8.2　平面領域の面積

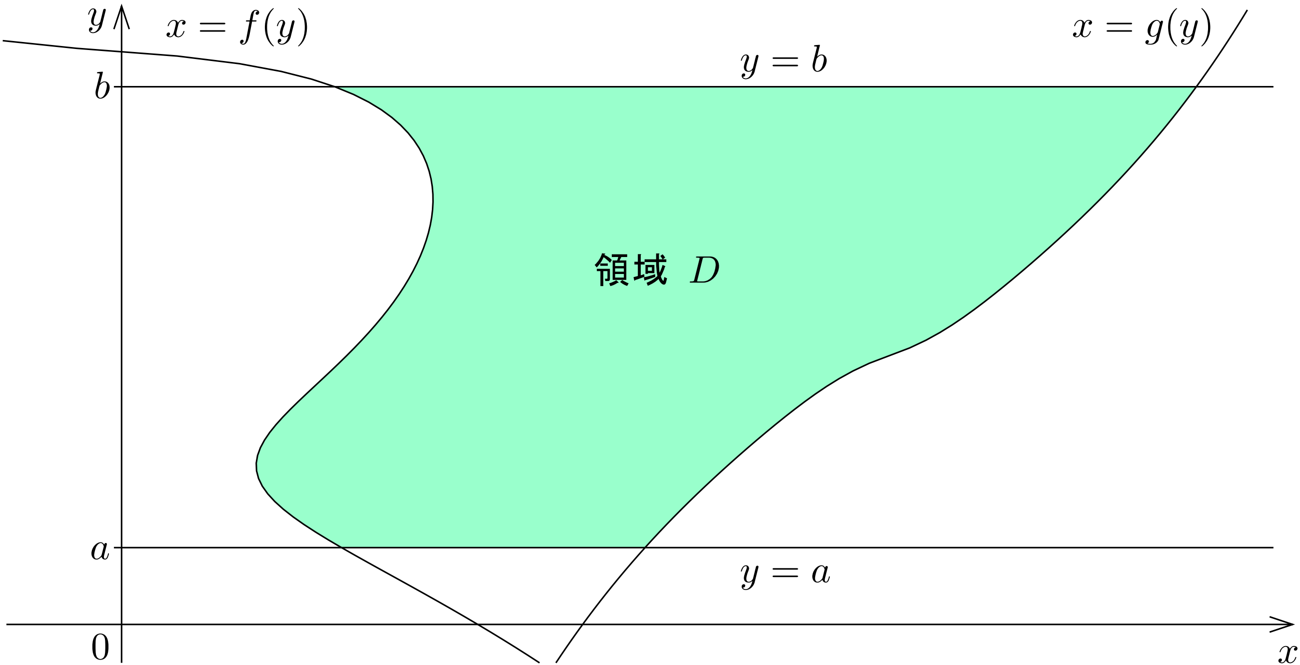
xy 座標平面における領域の面積を計算するために y で積分することがある.

実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能であり，区間 $[a,b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする．xy 座標平面において，連立不等式

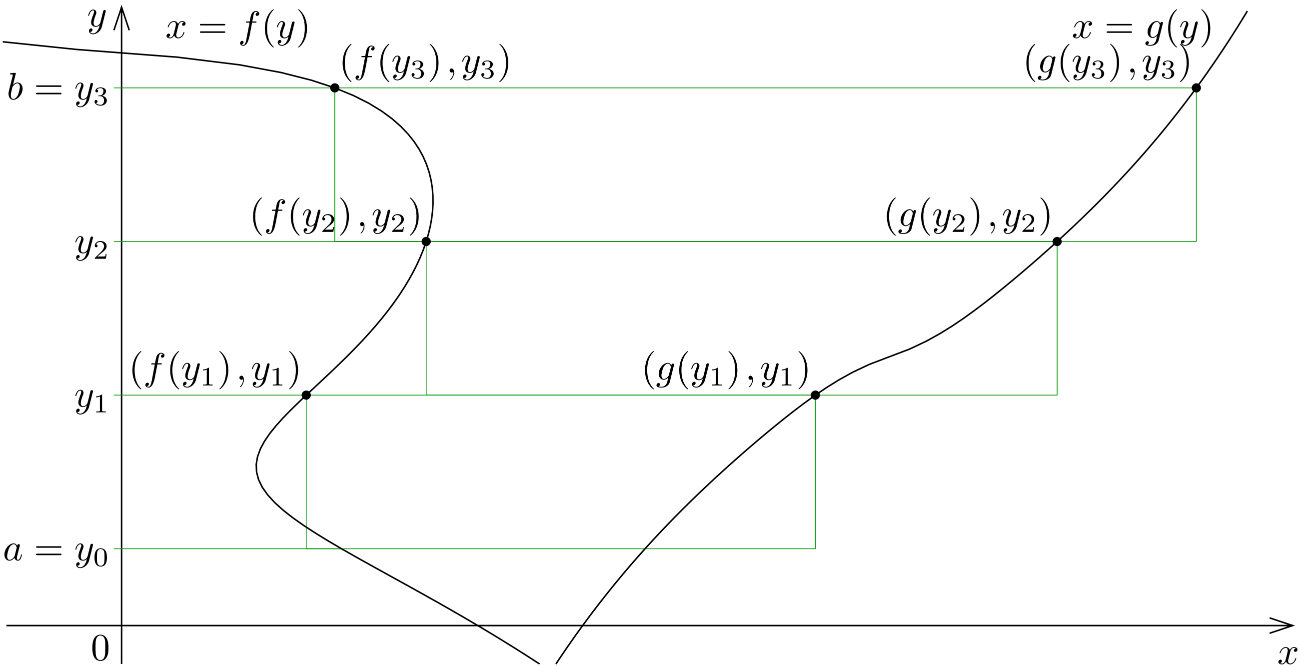
$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

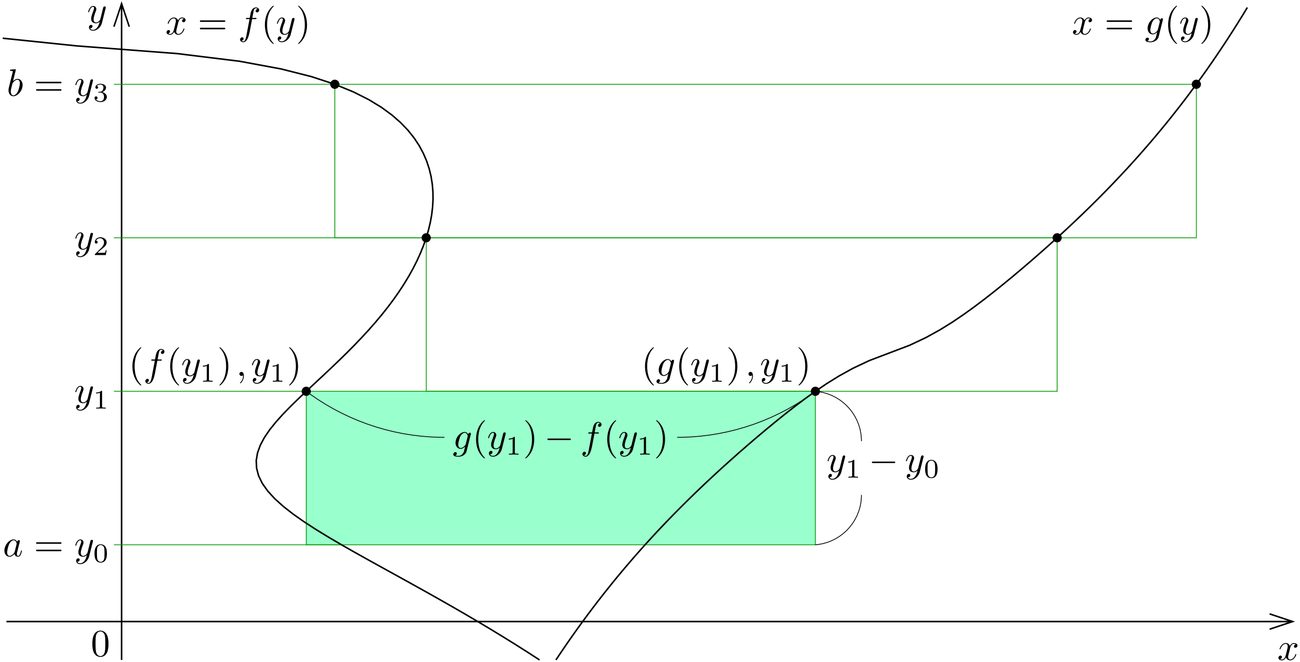
で表される領域を D の面積を考える．

例えば領域 D が下図の明緑色の図形であるとする.



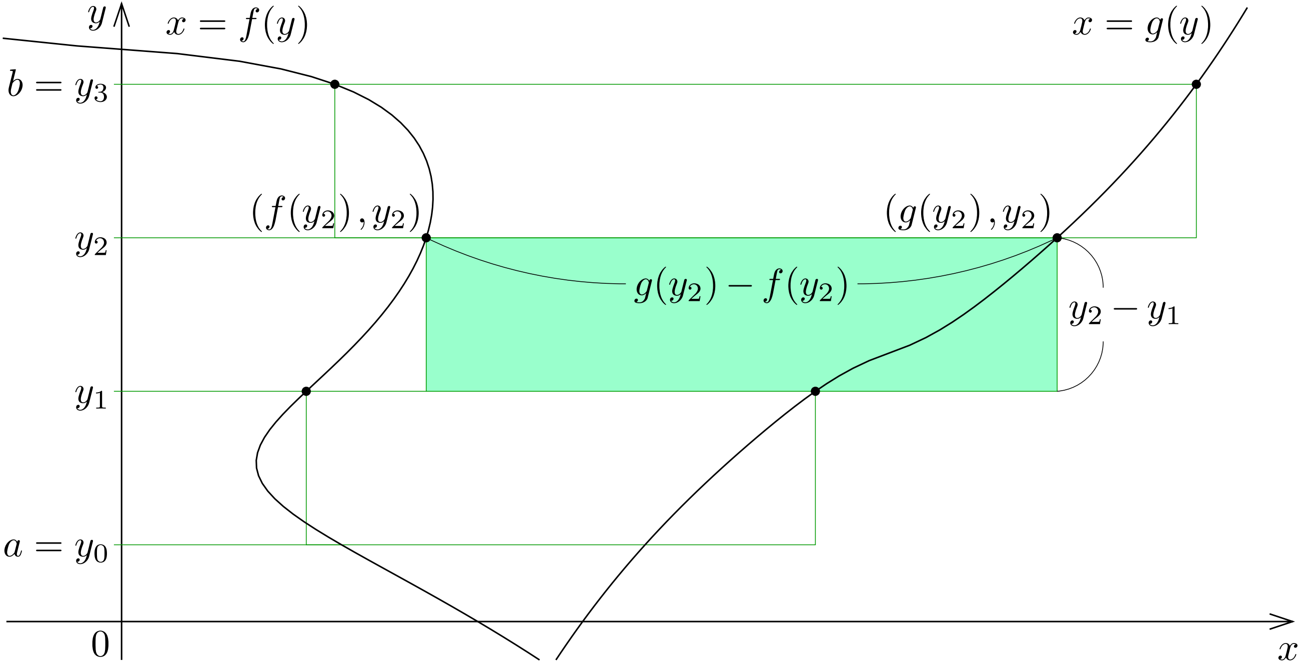
$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 = b$ である実数 y_0, y_1, y_2, y_3 をとり，下図の状況を考える.





