8.3　立体領域の体積

定積分の定義を復習する.

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

$$S_n =$$

とおく．S_n を f のリーマン和という．$\lim_{n\to\infty}\delta_n = \quad$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，リーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す：$\int_a^b f(x)\,dx = \qquad\qquad .$

定義　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a,b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ 及び $\xi_1\,, \xi_2\,, \xi_3\,, \ldots\,, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots\,, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく．S_n を f のリーマン和という． $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \to \infty$ のとき収束して極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，リーマン和 S_n の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表す： $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する： $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ ．

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない.

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n} \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1}\leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k=x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k-x_{k-1})\}\ .$$

また別に，$\xi_k=x_{k-1}$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})\}\ .$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より，$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わらない．そこで，$\xi_k = x_k$（$k=1,2,3,\ldots,n$）とすると，リーマン和 S_n は

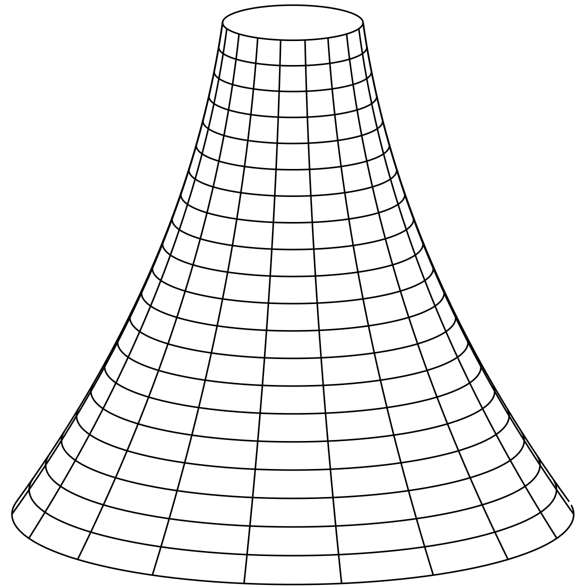
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$（$k=1,2,3,\ldots,n$）とすると，リーマン和 S_n は

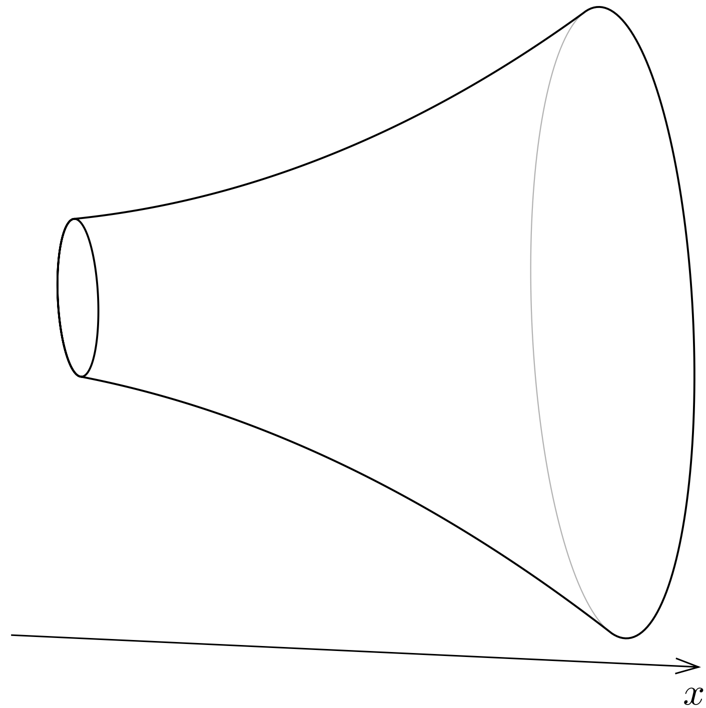
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

そこで，関数 f の定積分を計算するために，f のリーマン和として $\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ をしばしば用いる．

