

8.3 立体領域の体積

定積分の定義を復習する.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で, 関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

とおく. S_n を f のリーマン和という. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, リーマン和 S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく. S_n を f のリーマン和という. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, リーマン和 S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

関数 f が a から b まで積分可能であるとき、関数 f は b から a まで積分可能であるといい、 f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する：
$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に、 $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

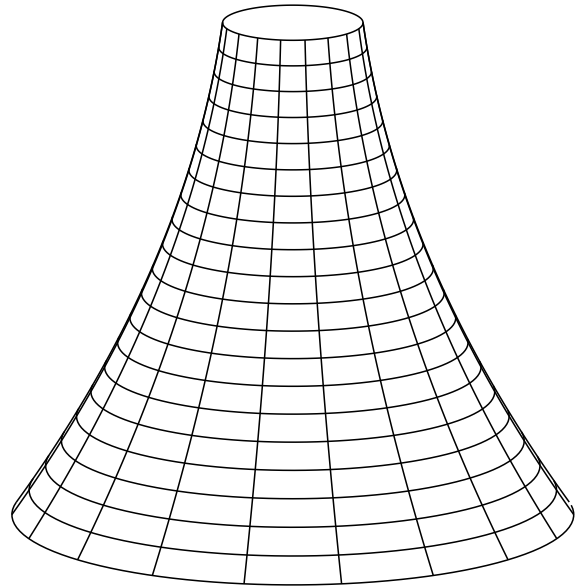
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に、 $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

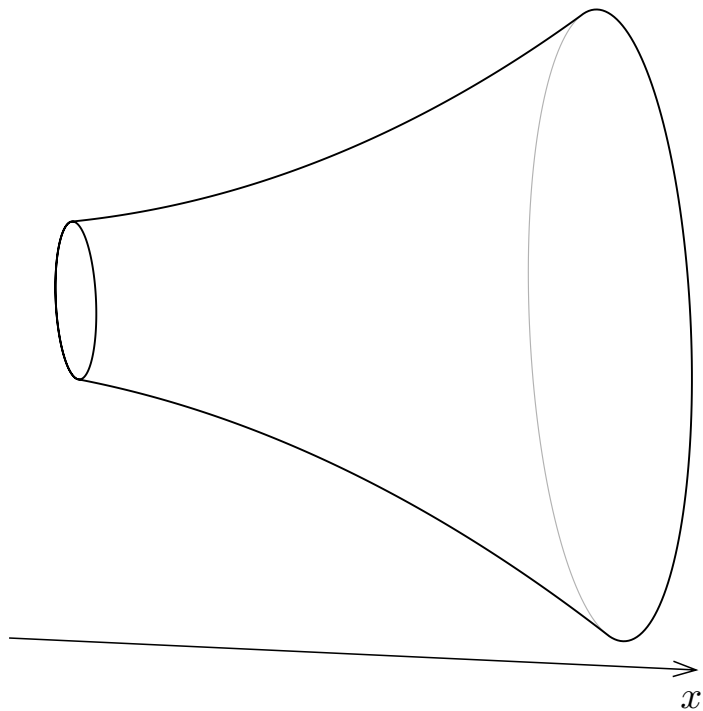
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

そこで、関数 f の定積分を計算するために、 f のリーマン和として $\sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ をしばしば用いる。

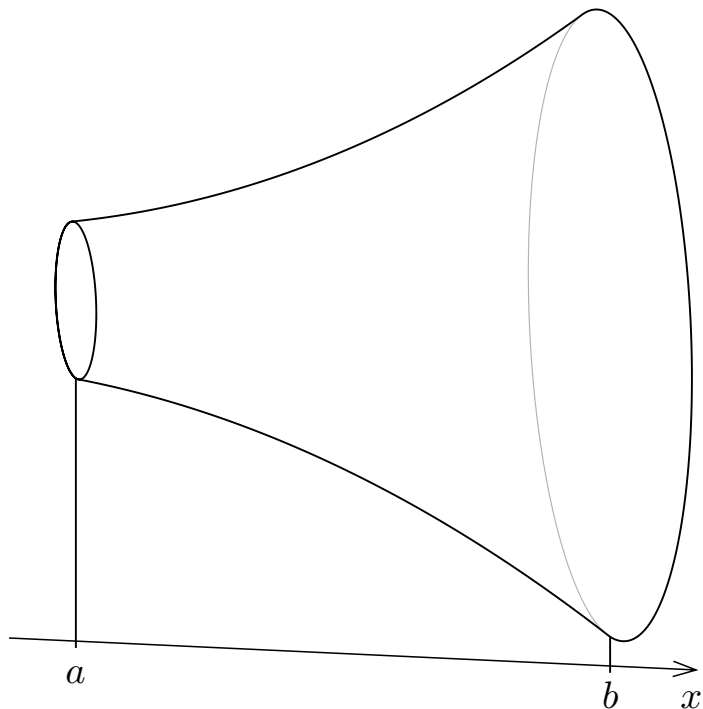
例として、右図のような立体図形 V （中も詰まっているものとして）の体積を求めることを考える。話を分かり易くするためにこの立体 V は回転体であるとする。



回転体 V に対して、右図の
ように、 V の中心軸と平行に
なるように x 座標軸を設定す
る。

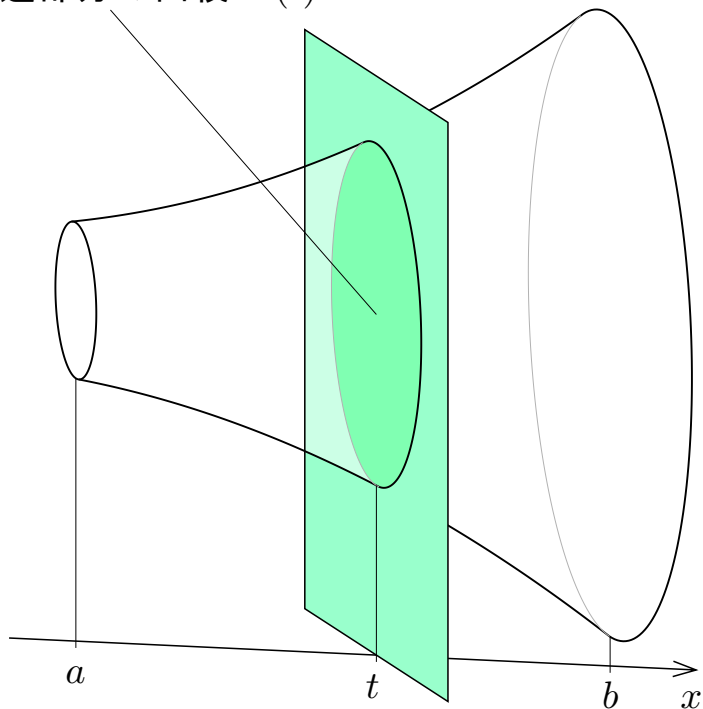


回転体 V に対して、右図の
ように、 V の中心軸と平行に
なるように x 座標軸を設定す
る。回転体 V に属す点の x
座標うち、最小値を a とお
き、最大値を b とおく。