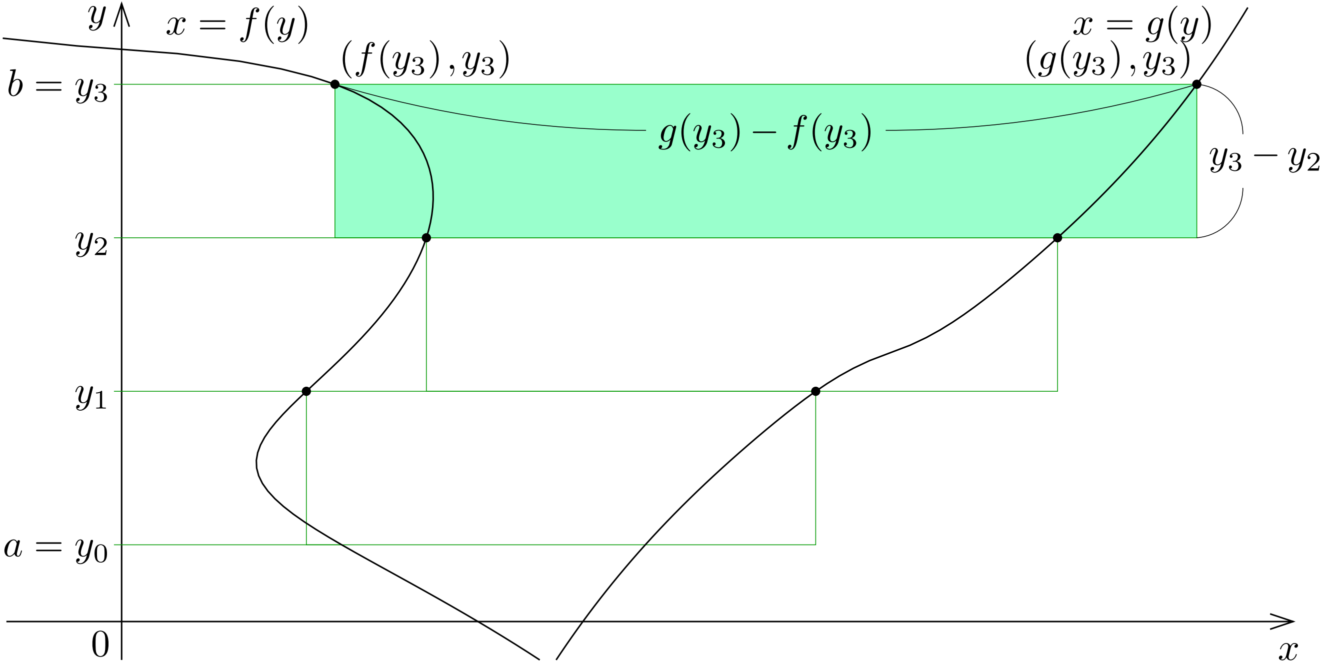
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0) \ .$$



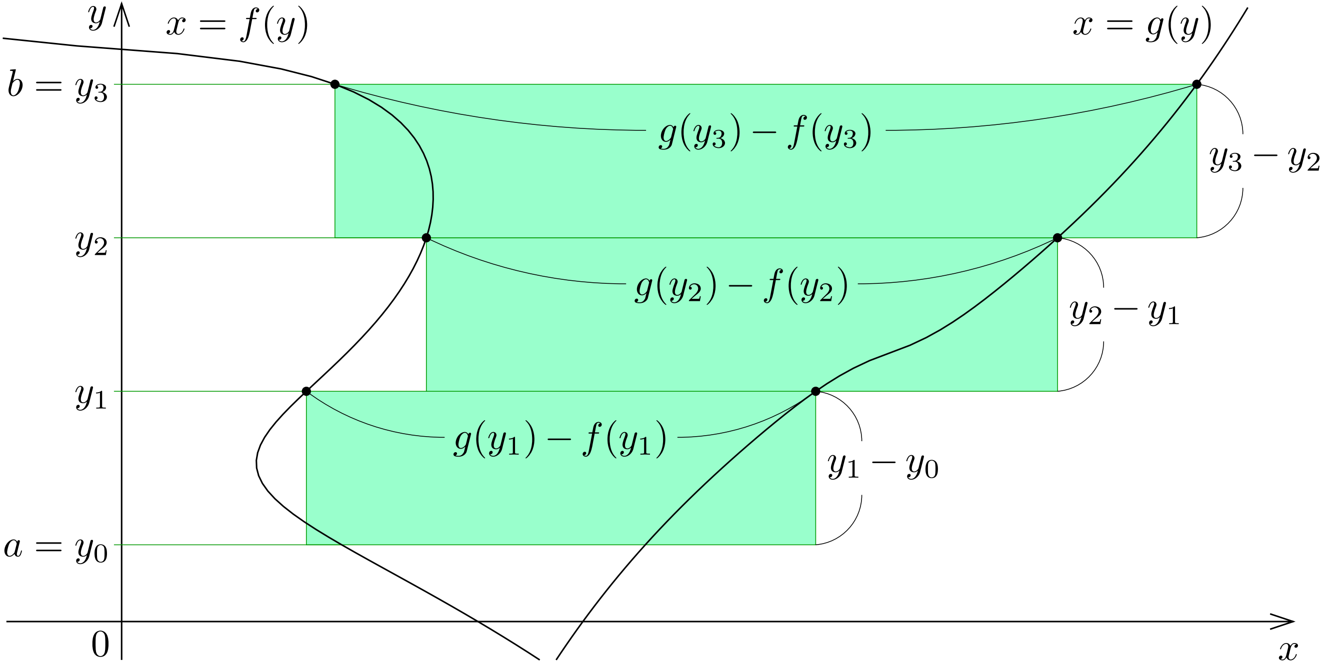
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) \ .$$



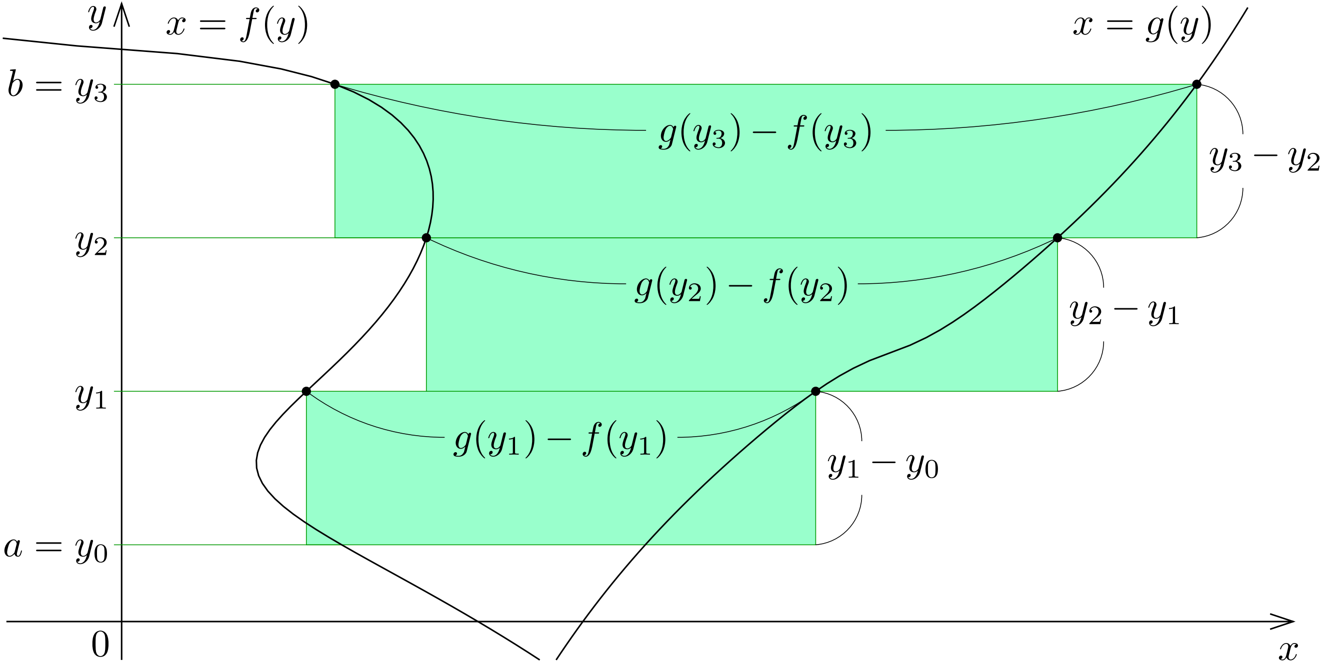
上図の明緑色の長方形の面積は

$$\{g(y_3) - f(y_3)\}(y_3 - y_2)\ .$$



上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積は

$$\{g(y_1) - f(y_1)\}(y_1 - y_0) + \{g(y_2) - f(y_2)\}(y_2 - y_1) + \{g(y_3) - f(y_3)\}(y_3 - y_2)\ .$$



上図の明緑色の 3 個の長方形を併せた図形の面積 S_3 は

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \left[\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})\right] .$$

正の各自然数 n に対して，

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0\,, y_1\,, y_2\,, y_3\,, \ldots\,, y_{n-1}\,, y_n$ をとり，関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\{ g(y_k) - f(y_k) \} (y_k - y_{k-1}) \right]$$

を考える.