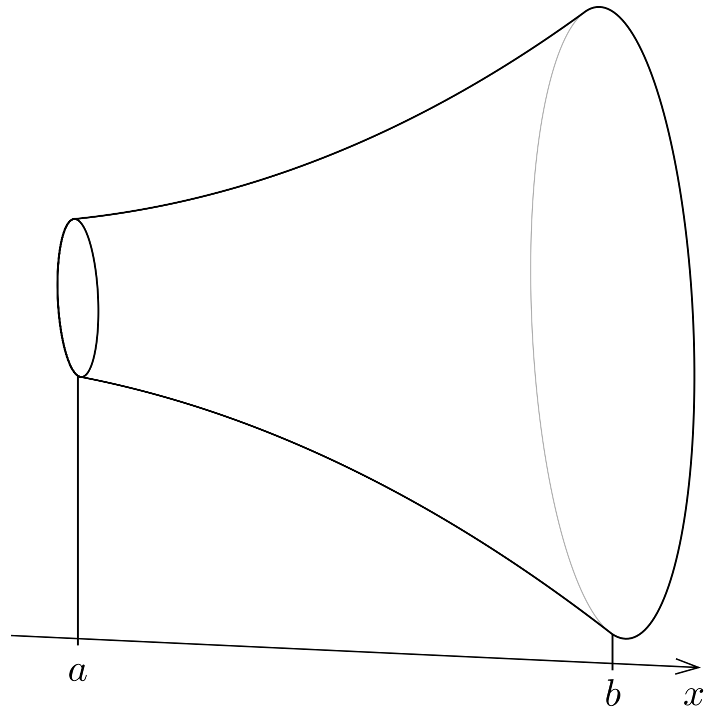
例として，右図のような立体図形 V （中も詰まっているものとします）の体積を求めることを考える．話を分かり易くするためにこの立体 V は回転体であるとする．



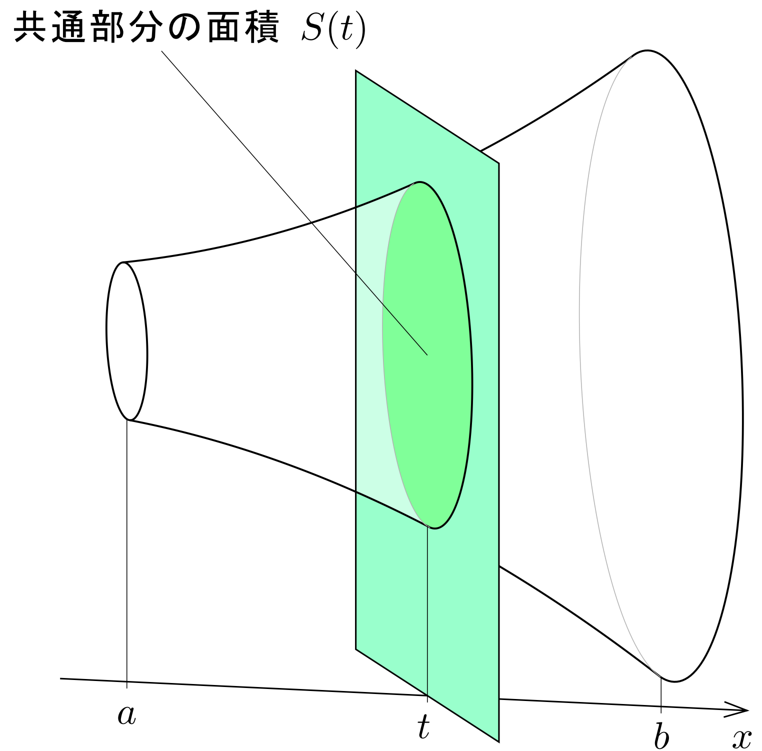
回転体 V に対して，右図のように，V の中心軸と平行になるように x 座標軸を設定する．



回転体 V に対して，右図のように，V の中心軸と平行になるように x 座標軸を設定する．回転体 V に属す点の x 座標うち，最小値を a とおき，最大値を b とおく．



