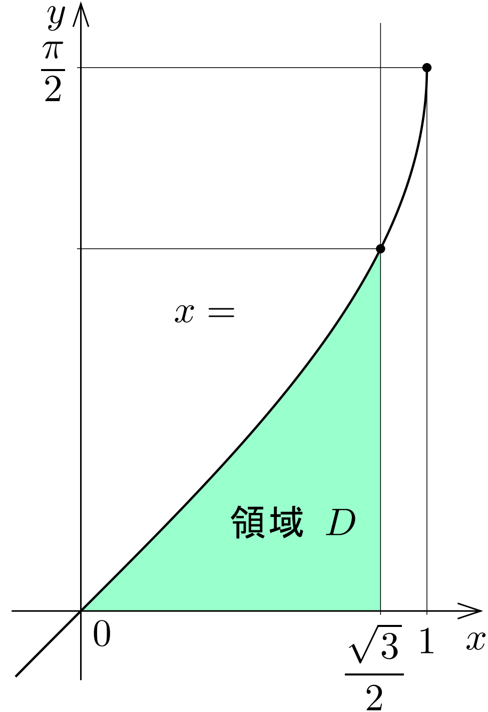
$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$y = \sin^{-1}x \iff x = \qquad .$$

関数 $y = \sin^{-1}x$ について，$x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $y = \qquad = \quad$．領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \quad$ で，この範囲で

$\leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ．領域 D の面積は

$$\int_0 \left(\qquad \right) dy =$$



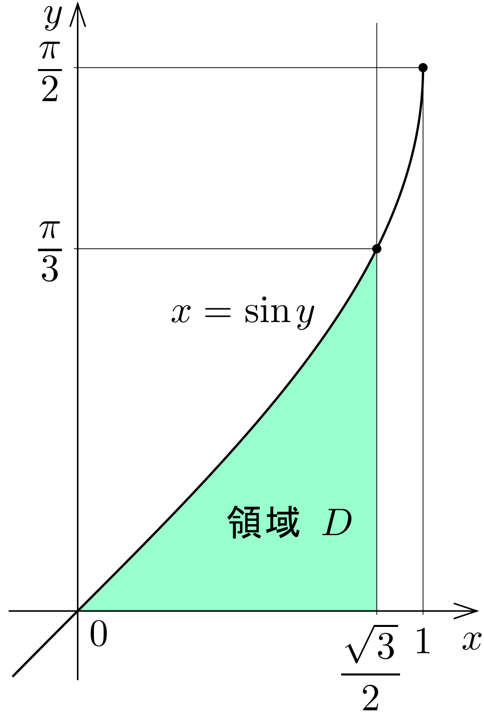
$\boxed{\text{問}8.2.3}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $0 \leq y \leq \sin^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき,

$$y = \sin^{-1}x \iff x = \sin y \ .$$

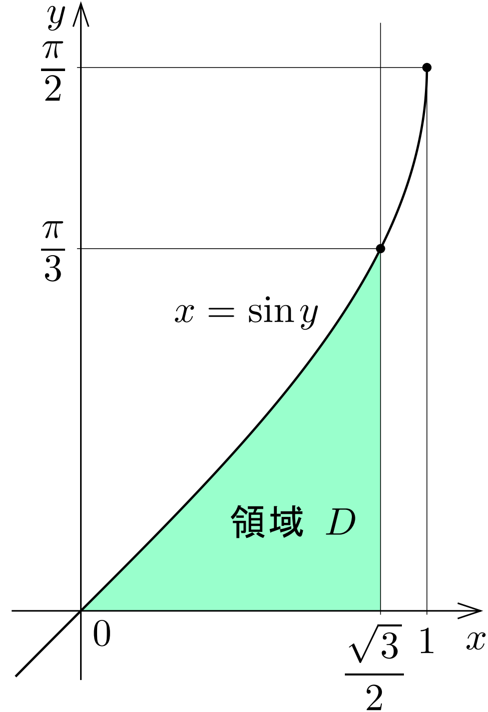
関数 $y = \sin^{-1}x$ について, $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $y = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ で, この範囲で $\sin y \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域 D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin y\right) dy = \left[\frac{\sqrt{3}}{2}y + \cos y\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$



領域 D の面積は

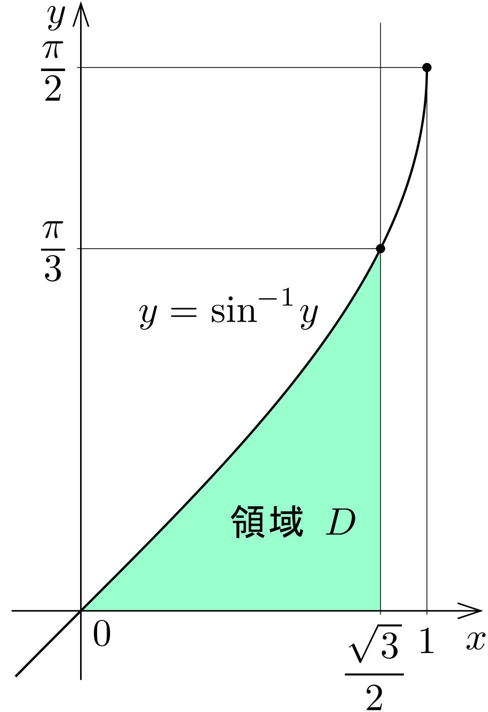
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin y\right)dy &= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}y+\cos y\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}-1 \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$



領域 D の面積を次のようにも計算できる．
x の関数 $y=\sin^{-1}x$ を考える． $x=\sin y$ ，
$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d}{dy}\sin y=\cos y$ なので $dx=\cos y\,dy$ ．

$x=0$ のとき $y=0$ ． $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき
$y=\dfrac{\pi}{3}$ ．領域 D の面積は

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin^{-1}x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} y\cos y\,dy \\
&= \Big[\,y\sin y-\int\sin y\,dy\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \Big[\,y\sin y+\cos y\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
&= \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0 \\
&= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}-\frac{1}{2}\ .
\end{aligned}
$$



終