正の各自然数 n に対して，

$$a = y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_{n-1} \leq y_n = b$$

である実数 $y_0\,, y_1\,, y_2\,, y_3\,, \ldots\,, y_{n-1}\,, y_n$ をとり，関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和

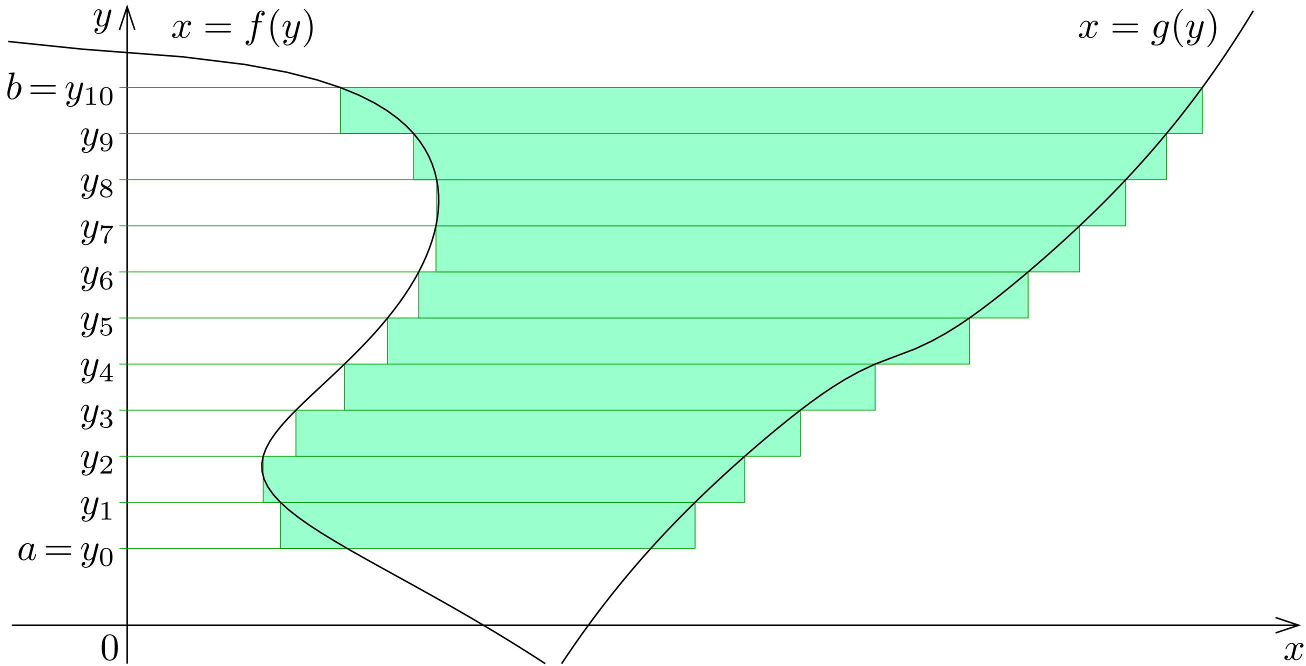
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$$

を考える．

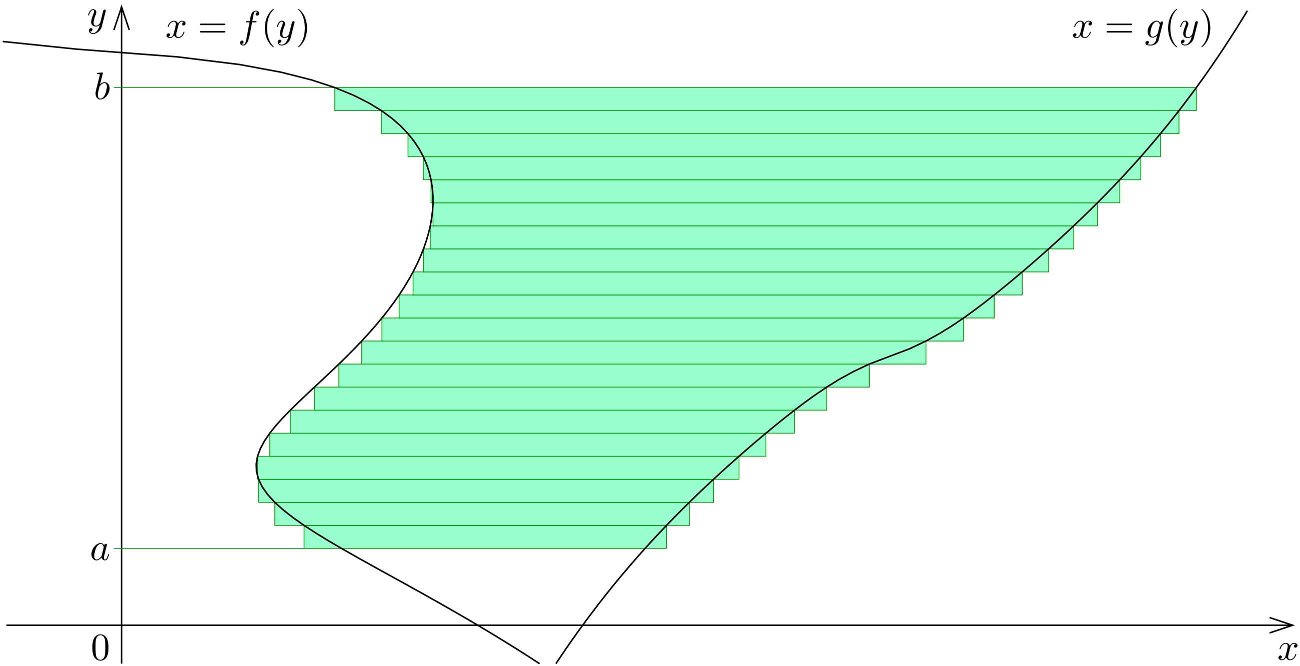
$$\delta_n = \max\{y_1 - y_0\,, y_2 - y_1\,, y_3 - y_2\,, \ldots\,, y_n - y_{n-1}\}$$

について， $n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする．つまり， $n \to \infty$ のとき $y_0\,, y_1\,,$ $y_2\,, y_3\,, \cdots\,, y_{n-1}\,, y_n$ の間隔は 0 に限りなく近づくとする．

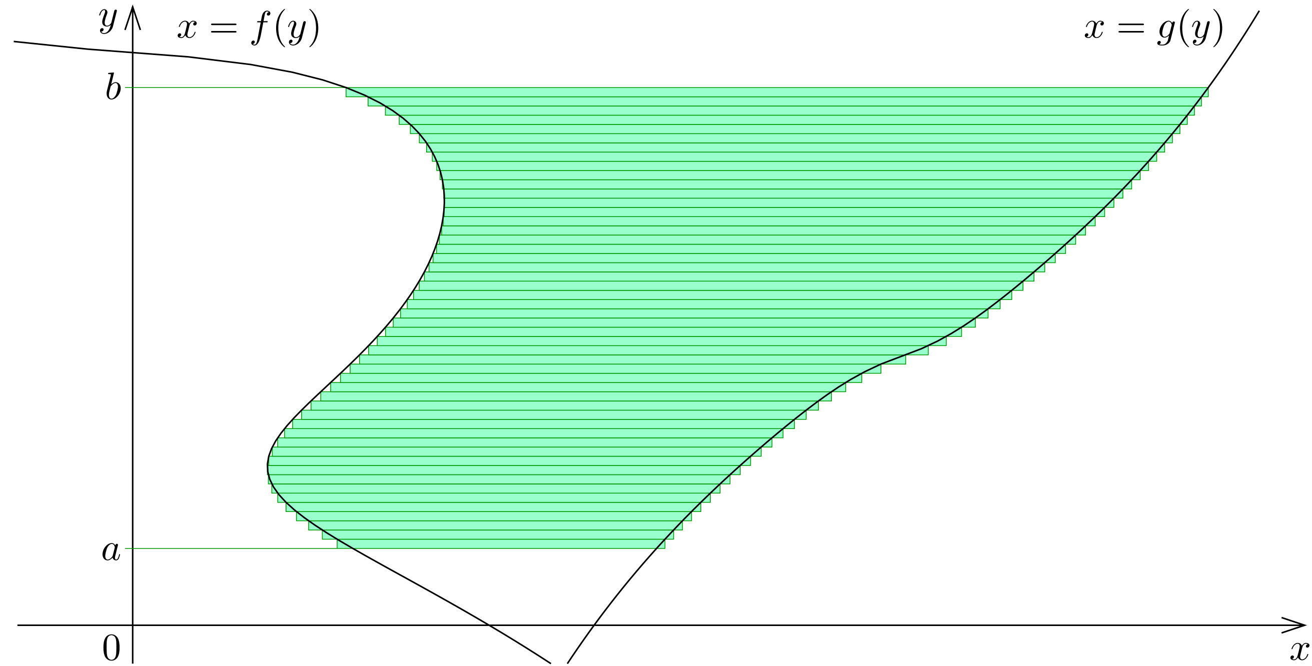
$n=10$ のとき，下図の 10 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_{10}=\sum_{k=1}^{10}\left[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})\right]$ である.