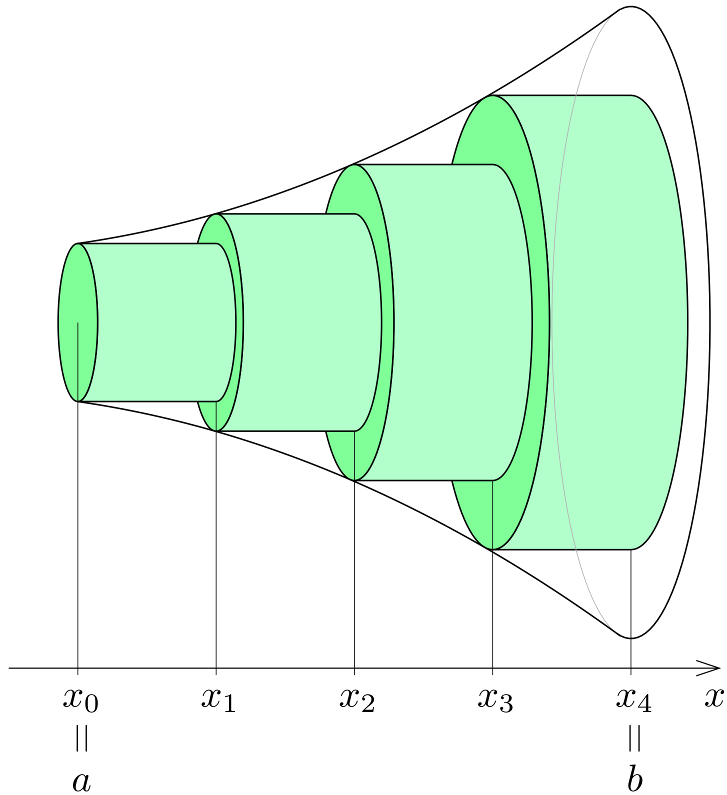
回転体 V に対して，右図のように，V の中心軸と平行になるように x 座標軸を設定する．回転体 V に属す点の x 座標うち，最小値を a とおき，最大値を b とおく．更に，区間 $[a,b]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点が属し x 軸に垂直な平面と回転体 V との共通部分である平面図形の面積を $S(t)$ とおく．この関数 S は a から b まで積分可能であるとする．

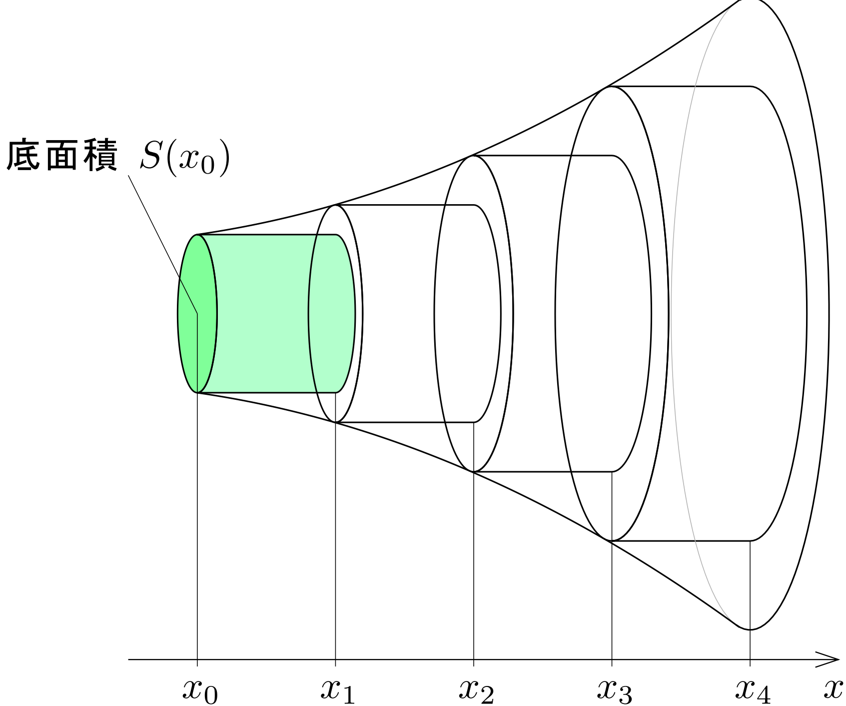


回転体 V を円盤を併せた立体で近似する.

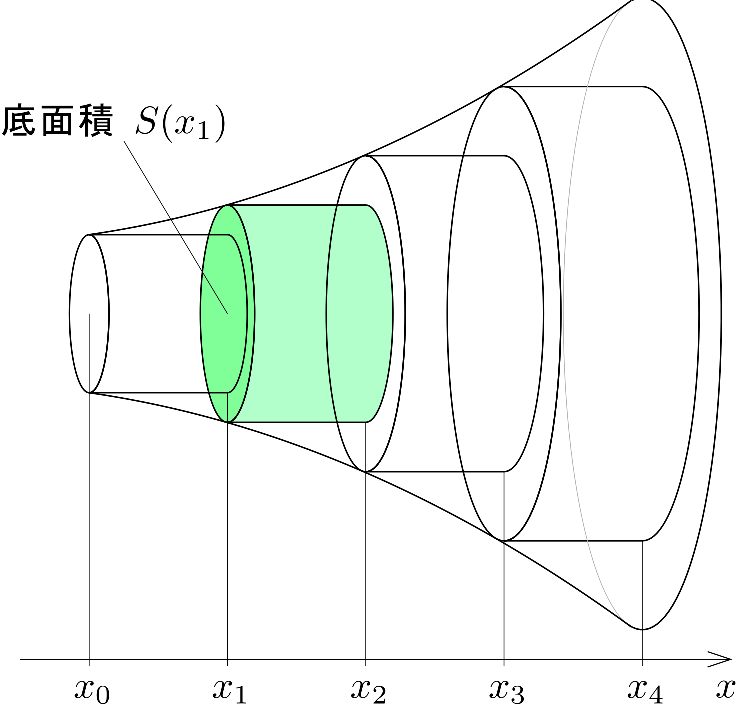
$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 = b$$