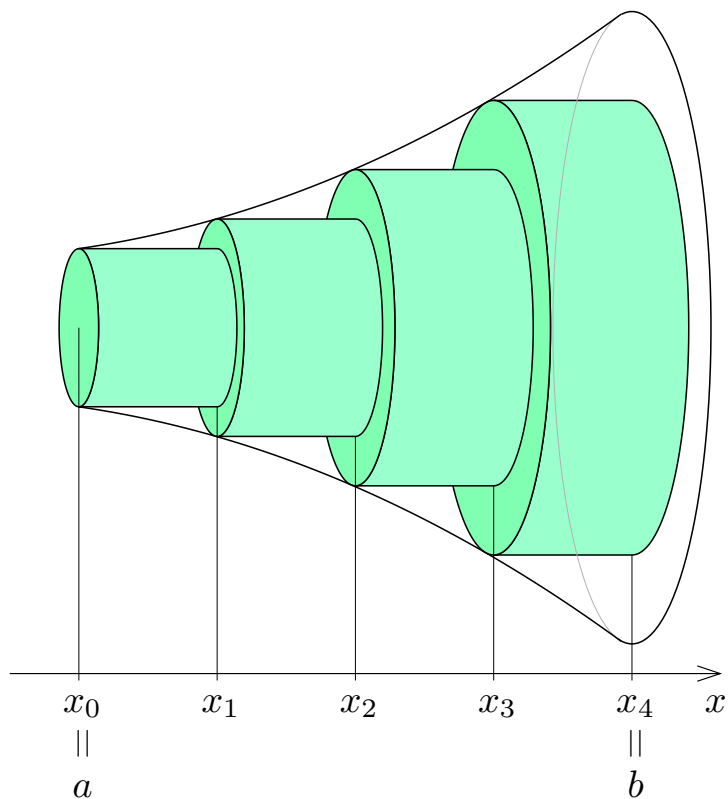
回転体 V に対して、右図のように、 V の中心軸と平行になるように x 座標軸を設定する。回転体 V に属す点の x 座標うち、最小値を a とおき、最大値を b とおく。更に、区間 $[a, b]$ の各実数 t に対して、 x 軸の座標 t の点に属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分である平面図形の面積を $S(t)$ とおく。この関数 S は a から b まで積分可能であるとする。

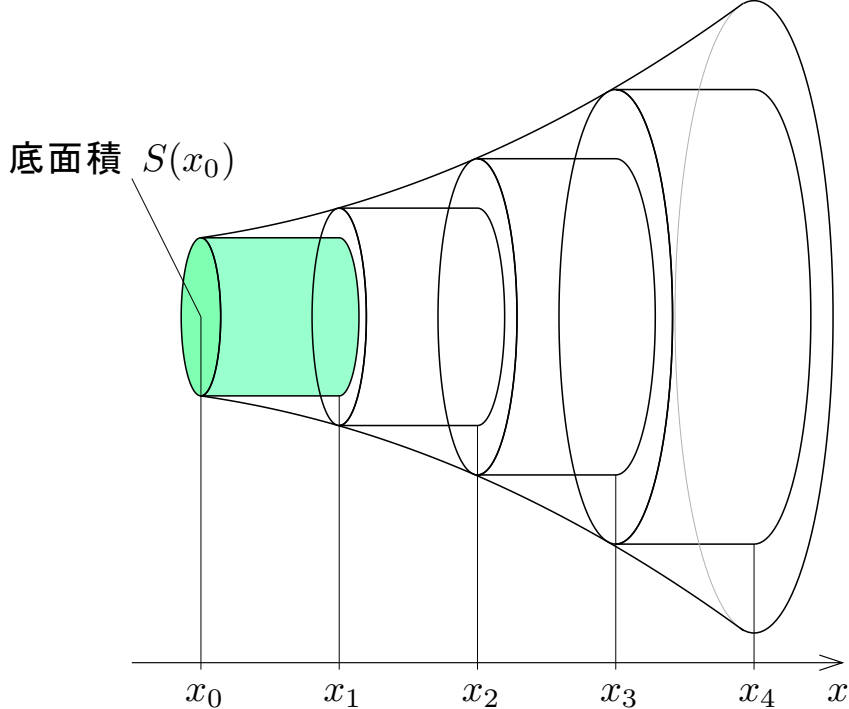
共通部分の面積 $S(t)$



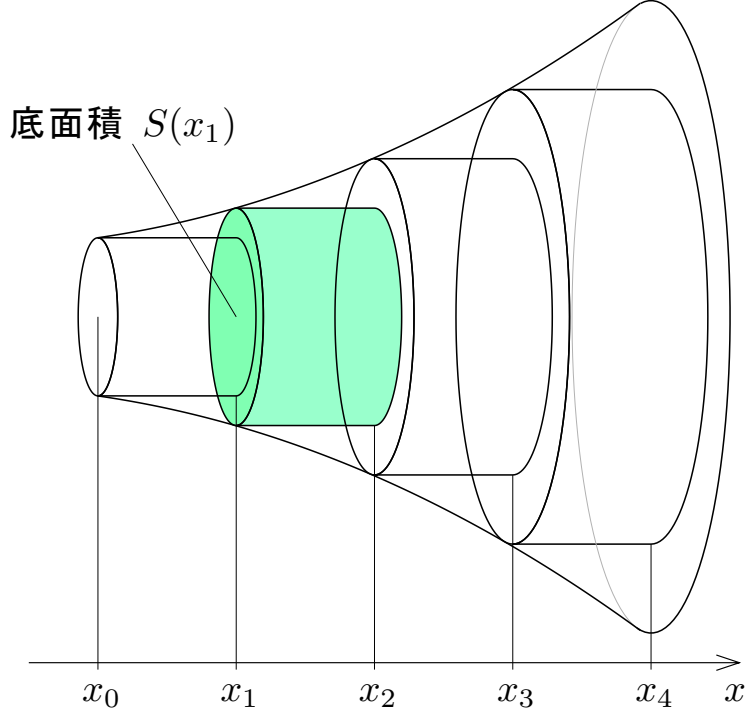
回転体 V を円盤を併せた立体で
近似する.

$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 = b$
となる実数 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 をと
る. そして, 右図のような, 薄緑色
の 4 枚の円盤を併せた立体の体積
で立体 V の体積を近似する.

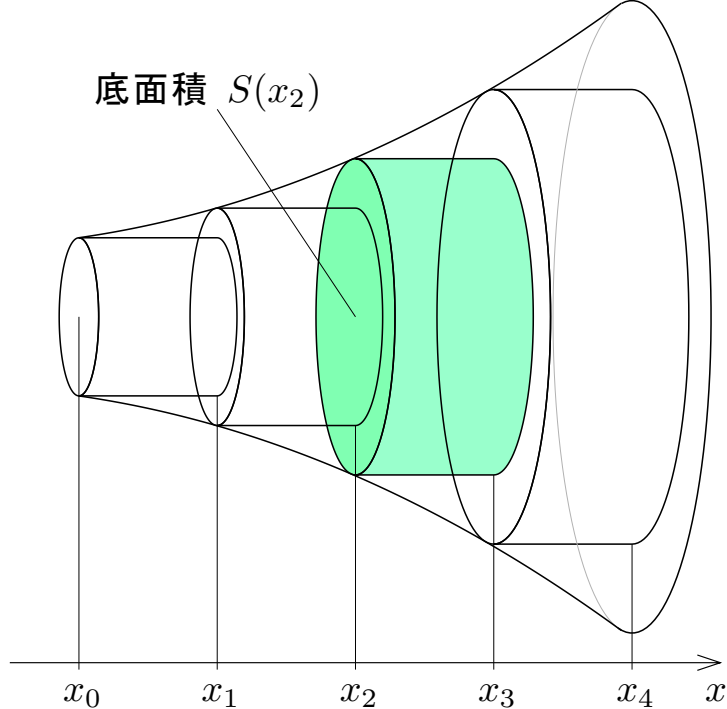




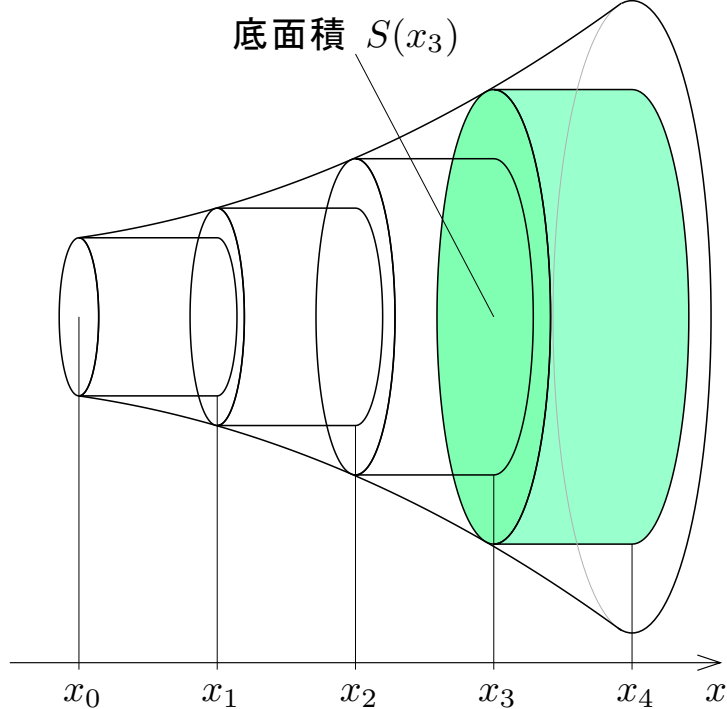
左から 1 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_0)(x_1 - x_0)$ である.