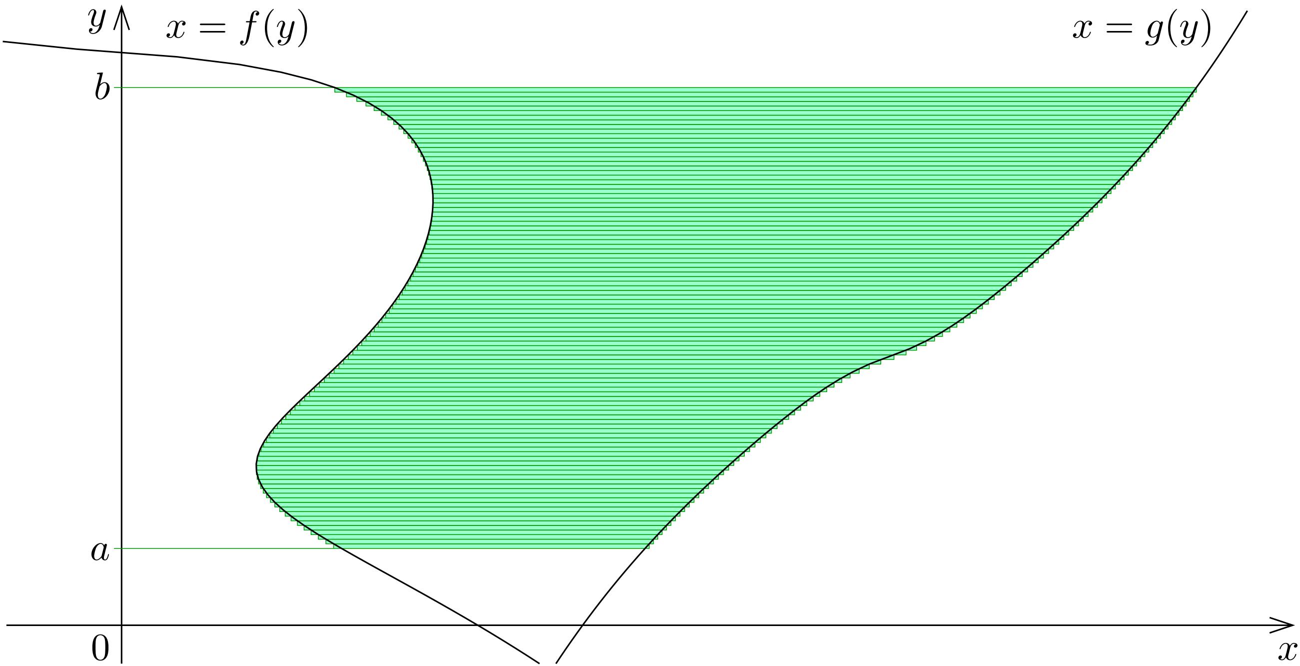
$n = 20$ のとき，下図の 20 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和 $S_{20} = \sum_{k=1}^{20} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$ である.



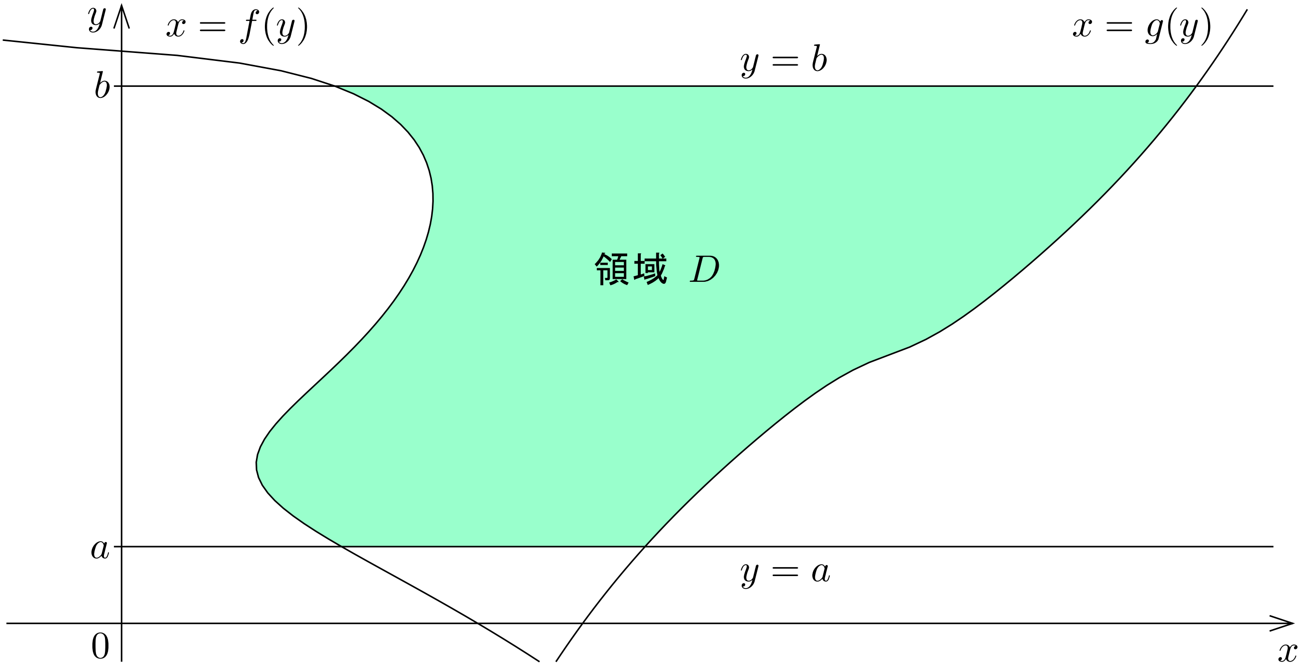
$n=50$ のとき，下図の 50 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_{50}=\sum_{k=1}^{50}\left[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})\right]$ である．

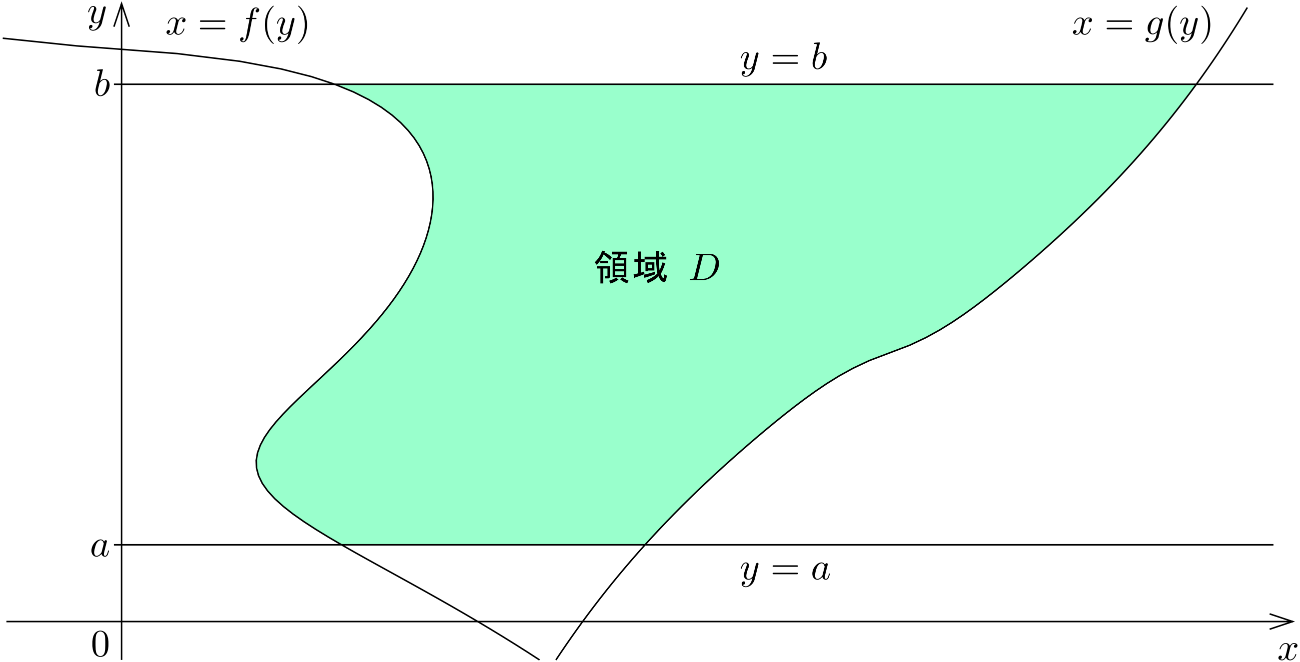


$n=100$ のとき，下図の 100 個の明緑色の長方形を併せた図形の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_{100}=\sum_{k=1}^{100}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ である.



関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ は $n \to \infty$ のとき下図の領域 D の面積に限りなく近づいていく.





つまり，上図の領域 D の面積は，関数 $g(y) - f(y)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} [\{g(y_k) - f(y_k)\}(y_k - y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である.

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である．

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})\right]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\left[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})\right]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}\,dy$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(y)-f(y)\}\,dy\ .$$

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ である．関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}dy$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b\{g(y)-f(y)\}dy\ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ の定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}dy$ である．

領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ である．関数 $f(y)$ と $g(y)$ とが a から b まで積分可能なので，関数 $g(y)-f(y)$ も a から b まで積分可能である． $\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ なので，関数 $g(y)-f(y)$ のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}[\{g(y_k)-f(y_k)\}(y_k-y_{k-1})]$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}dy$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b\{g(y)-f(y)\}dy\ .$$

故に，領域 D の面積は関数 $g(y)-f(y)$ の定積分 $\int_a^b\{g(y)-f(y)\}dy$ である．

このようにして次の定理が成り立つ．

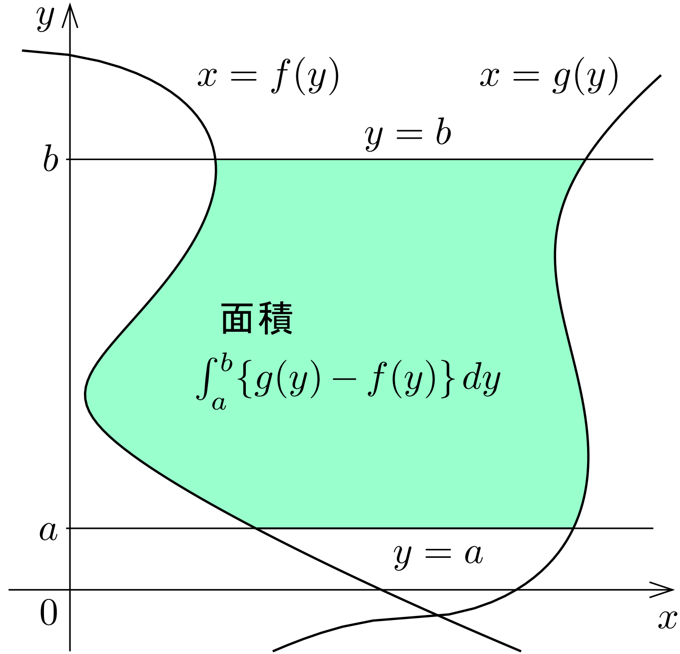
定理　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a,b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(y) - f(y)\}\,dy$$