となる実数 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 をとる. そして, 右図のような, 薄緑色の 4 枚の円盤を併せた立体の体積で回転体 V の体積を近似する.

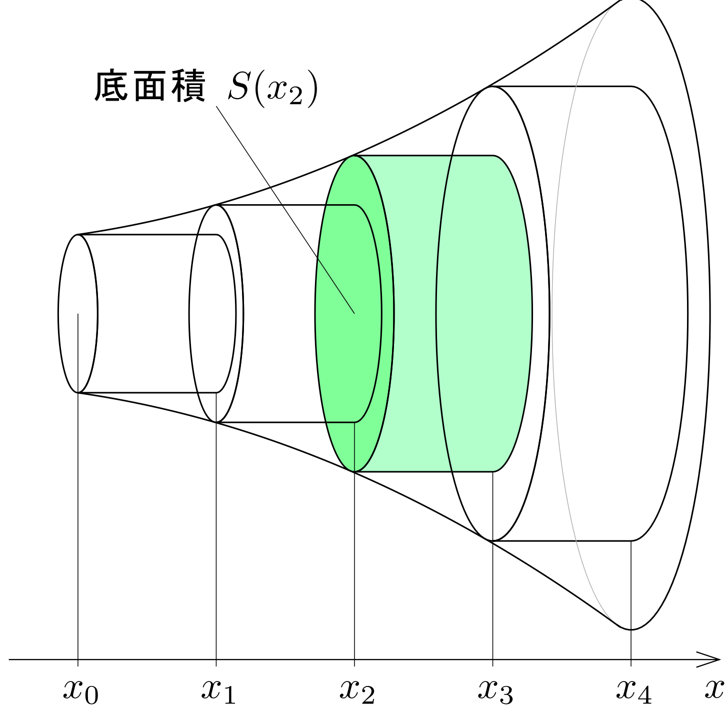




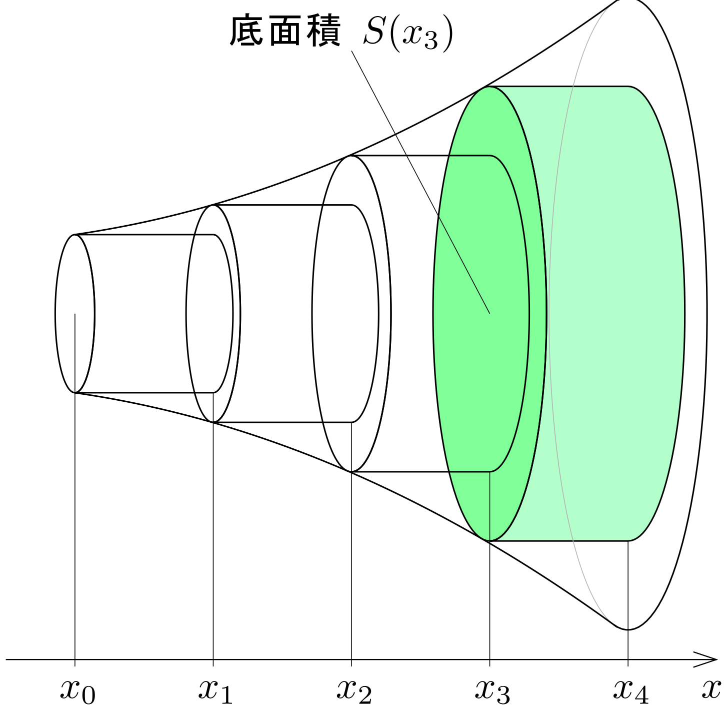
左から 1 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_0)(x_1 - x_0)$ である.