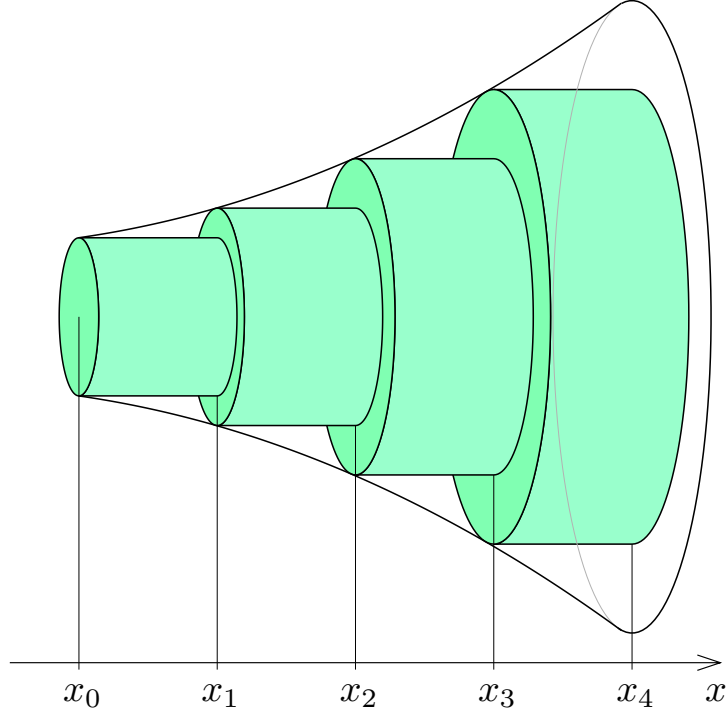
左から 2 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_1)(x_2 - x_1)$ である.



左から 3 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_2)(x_3 - x_2)$ である.



左から 4 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_3)(x_4 - x_3)$ である.



これら 4 枚の円盤を併せた立体の体積 W_4 は

$$W_4 = S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) .$$

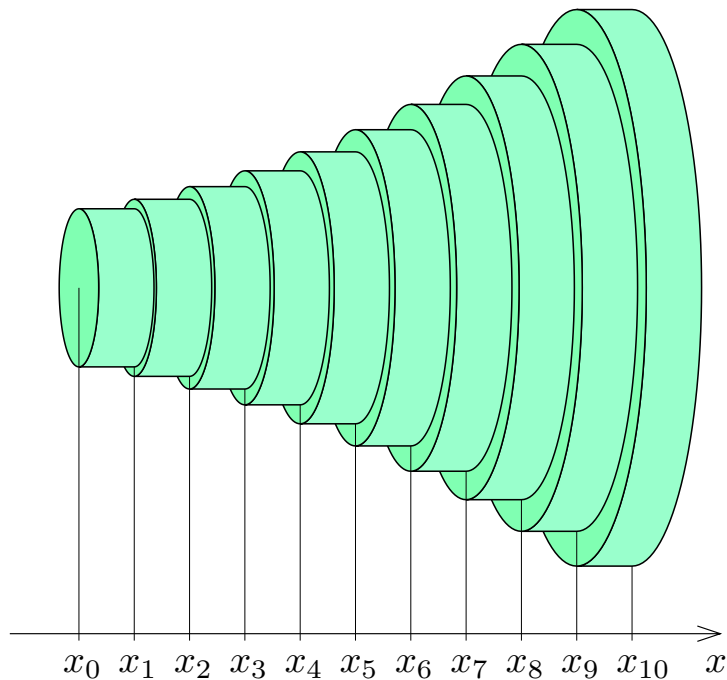
4 枚の円盤を併せた立体の体積 W_4 は

$$\begin{aligned} W_4 &= S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) \\ &= \sum_{k=1}^4 \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} . \end{aligned}$$

円盤の枚数を 10 にする.

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_9 \leq x_{10} = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_9, x_{10}$ をとり, 回転体 V の体積を次のような 10 枚の円板を併せた立体の体積で近似する.

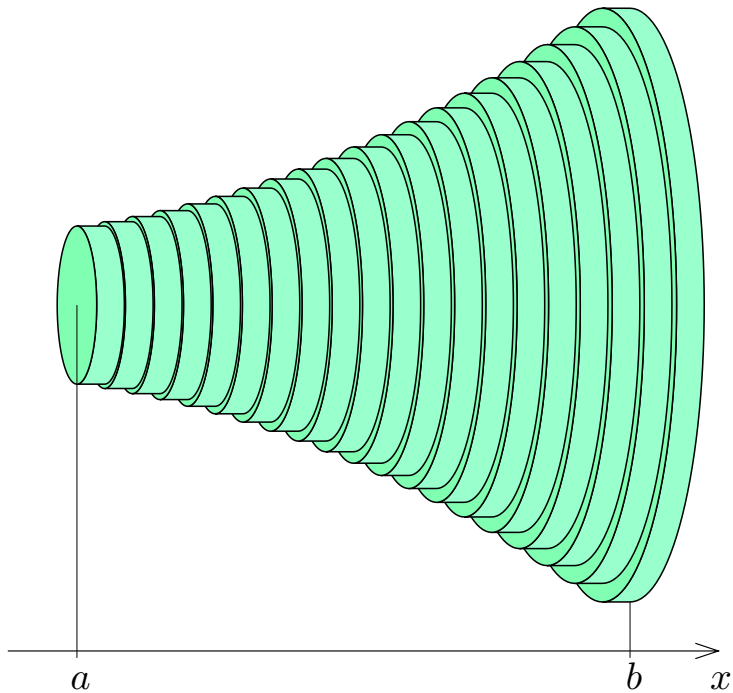


10枚の円板を併せた立体の体積 W_{10} は $W_{10} = \sum_{k=1}^{10} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.

円盤の枚数を 20 にする.

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{19} \leq x_{20} = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{19}, x_{20}$ をとり, 回転体 V の体積を次のような 20 枚の円板を併せた立体の体積で近似する.