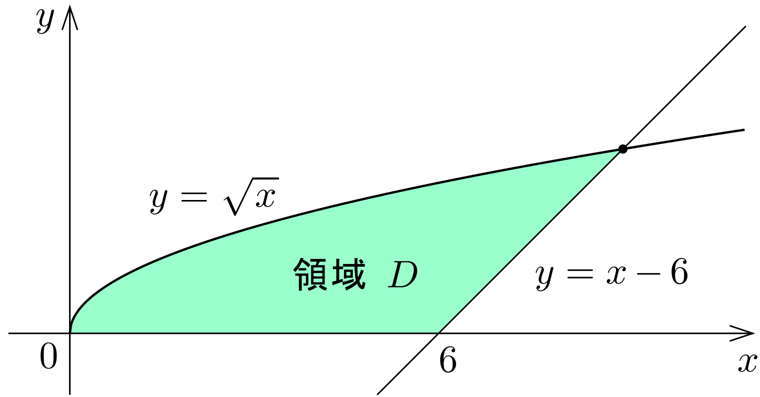
である．



この定理において，領域の点の y 座標の範囲と，その範囲で $f(y) \leq g(y)$ であるかどうかに注意すること．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

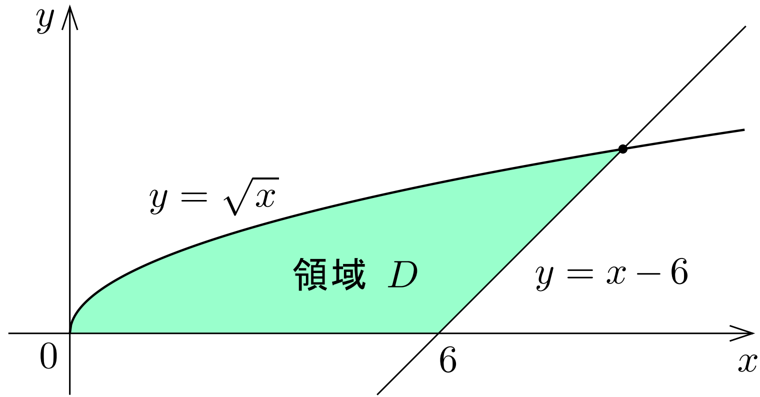
$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.



例 xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \quad .$$



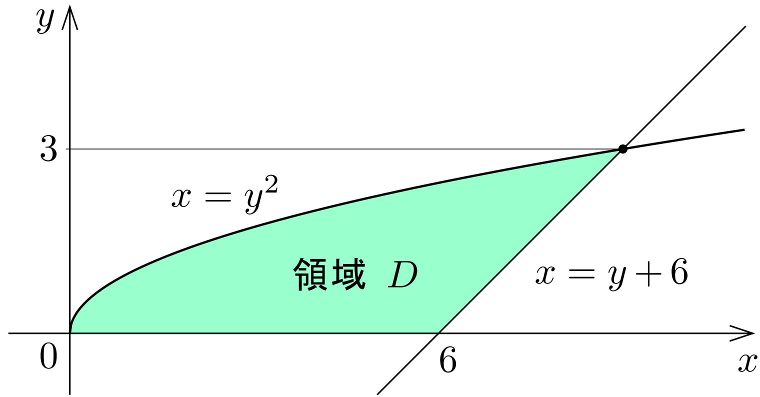
また,

$$y = x-6 \iff x = y+6 \ .$$

例 xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 .$$



また,

$$y = x-6 \iff x = y+6 .$$

$x=y^2$ かつ $x=y+6$ とすると, $y^2=y+6$, $y=3,-2$;

更に $y \geq 0$ とすると $y=3$.

領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq 3$ で, この範囲で $y+6 \geq y^2$.

$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

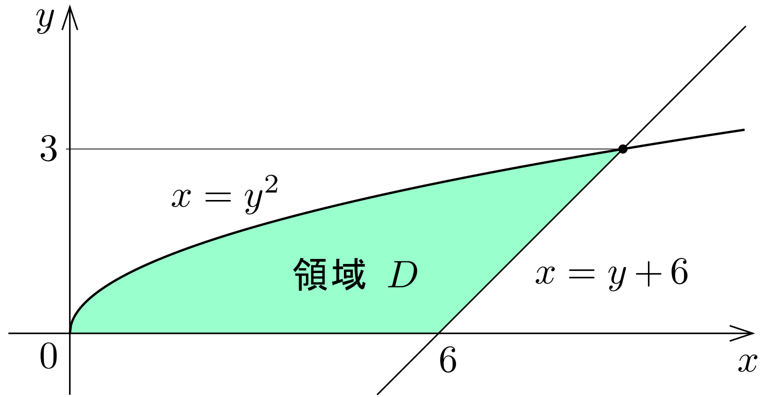
$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \quad .$$

また,

$$y = x-6 \iff x = y+6 \ .$$

$x=y^2$ かつ $x=y+6$ とすると, $y^2=y+6$, $y=3,-2$;

更に $y \geq 0$ とすると $y=3$.

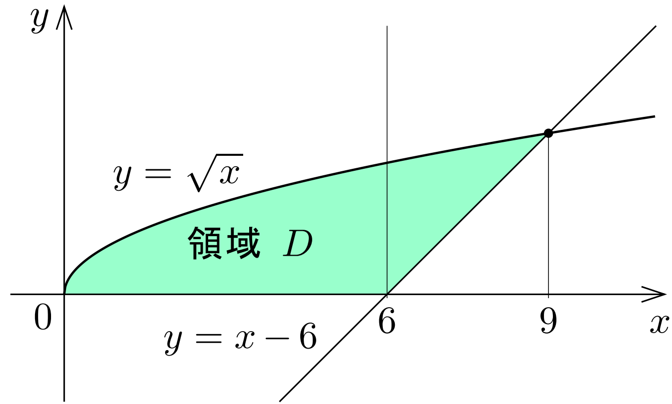


領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq 3$ で, この範囲で $y+6 \geq y^2$. 領域 D の面積は

$$\int_0^3 (y+6-y^2)\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + 6y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^3 = \frac{27}{2} \ .$$

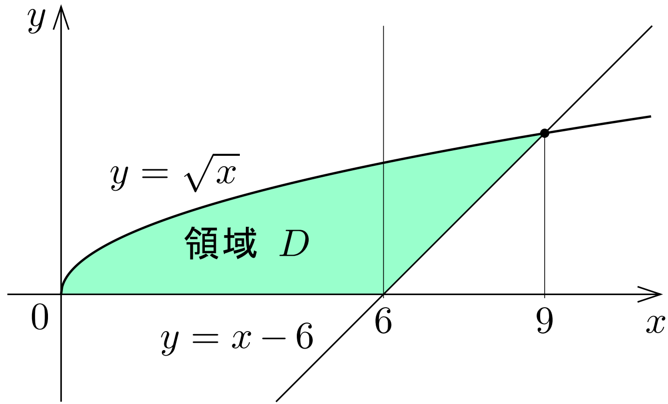
例 xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

領域 D の面積を x について積分して求めるには, D を $0 \leq x \leq 6$ の部分と $6 \leq x \leq 9$ の部分とに分けて計算する.



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

　領域 D の面積を x について積分して求めるには, D を $0 \leq x \leq 6$ の部分と $6 \leq x \leq 9$ の部分とに分けて計算する.



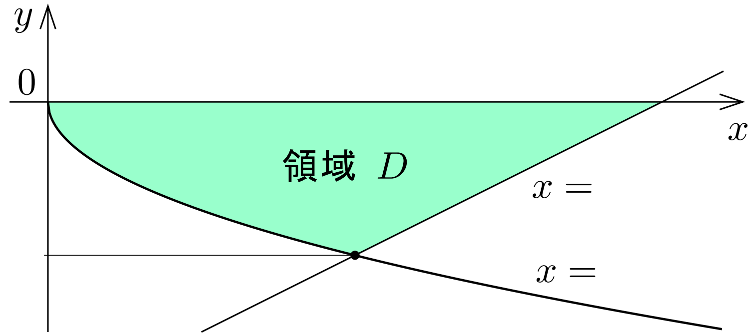
$$\int_0^6 \sqrt{x}\,dx + \int_6^9 \left\{\sqrt{x} - (x-6)\right\} dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^6 + \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_6^9$$

$$= 4\sqrt{6} + 6\sqrt{9} - \frac{81}{2} + 54 - 4\sqrt{6} + 18 - 36$$

$$= \frac{27}{2}\ .$$

問8.2.1 xy 座標平面において関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=\dfrac{x}{2}-4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.



$y=-\sqrt{x}$ のとき $y \leq 0$.

$x \geq 0$ かつ $y \leq 0$ のとき

$y=-\sqrt{x} \iff x=$.

また,

$y=\dfrac{x}{2}-4 \iff x=$.

$x=$ かつ $x=$ とすると, $=$, $y=$, ; 更に $y \leq 0$ とすると $y=$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $\leq y \leq 0$ で, この範囲で $\geq$. 領域の面積は

$$\int^{0} \left(\qquad \right) dy =$$

$\boxed{\text{問}8.2.1}$ xy 座標平面において関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=\dfrac{x}{2}-4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

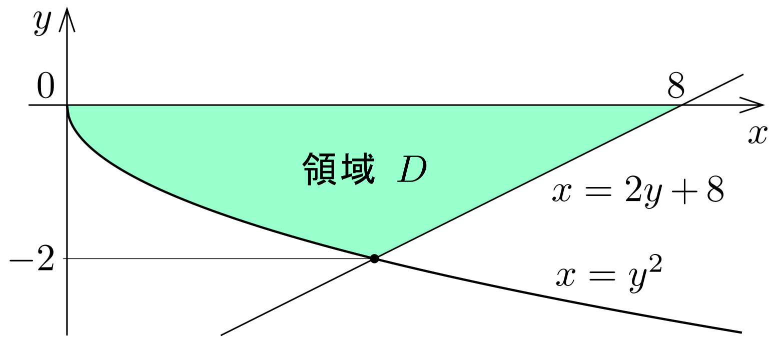
$y=-\sqrt{x}$ のとき $y \leq 0$.