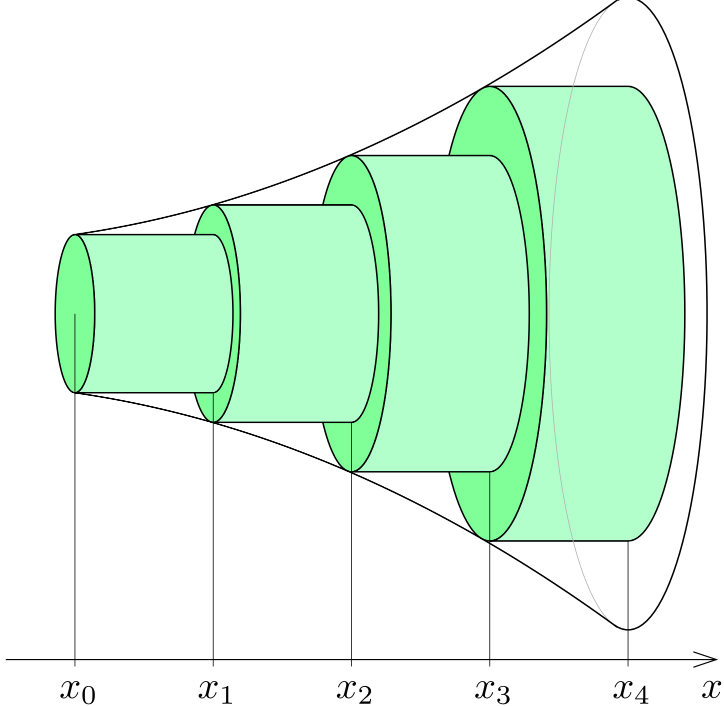
左から 2 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_1)(x_2 - x_1)$ である.



左から 3 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_2)(x_3 - x_2)$ である.



左から 4 番目の円盤（薄緑色の円盤）の体積は $S(x_3)(x_4 - x_3)$ である.



これら 4 枚の円盤を併せた立体の体積 W_4 は

$$W_4 = S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) \ .$$

4 枚の円盤を併せた立体の体積 W_4 は

$$
\begin{aligned}
W_4 &= S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) \\
&= \sum_{k=1}^{4} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ .
\end{aligned}
$$

　正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ をとり，関数 $S(x)$ のリーマン和

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

を考える．

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり, 関数 $S(x)$ のリーマン和

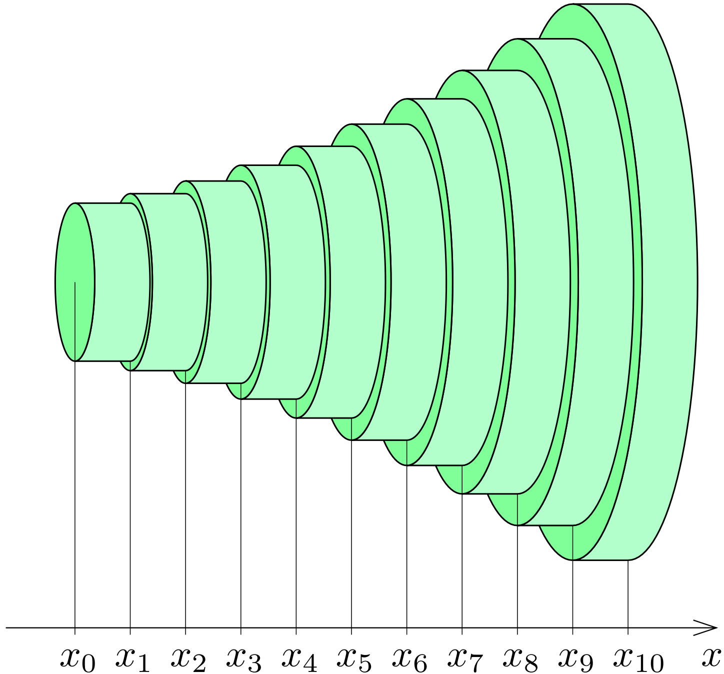
$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$$

を考える.