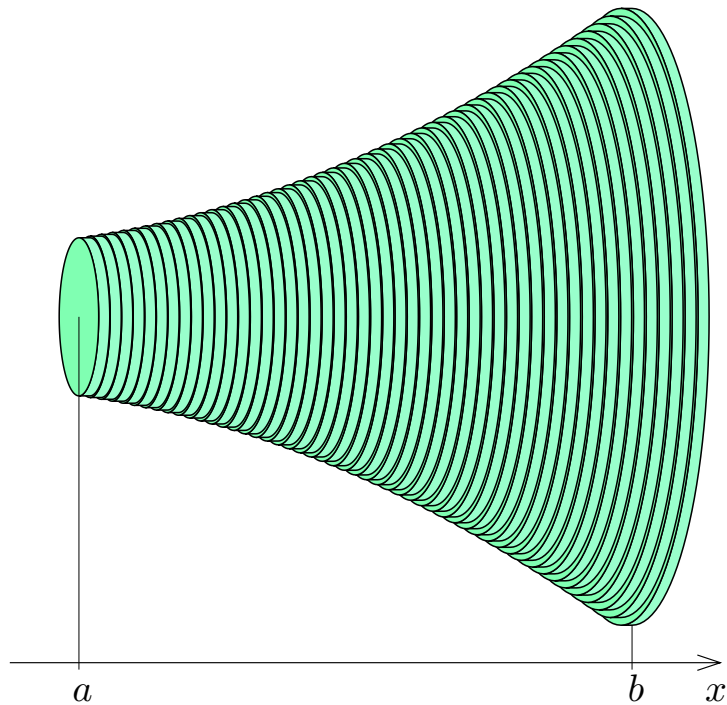


20 枚の円板を併せた立体の体積 W_{20} は $W_{20} = \sum_{k=1}^{20} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.

円盤の枚数を 50 にする.

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{49} \leq x_{50} = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{49}, x_{50}$ をとり, 回転体 V の体積を次のような 50 枚の円板を併せた立体の体積で近似する.

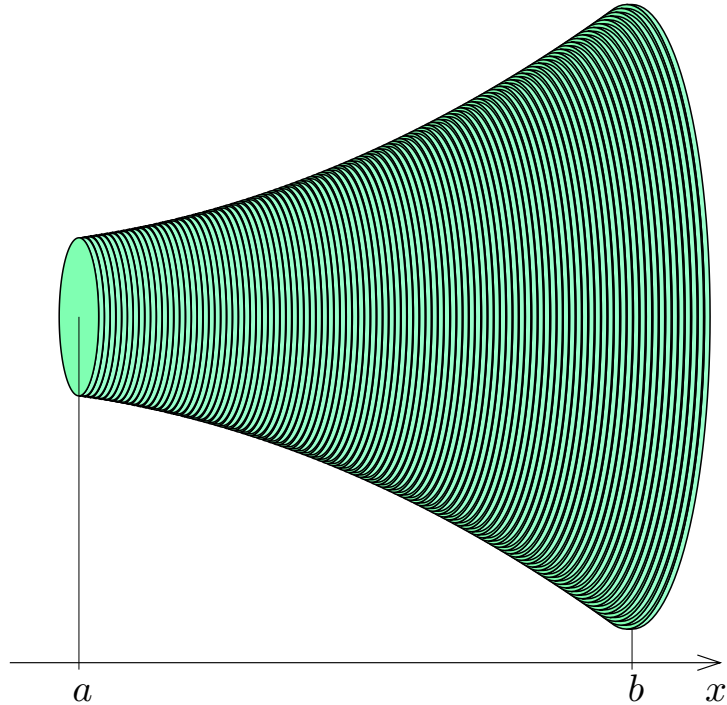


50 枚の円板を併せた立体の体積 W_{50} は $W_{50} = \sum_{k=1}^{50} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.

円盤の枚数を 100 にする.

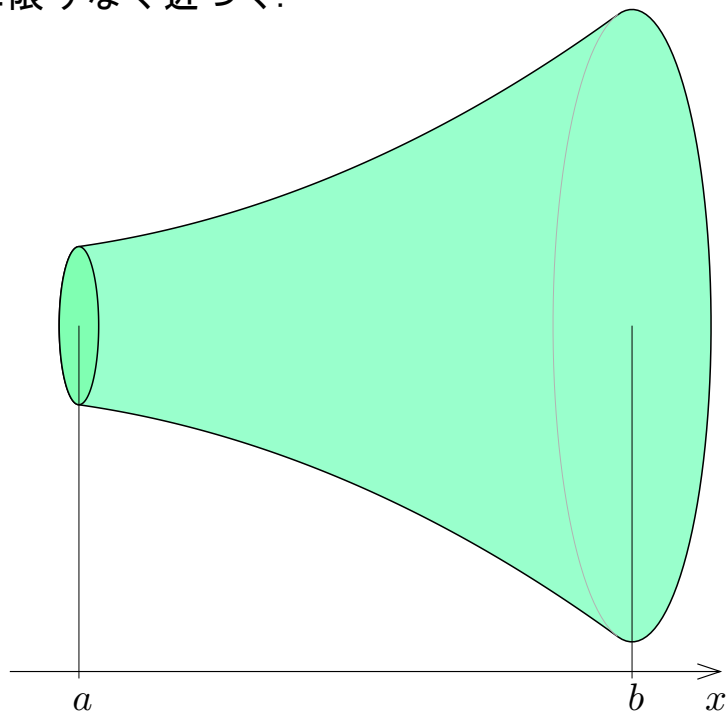
$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{99} \leq x_{100} = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{99}, x_{100}$ をとり, 回転体 V の体積を次のような 100 枚の円板を併せた立体の体積で近似する.



100 枚の円板を併せた立体の体積 W_{100} は $W_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.

薄い円板の枚数を限りなく増やしていくと、円盤を併せた立体の体積は元の回転体の体積に限りなく近づく。



正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる. これまで述べてきたような n 枚の円盤を併せた立体の体積 W_n は

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる. これまで述べてきたような n 枚の円盤を併せた立体の体積 W_n は

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

これは関数 $S(x)$ のリーマン和である.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる. これまで述べてきたような n 枚の円盤を併せた立体の体積 W_n は

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

これは関数 $S(x)$ のリーマン和である.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について, $n \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n \rightarrow 0$ とする.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる. これまで述べてきたような n 枚の円盤を併せた立体の体積 W_n は

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

これは関数 $S(x)$ のリーマン和である.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について, $n \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n \rightarrow 0$ とする. 円盤の枚数 n を限りなく大きくして一枚一枚の円盤を限りなく薄くすると, n 枚の円盤を併せた立体の体積 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は回転体 V の体積に限りなく近づく.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる. これまで述べてきたような n 枚の円盤を併せた立体の体積 W_n は

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

これは関数 $S(x)$ のリーマン和である.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について, $n \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n \rightarrow 0$ とする. 円盤の枚数 n を限りなく大きくして一枚一枚の円盤を限りなく薄くすると, n 枚の円盤を併せた立体の体積 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は回転体 V の体積に限りなく近づく. 故に, 回転体 V の体積はリーマン和 W_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である.

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である.

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である. 関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能であり,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, 関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ は $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x) dx$ である:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx .$$

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である. 関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能であり,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, 関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ は $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x) dx$ である:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx .$$

故に回転体 V の体積は関数 $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x) dx$ である.

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ である. 関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能であり,

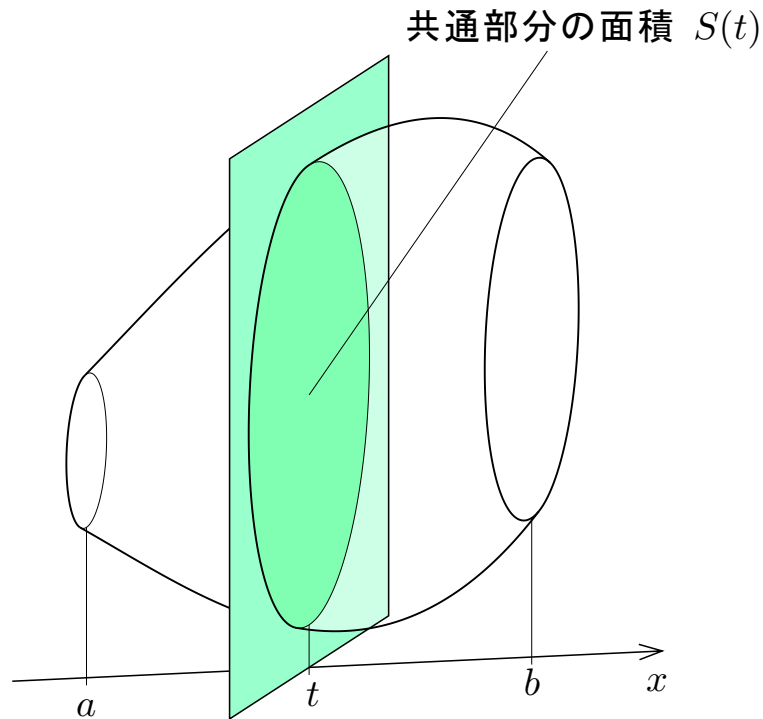
$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, 関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ は $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x) dx$ である:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx .$$

故に回転体 V の体積は関数 $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x) dx$ である.