$x \geq 0$ かつ $y \leq 0$ のとき

$y=-\sqrt{x} \iff x=y^2$.

また,

$y=\dfrac{x}{2}-4 \iff x=2y+8$.

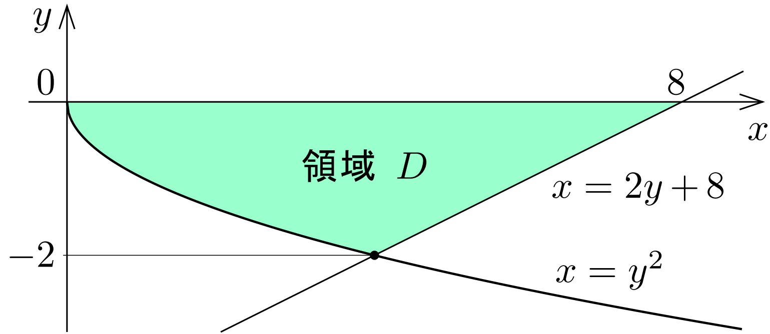


$x=y^2$ かつ $x=2y+8$ とすると, $y^2=2y+8$, $y=\quad,\quad$; 更に $y \leq 0$ とすると $y=\quad$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $\quad \leq y \leq 0$ で, この範囲で $2y+8 \quad y^2$. 領域の面積は

$$\int_{-2}^{0}(\qquad\qquad)\,dy=\Big[\qquad\qquad\Big]_{-2}^{0}=\qquad .$$

$\boxed{\text{問}8.2.1}$ xy 座標平面において関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=\dfrac{x}{2}-4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

$y=-\sqrt{x}$ のとき $y \leq 0$.



$x \geq 0$ かつ $y \leq 0$ のとき

$$y=-\sqrt{x} \iff x=y^2 \quad .$$

また,

$$y=\frac{x}{2}-4 \iff x=2y+8 \ .$$

$x=y^2$ かつ $x=2y+8$ とすると, $y^2=2y+8$, $y=4,-2$; 更に $y \leq 0$ とすると $y=-2$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $-2 \leq y \leq 0$ で, この範囲で $2y+8 \geq y^2$. 領域の面積は

$$\int_{-2}^{0}(\qquad\qquad\qquad)\,dy=\Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]_{-2}^{0}= \qquad .$$

$\boxed{\text{問}8.2.1}$ xy 座標平面において関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=\dfrac{x}{2}-4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

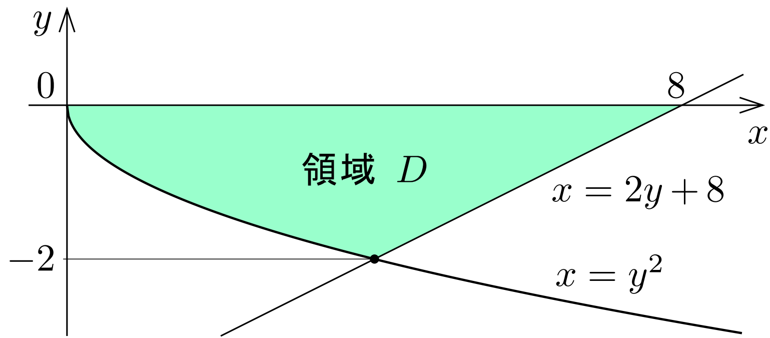
$y=-\sqrt{x}$ のとき $y \leq 0$.

$x \geq 0$ かつ $y \leq 0$ のとき

$$y=-\sqrt{x} \iff x=y^2 \quad .$$

また,

$$y=\frac{x}{2}-4 \iff x=2y+8 \ .$$

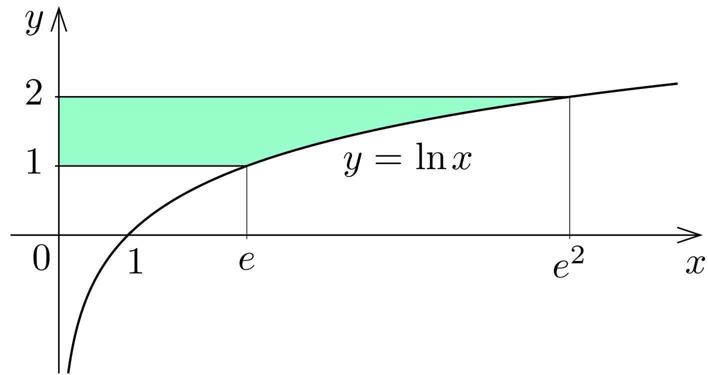


$x=y^2$ かつ $x=2y+8$ とすると, $y^2=2y+8$, $y=4,-2$; 更に $y \leq 0$ とすると $y=-2$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $-2 \leq y \leq 0$ で, この範囲で $2y+8 \geq y^2$. 領域の面積は

$$\int_{-2}^{0}(2y+8-y^2)\,dy=\left[y^2+8y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{0}=\frac{28}{3} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

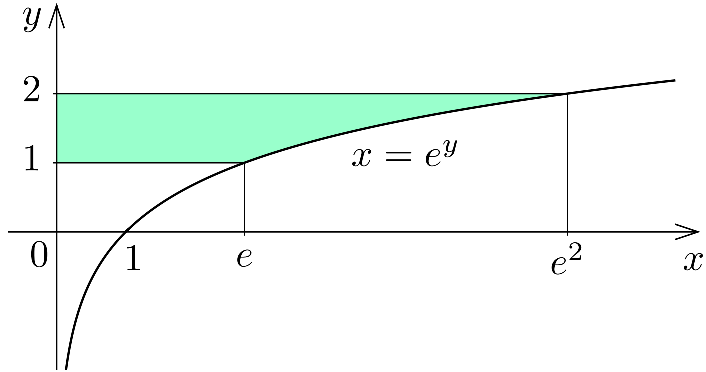
$\boxed{例}$ xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ ($x > 0$) のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.



例 xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ ($x > 0$) のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

正の各実数 x 及び各実数 y について

$$y = \ln x \iff x = e^y \quad .$$

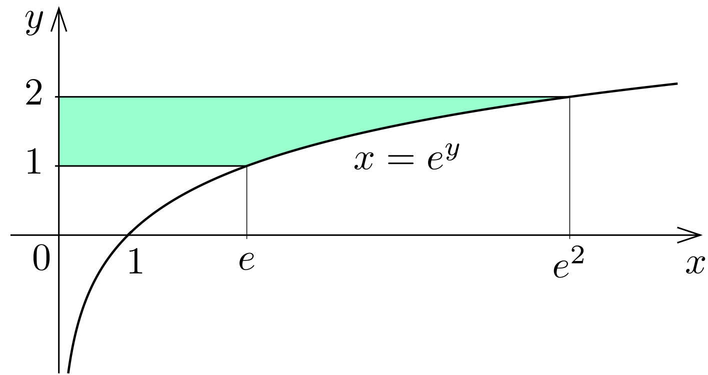


$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ （ $x > 0$ ） のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

正の各実数 x 及び各実数 y について

$$y = \ln x \iff x = e^y \quad .$$

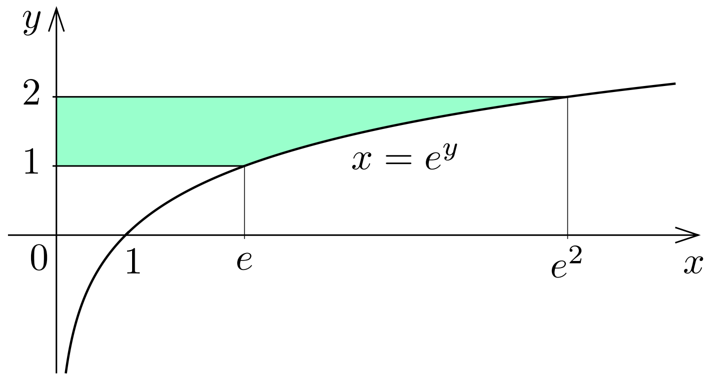
領域の点の y 座標の範囲は $1 \leq y \leq 2$. 各実数 y について $e^y > 0$.



例 xy 座標平面において関数 $y=\ln x$ ($x>0$) のグラフと直線 $y=1$ と直線 $y=2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

正の各実数 x 及び各実数 y について

$$y=\ln x \iff x=e^y \quad .$$

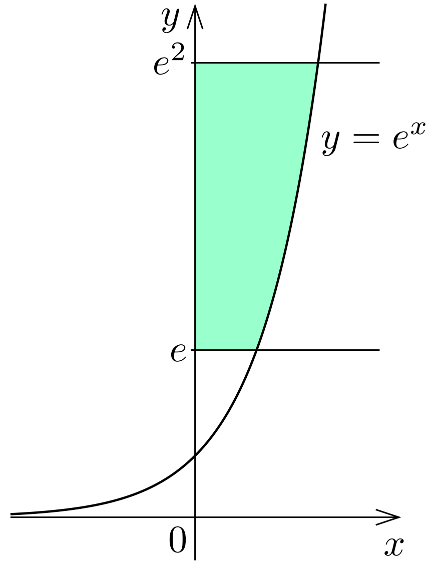


領域の点の y 座標の範囲は $1\leq y\leq 2$. 各実数 y について $e^y>0$. 領域の面積は

$$\int_1^2 e^y\,dy=\left[e^y\right]_1^2=e^2-e \quad .$$

終

$\boxed{問8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = e$ と直線 $y = e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.



各実数 x 及び正の各実数 y について

$$y \geq e^x \iff x \leq$$

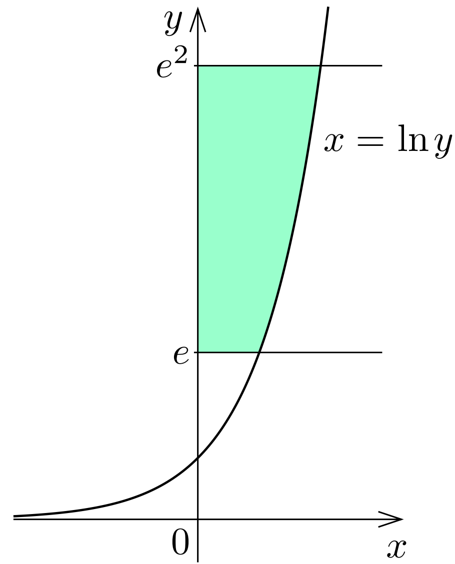
領域を表す連立不等式は

$$\leq y \leq \quad かつ \quad \leq x \leq$$

領域の面積は

$$\int \quad dy =$$

$\boxed{問8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = e$ と直線 $y = e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.