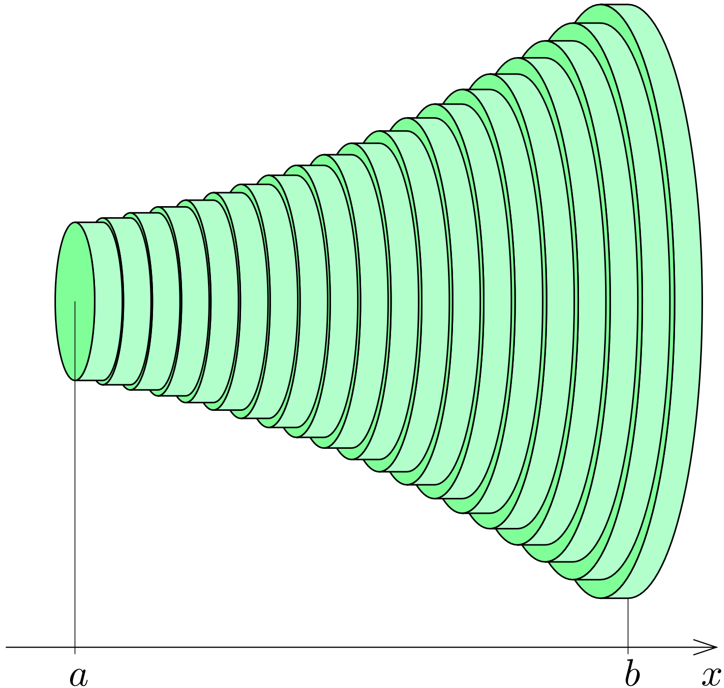
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について, $n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とする. つまり, $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は 0 に限りなく近づくとする.

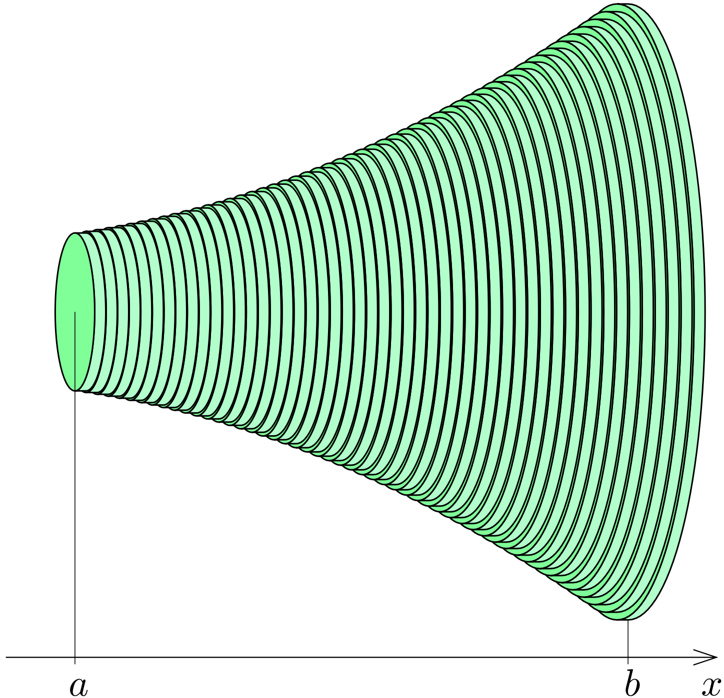
下図の 10 枚の円板を併せた立体の体積は $W_{10} = \sum_{k=1}^{10} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.



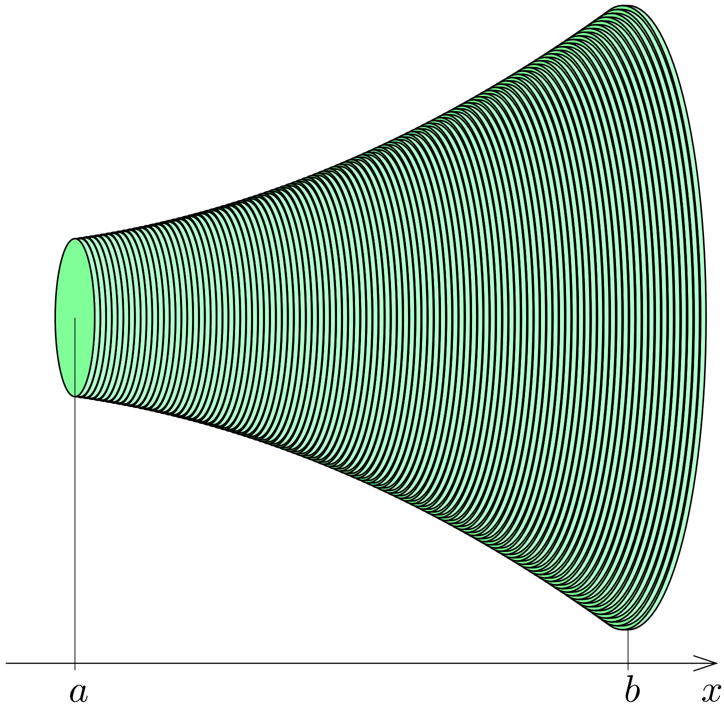
下図の 20 枚の円板を併せた立体の体積は $W_{20} = \sum_{k=1}^{20} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.