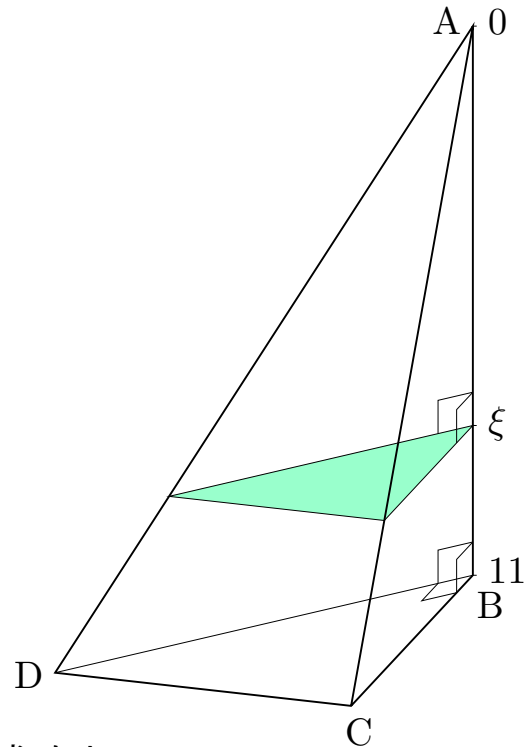
回転体に限らず立体について一般的に次の定理が成り立つ.

定理 立体図形 V に対して x 座標軸が設定されているとする.
 V に属す点の x 座標のうち, 最小値を a とおき, 最大値を b とおく.
区間 $[a, b]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点が属す x 軸に垂直な平面と V との共通部分の面積を $S(t)$ とおく;
この関数 S は a から b まで積分可能であるとする. このとき,
立体図形 V の体積は $\int_a^b S(t) dt$ である.



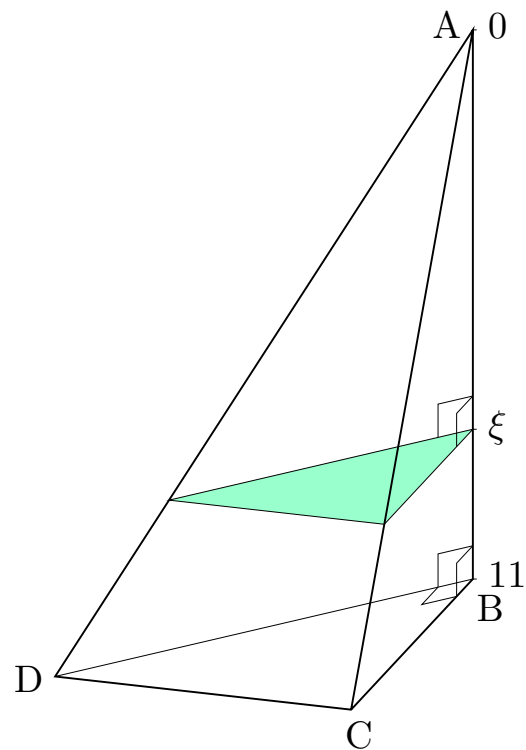
問8.3.1 空間内の4点 A, B, C, D を頂点とする三角錐 $ABCD$ において、角 ABC, ABD, CBD は直角である。 $\overline{AB} = 11$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{BD} = 8$ とする。この三角錐の体積を考える。直角三角形 BCD を底面とする。頂点 A を原点とし、頂点 A から頂点 B への向きに座標軸をとる。この座標軸上で座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 $ABCD$ との共通部分（右図の網掛けの部分）と直角三角形 BCD とは相似であり、相似比は $\xi : 11$ で、面積の比は $\xi^2 : 11^2$ である。

(1) 座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 $ABCD$ との共通部分の面積を求めよ。

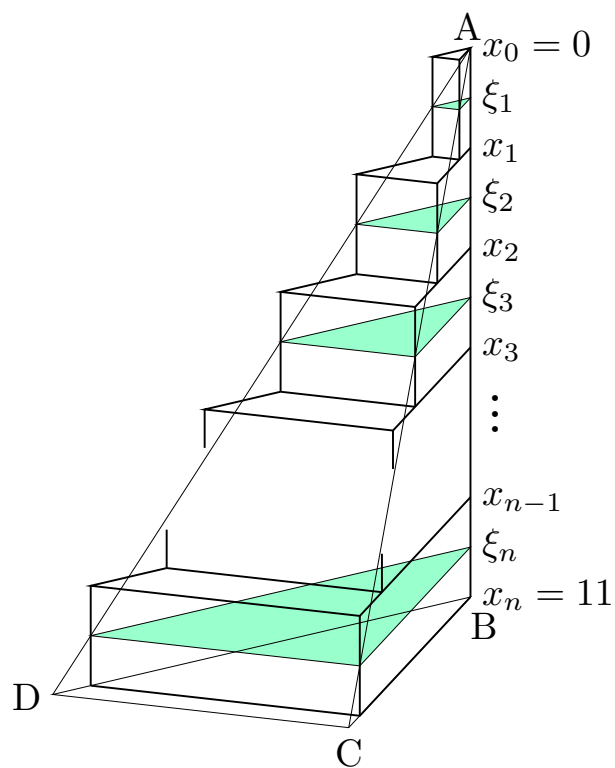


共通部分の面積は三角錐の底面と相似な
直角三角形であり，直角を挟む2辺の長さは
 $\frac{5\xi}{11}$ と $\frac{8\xi}{11}$ とである；よってその面積は

$$\frac{1}{2} \times \frac{5\xi}{11} \times \frac{8\xi}{11} = \frac{20\xi^2}{11^2} .$$



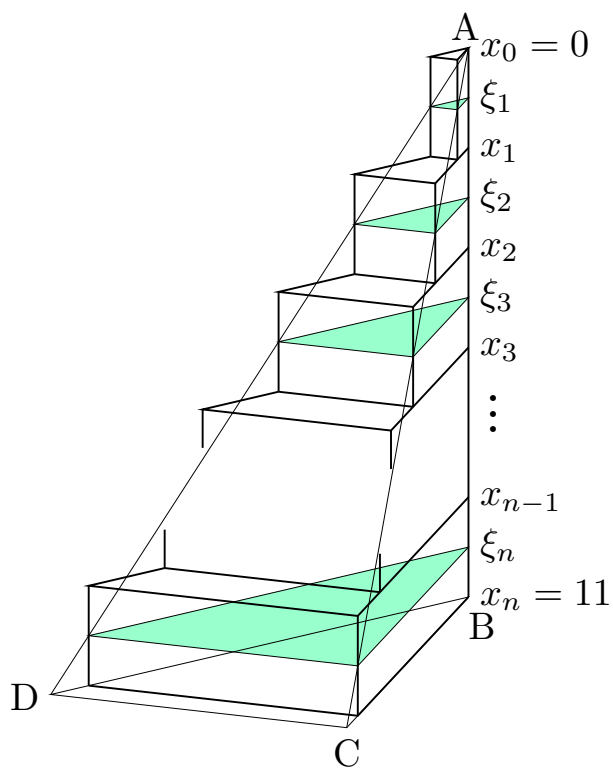
(2) 変数 n を正の自然数を表すとする.
 $0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ に対して, 右図のように三角錐 ABCD を n 個の直三角柱 (側面は底面及び上面と垂直) を併せた立体で近似する: この体積 S_n を表す式を記せ. またこの式を何というか記せ.