各実数 x 及び正の各実数 y について

$$y \geq e^x \iff x \leq \ln y$$

領域を表す連立不等式は

$$e \leq y \leq e^2 \text{ かつ } 0 \leq x \leq \ln y \quad .$$

領域の面積は

$$\int \qquad dy =$$

$\boxed{\text{問}8.2.2}$ xy 座標平面において関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=e$ と直線 $y=e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めよ.

各実数 x 及び正の各実数 y について

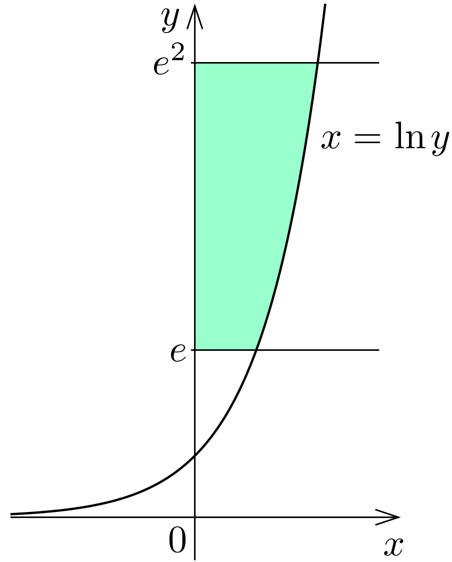
$$y \geq e^x \iff x \leq \ln y \quad .$$

領域を表す連立不等式は

$$e \leq y \leq e^2 \text{ かつ } 0 \leq x \leq \ln y \quad .$$

領域の面積は

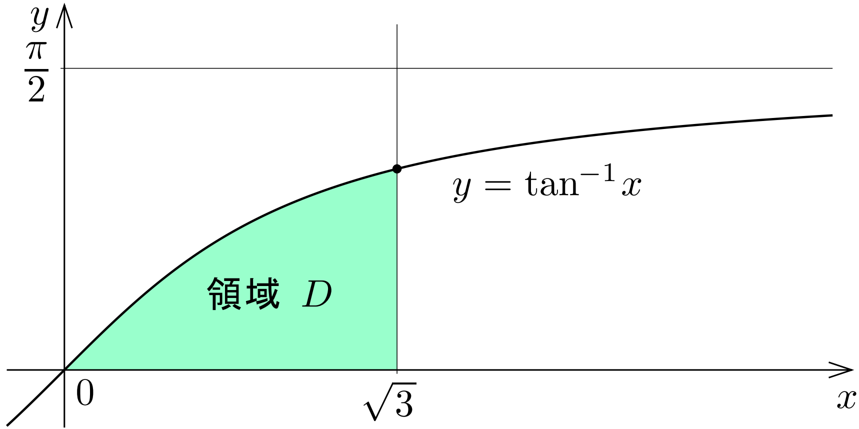
$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \ln y \, dy &= \left[y \ln y - y\right]_e^{e^2} \\ &= 2e^2 - e^2 - (e - e) \\ &= e^2 \ .\end{aligned}$$



$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

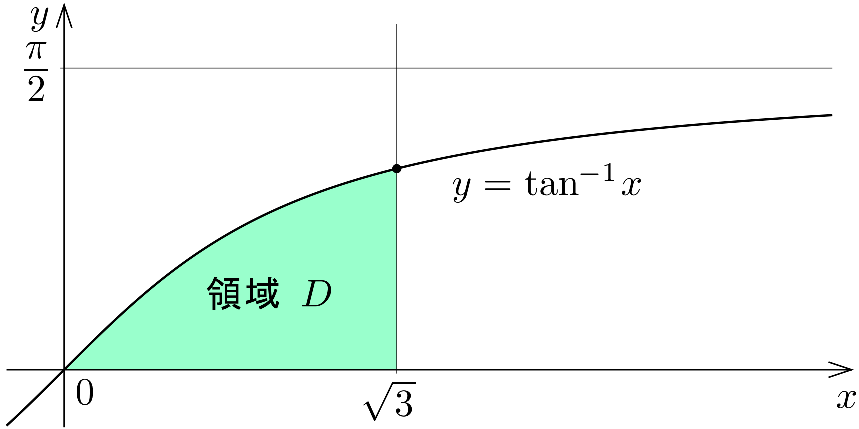
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.



例 xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$.



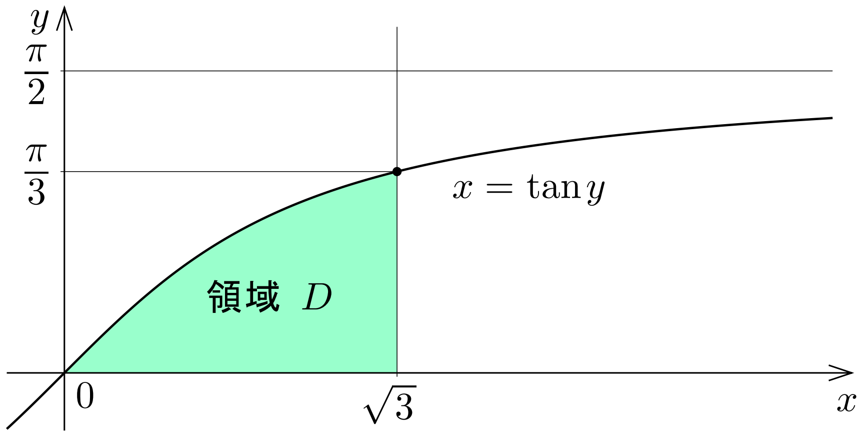
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$.

関数 $y = \tan^{-1} x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき

$y = \tan^{-1} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$.

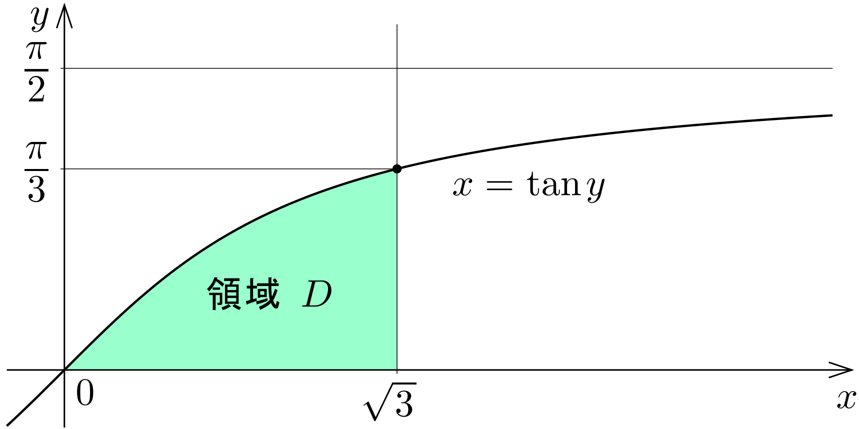


$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$.

関数 $y = \tan^{-1} x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき $y = \tan^{-1}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. 領域 D の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ であり, この範囲で $\tan y \leq \sqrt{3}$.

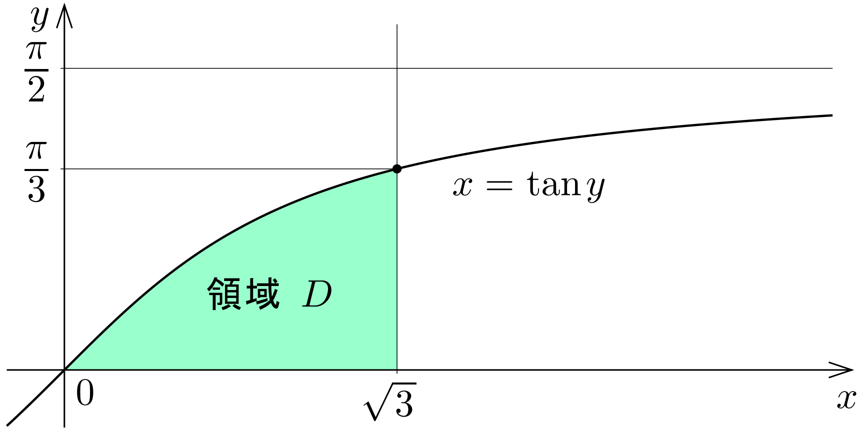


例 xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$.

関数 $y = \tan^{-1} x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき $y = \tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. 領域 D の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \frac{\pi}{3}$ であり, この範囲で $\tan y \leq \sqrt{3}$. 領域 D の面積は



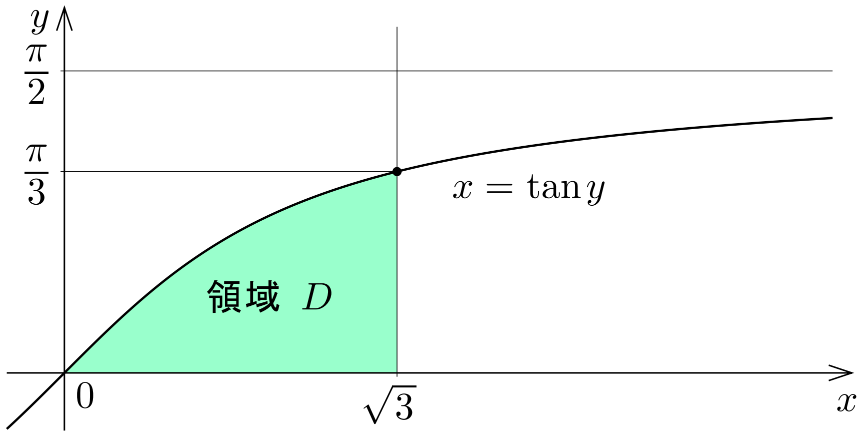
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3} - \tan y\right) dy = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

例 xy 座標平面において不等式 $x \leq \sqrt{3}$ と $0 \leq y \leq \tan^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求める.