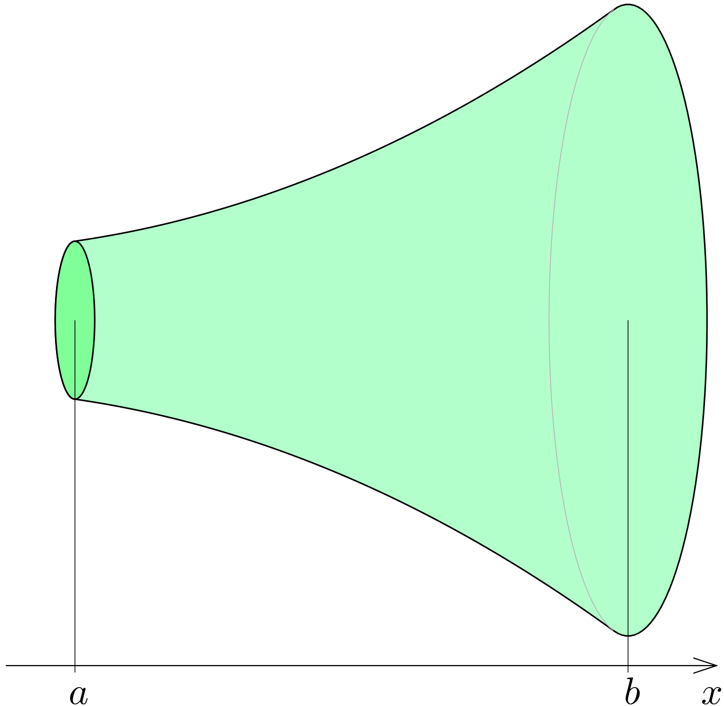
下図の 50 枚の円板を併せた立体の体積は $W_{50}=\sum_{k=1}^{50}\{S(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})\}$.

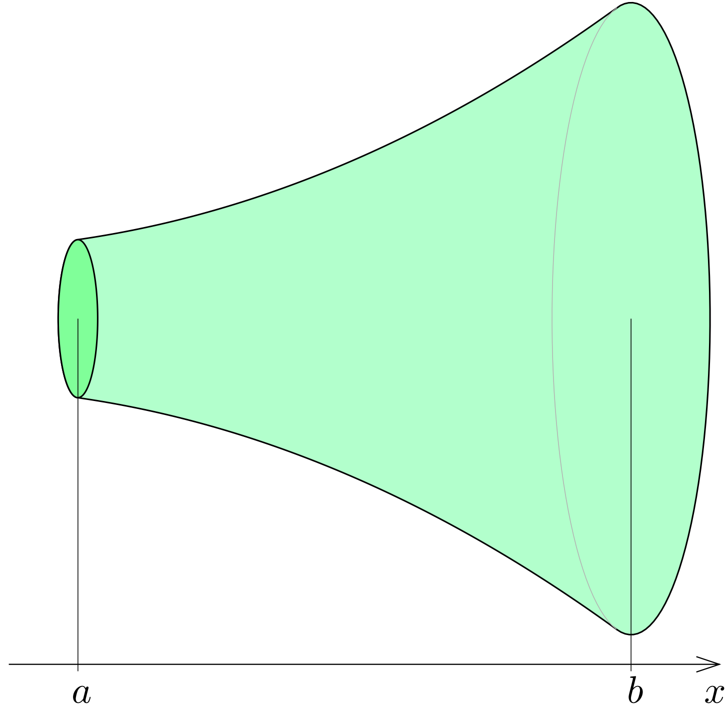


下図の 100 枚の円板を併せた立体の体積は $W_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$.



円板の枚数 n を限りなく増やして各円盤を薄くしていくと，円盤を併せた立体の体積 W_n は回転体 V の体積に限りなく近づく．





回転体 V の体積は円盤を併せた立体の体積 W_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} W_n$ である.