(2) 変数 n を正の自然数を表すとする。
 $0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数
 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数
 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ に対して, 右図のよう
 に三角錐 ABCD を n 個の直角柱 (側
 面は底面及び上面と垂直) を併せた立体
 で近似する: この体積 S_n を表す式を記
 せ. またこの式を何というか記せ.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{20\xi_k^2}{11^2} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\frac{20}{11^2}x^2$ のリーマン和である.



(3)

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする；つまり

$n \rightarrow \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$

の間隔は総て 0 に近づくとする． $n \rightarrow \infty$

のとき薄い三角柱を併せた立体の体積 S_n

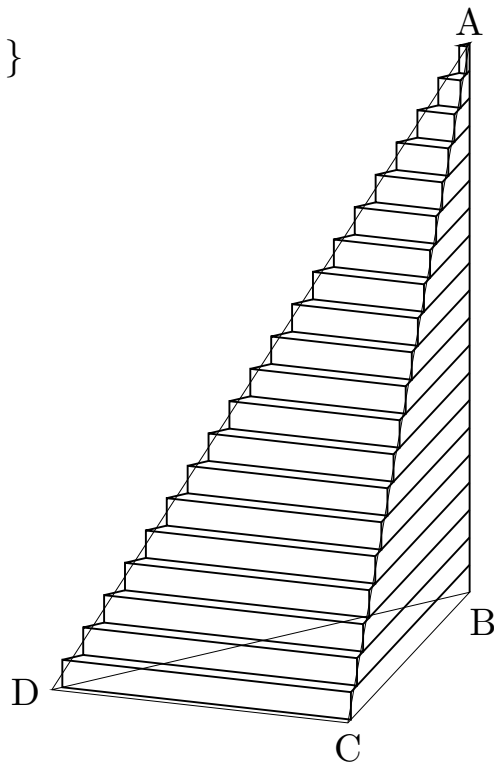
は右図のように三角錐 ABCD の体積に限り

なく近づく；つまり S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

が三角錐 ABCD の体積である．このことを

用いて，定積分によって三角錐 ABCD の体

積を求めよ．



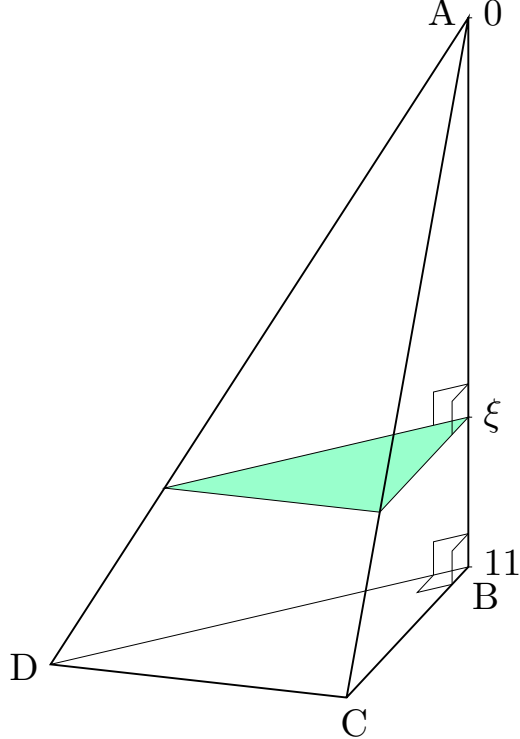
$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ なので, $n \rightarrow \infty$ のと

き関数 $\frac{20}{11^2}x^2$ のリーマン和 S_n は定積

分 $\int_0^{11} \frac{20}{11^2}x^2 dx$ に収束する. 三角錐

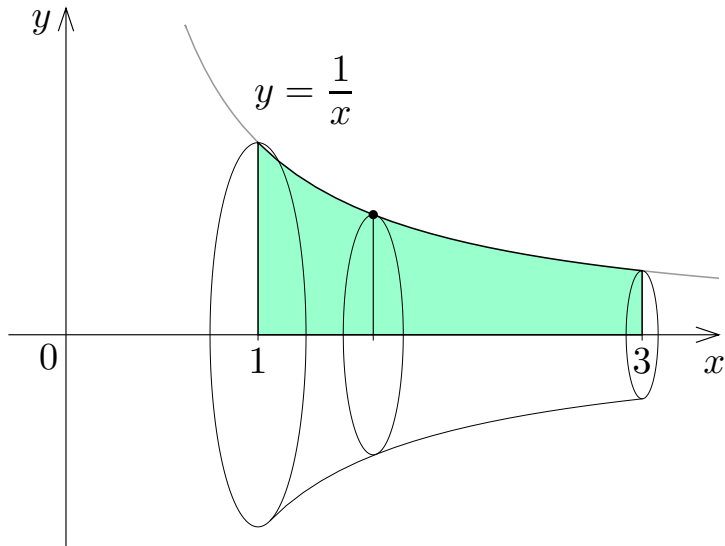
ABCD の体積は

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \int_0^{11} \frac{20}{11^2}x^2 dx \\ &= \frac{20}{11^2} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{11} \\ &= \frac{20}{11^2} \cdot \frac{1}{3}11^3 \\ &= \frac{220}{3} .\end{aligned}$$



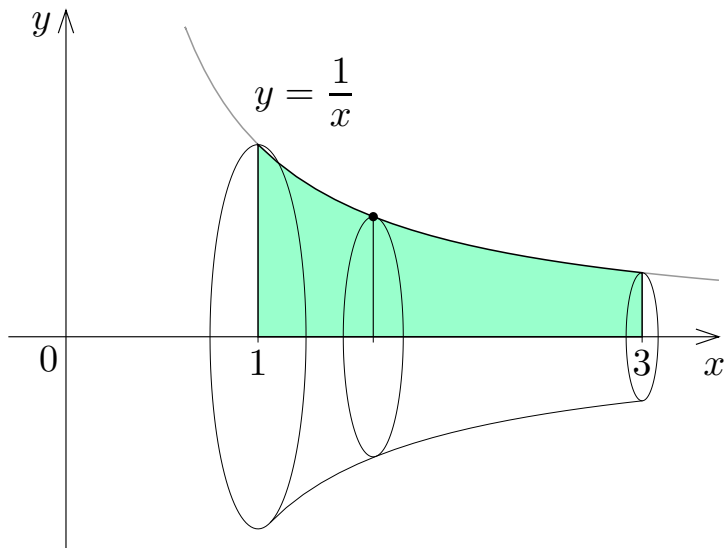
例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.