$-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \tan y = x$.

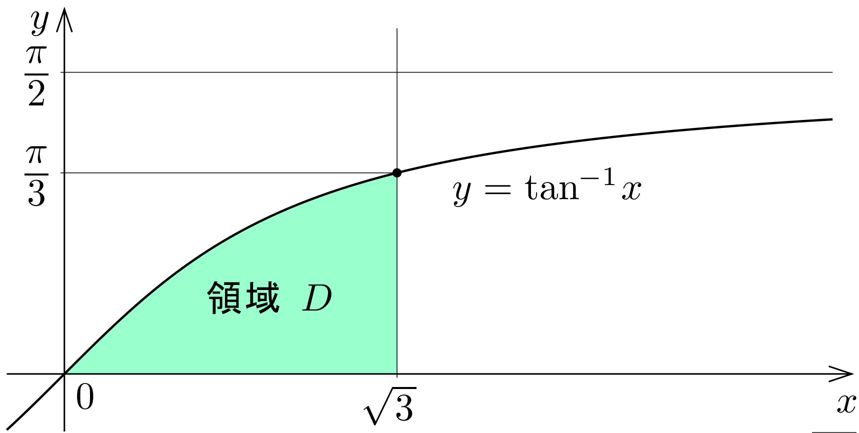
関数 $y = \tan^{-1} x$ について, $x = \sqrt{3}$ のとき $y = \tan^{-1} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$. 領域 D の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ であり, この範囲で $\tan y \leq \sqrt{3}$. 領域 D の面積は



$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{3} - \tan y\right) dy = \left[\sqrt{3}\, y + \ln|\cos y|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} + \ln\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{3} - \ln 2 .$$

領域 D の面積を次のようにも計算できる．x の関数 $y=\tan^{-1}x$ を考える． $x=\tan y$ ， $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d}{dy}\tan y=\sec^2 y$ なので $dx=\sec^2 y\,dy$ ． $x=0$ のとき $y=0$ ． $x\sqrt{3}$ のとき $y=\dfrac{\pi}{3}$ ．領域 D の面積は

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\sqrt{3}}\tan^{-1}x\,dx\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}} y\sec^2 y\,dy\\
&=\Big[y\tan y-\int\tan y\,dy\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\Big[y\tan y+\ln|\cos y|\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}+\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)\\
&=\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3}-\ln 2\ .
\end{aligned}
$$



終

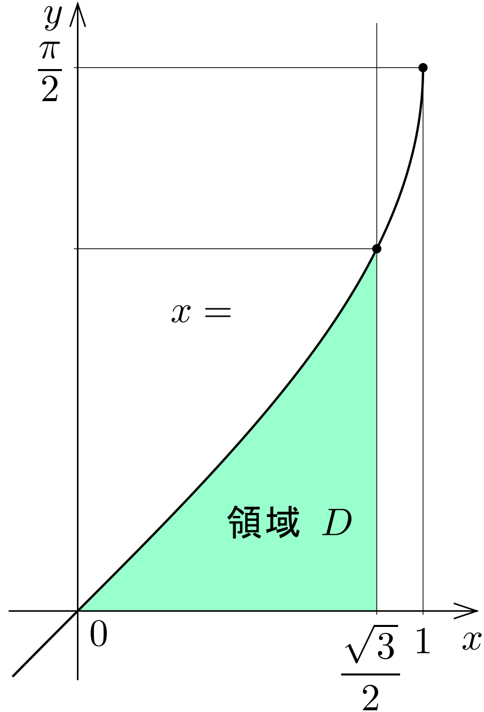
$\boxed{\text{問}8.2.3}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $0 \leq y \leq \sin^{-1}x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき,

$$y = \sin^{-1}x \iff x = \qquad .$$

関数 $y = \sin^{-1}x$ について, $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $y = \qquad = \qquad$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \qquad$ で, この範囲で $\qquad \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域 D の面積は

$$\int_0 \left(\qquad \right) dy =$$



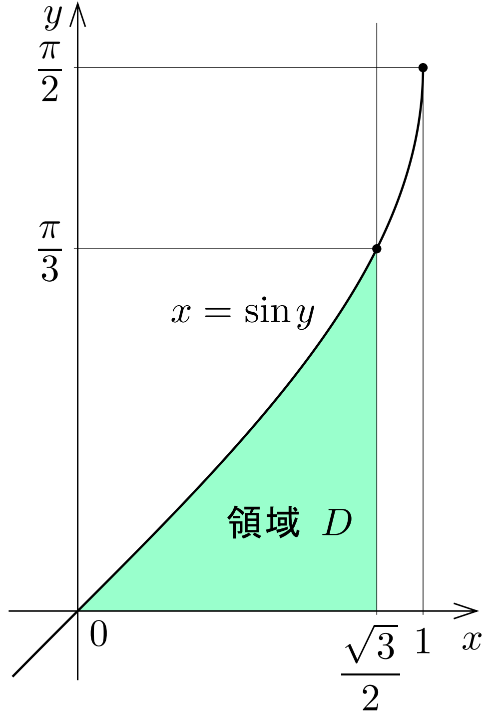
$\boxed{\text{問}8.2.3}$ xy 座標平面において不等式 $x \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $0 \le y \le \sin^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$-1 \le x \le 1$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ のとき,

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y \ .$$

関数 $y = \sin^{-1} x$ について, $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $y = \sin^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \le y \le \dfrac{\pi}{3}$ で, この範囲で $\sin y \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域 D の面積は

$$\int_0 \left(\qquad\qquad \right) dy =$$



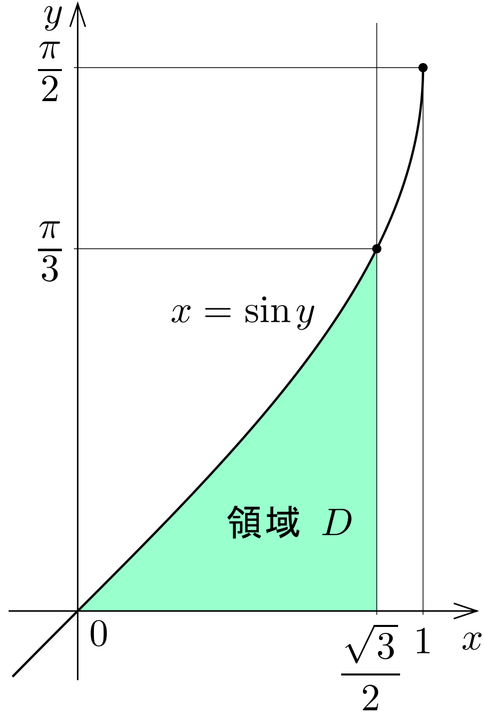
$\boxed{\text{問}8.2.3}$ xy 座標平面において不等式 $x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と $0 \leq y \leq \sin^{-1} x$ との連立で表される領域 D の面積を求めよ.

$-1 \leq x \leq 1$ かつ $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき,

$$y = \sin^{-1} x \iff x = \sin y\ .$$

関数 $y = \sin^{-1} x$ について, $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $y = \sin^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. 領域 D の点の y 座標の範囲は $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{3}$ で, この範囲で $\sin y \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域 D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin y \right) dy = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} y + \cos y \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

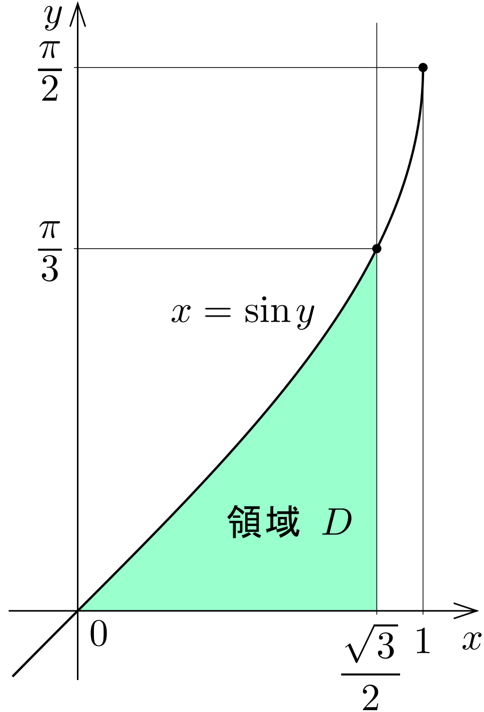


領域 D の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin y \right) dy = \left[\frac{\sqrt{3}}{2} y + \cos y \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

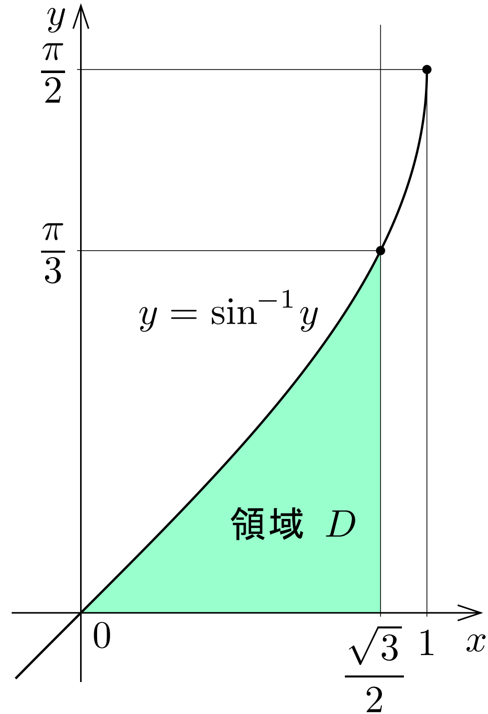
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} - 1$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - \frac{1}{2} \ .$$



領域 D の面積を次のようにも計算できる．
x の関数 $y=\sin^{-1}x$ を考える． $x=\sin y$ ，
$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{d}{dy}\sin y=\cos y$ なので $dx=\cos y\,dy$ ．
$x=0$ のとき $y=0$ ． $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき
$y=\dfrac{\pi}{3}$ ．領域 D の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin^{-1}x\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} y\cos y\,dy \\ &= \Big[y\sin y-\int\sin y\,dy\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \Big[y\sin y+\cos y\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}-\cos 0 \\ &= \frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}-\frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$



終