例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

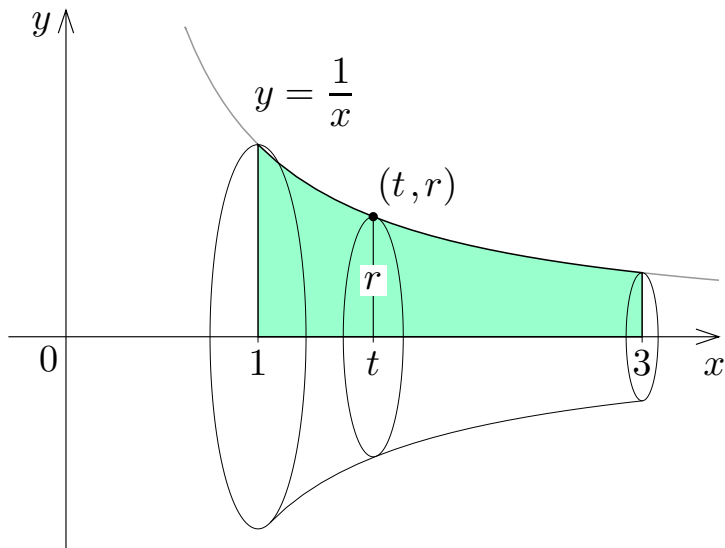
与えられた回転体を V とおく.
区間 $[1, 3]$ の各実数 t に対して,
 x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である;



例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

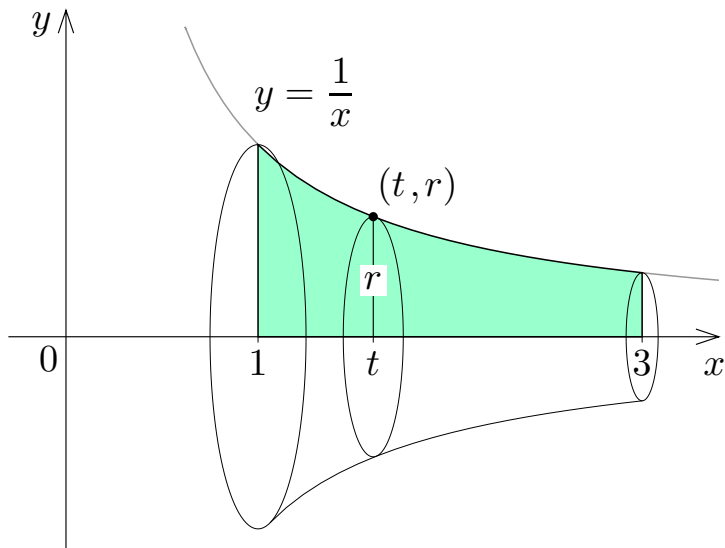
与えられた回転体を V とおく. 区間 $[1, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は $y = \frac{1}{x}$ のグラフに属するので,

$r =$;



例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

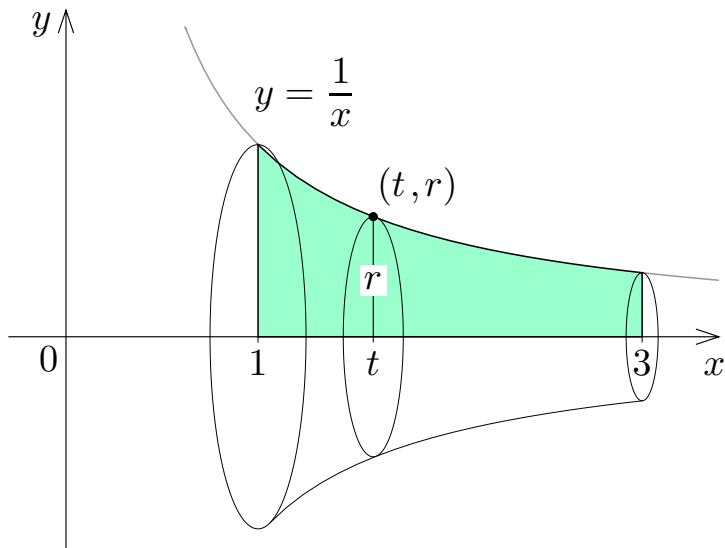
与えられた回転体を V とおく. 区間 $[1, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は $y = \frac{1}{x}$ のグラフに属するので, $r = \frac{1}{t}$;



例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

与えられた回転体を V とおく. 区間 $[1, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は $y = \frac{1}{x}$ のグラフに属するので, $r = \frac{1}{t}$; よって, 共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{\pi}{t^2} .$$



従って、回転体 V の体積は、

$$\begin{aligned}\int_1^3 S(t) dt &= \int_1^3 \frac{\pi}{t^2} dt = \pi \int_1^3 t^{-2} dt = \pi [-t^{-1}]_1^3 = -\pi \left[\frac{1}{t} \right]_1^3 = -\pi \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} .\end{aligned}$$

終

問8.3.2 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めよ.

与えられた回転体を V とおく. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は $y = e^x - 1$ のグラフに属するので, $r =$; よって, この共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi()^2 .$$

従って, 回転体 V の体積は,

$$\int_0^3 S(t) dt = \int_0^2 dt =$$

問8.3.2 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考える. 3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めよ.

与えられた回転体を V とおく. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は $y = e^x - 1$ のグラフに属するので, $r = e^t - 1$; よって, この共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi(e^t - 1)^2 .$$

従って, 回転体 V の体積は,

$$\begin{aligned} \int_0^3 S(t) dt &= \int_0^3 \pi(e^t - 1)^2 dt = \pi \int_0^3 (e^{2t} - 2e^t + 1) dt \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} e^{2t} - 2e^t + t \right]_0^3 = \pi \left(\frac{1}{2} e^6 - 2e^3 + 3 - \frac{1}{2} + 2 \right) \\ &= \pi \left(\frac{e^6 + 9}{2} - 2e^3 \right) . \end{aligned}$$

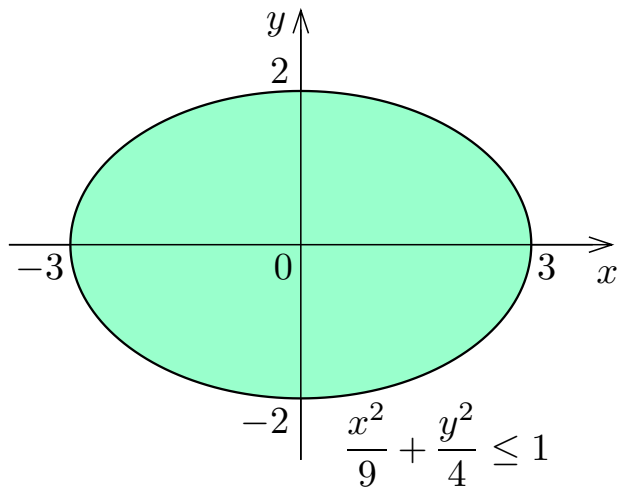
終

例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域を, 3次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める.

例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域を, 3次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める.

不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面

領域は, 方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ が表す楕円の境界と内部とを併せた領域である.



例 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域を, 3次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める.

不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面

領域は, 方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ が表す

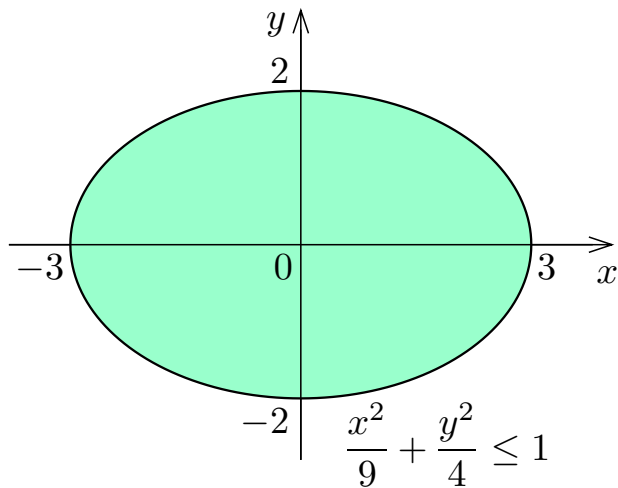
楕円の境界と内部とを併せた領域で

ある. この領域の点 (x, y) について,

$1 - \frac{x^2}{9} \geq \frac{y^2}{4} \geq 0$ なので, $x^2 \leq 9$,

$x^2 - 9 \leq 0$, $(x+3)(x-3) \leq 0$,

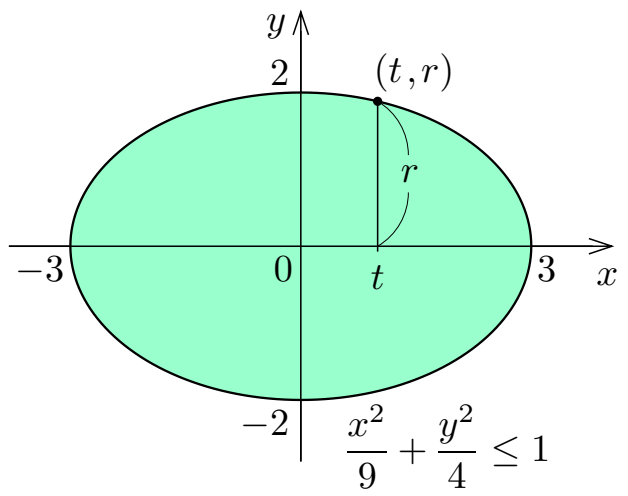
$-3 \leq x \leq 3$.



区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

に属するので $\frac{t^2}{9} + \frac{r^2}{4} = 1$, よって

$$r^2 = 4 - \frac{4}{9}t^2 ;$$



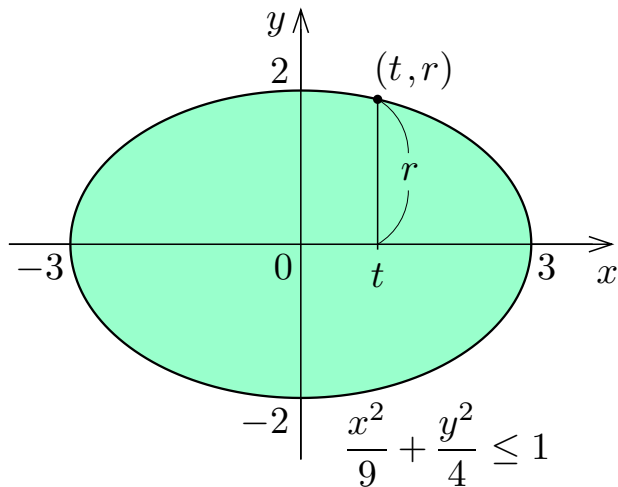
区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

に属するので $\frac{t^2}{9} + \frac{r^2}{4} = 1$, よって

$$r^2 = 4 - \frac{4}{9}t^2 ;$$

共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(4 - \frac{4}{9}t^2 \right) .$$



区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して, x 軸の座標 t の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (t, r) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

に属するので $\frac{t^2}{9} + \frac{r^2}{4} = 1$, よって

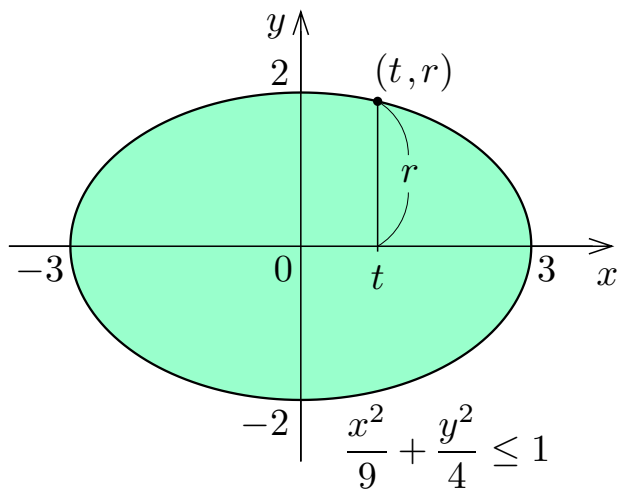
$$r^2 = 4 - \frac{4}{9}t^2;$$

共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(4 - \frac{4}{9}t^2 \right).$$

故に回転体 V の体積は,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 S(t) dt &= \int_{-3}^3 \pi \left(4 - \frac{4}{9}t^2 \right) dt = \pi \left[4t - \frac{4}{27}t^3 \right]_{-3}^3 = \pi \left\{ 3 - \frac{27}{27} - \left(-3 - \frac{27}{27} \right) \right\} \\ &= 16\pi. \end{aligned}$$



問8.3.3 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域を, 3次元空間において y 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求めよ.

不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域

は方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ が表す楕円の境界と内部とを併せた領域である. この領域

の点 (x, y) について, $1 - \frac{y^2}{4} \geq \frac{x^2}{9} \geq 0$

なので, $y^2 \leq 4$, $y^2 - 4 \leq 0$,

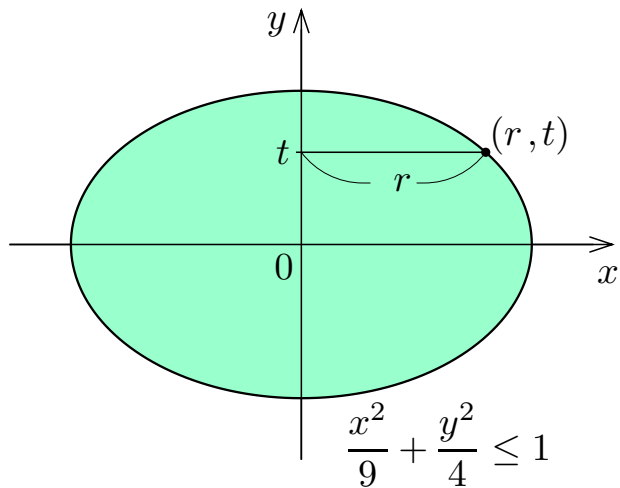
$(y+2)(y-2) \leq 0$, $-2 \leq y \leq 2$. 区間

$[-2, 2]$ の各実数 t に対して, y 軸の座標

t の点が属し y 軸に垂直な平面と V との

共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (r, t)

は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に属するので, $\frac{r^2}{9} + \frac{t^2}{4} = 1$, $r^2 = 9\left(1 - \frac{t^2}{4}\right)$.



問8.3.3 xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域を, 3次元空間において y 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求めよ.

不等式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ が表す平面領域

は方程式 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ が表す楕円の境界と内部とを併せた領域である. この領域

の点 (x, y) について, $1 - \frac{y^2}{4} \geq \frac{x^2}{9} \geq 0$

なので, $y^2 \leq 4$, $y^2 - 4 \leq 0$,

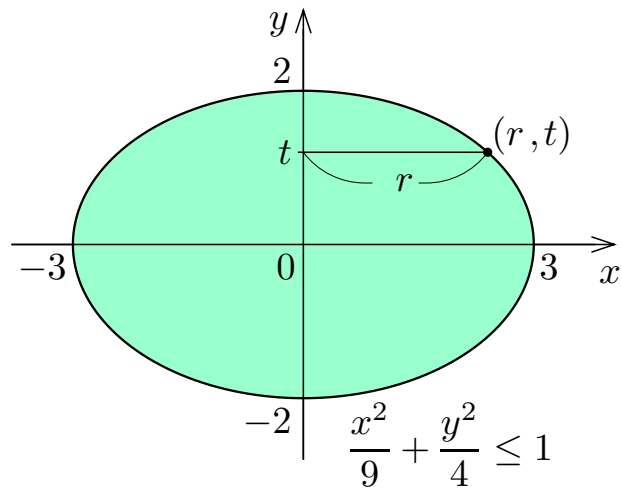
$(y+2)(y-2) \leq 0$, $-2 \leq y \leq 2$. 区間

$[-2, 2]$ の各実数 t に対して, y 軸の座標

t の点が属し y 軸に垂直な平面と V との

共通部分は円である; その半径を r とおくと, xy 座標平面において点 (r, t)

は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に属するので, $\frac{r^2}{9} + \frac{t^2}{4} = 1$, $r^2 = 9 - \frac{9}{4}t^2$.



y 軸の座標 t の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分である円について、半径を r とおくと $r^2 = 9 - \frac{9}{4}t^2$ なので、面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(9 - \frac{9}{4}t^2 \right) .$$

回転体 V の体積は

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 S(t) dt &= \int_{-2}^2 \pi \left(9 - \frac{9}{4}t^2 \right) dt \\ &= \pi \left[9t - \frac{3}{4}t^3 \right]_{-2}^2 \\ &= 24\pi . \end{aligned}$$