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n \to \infty} W_n$ である.

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n \to \infty} W_n$ である．関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能である．

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} W_n$ である．関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能である．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので，関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_a^b S(x)\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \int_a^b S(x)\,dx \ .$$

回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} W_n$ である．関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能である．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので，関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_a^b S(x)\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \int_a^b S(x)\,dx \ .$$

故に，回転体 V の体積は関数 $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x)\,dx$ である．

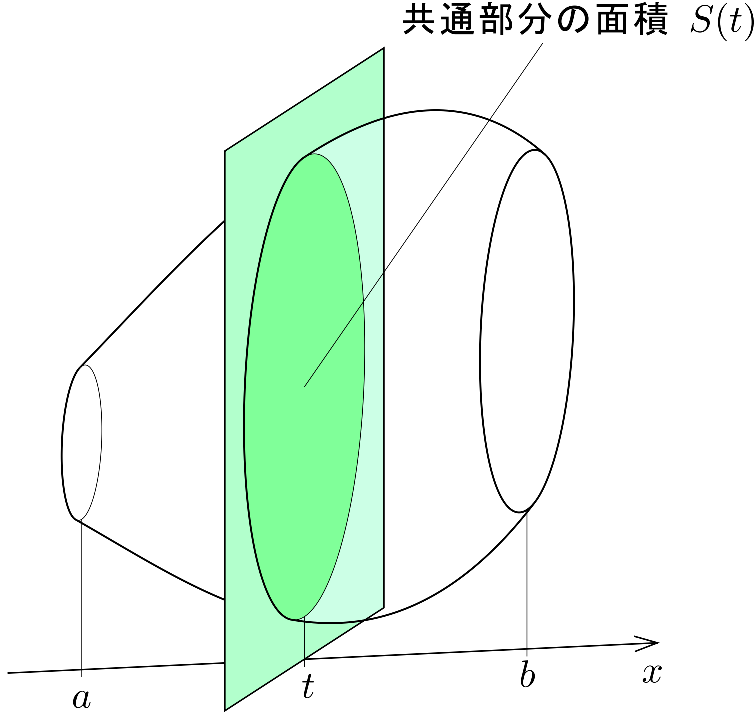
回転体 V の体積は関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} W_n$ である．関数 $S(x)$ は a から b まで積分可能である．$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ なので，関数 $S(x)$ のリーマン和 $W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_a^b S(x)\,dx$ に収束する：

$$\lim_{n\to\infty} W_n = \int_a^b S(x)\,dx \ .$$

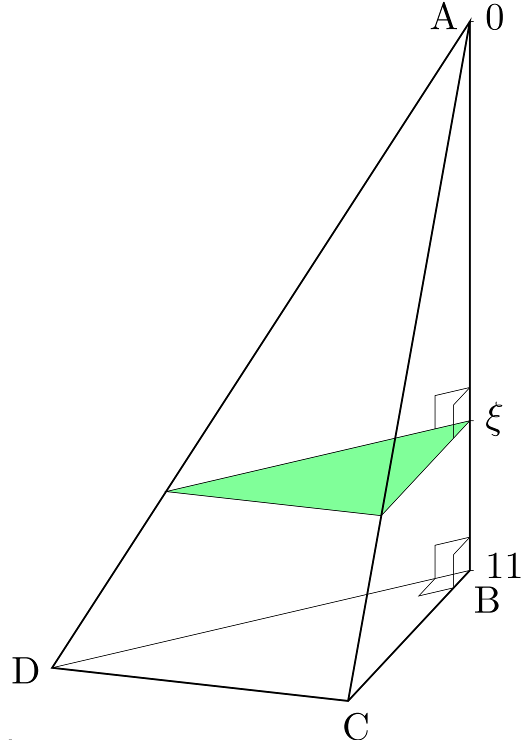
故に，回転体 V の体積は関数 $S(x)$ の定積分 $\int_a^b S(x)\,dx$ である．

このようにして次の定理が成り立つ．

定理　立体図形 V に対して x 座標軸が設定されているとする．V に属す点の x 座標のうち，最小値を a とおき，最大値を b とおく．区間 $[a, b]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点が属す x 軸に垂直な平面と V との共通部分の面積を $S(t)$ とおく；この関数 S は a から b まで積分可能であるとする．このとき，立体図形 V の体積は $\int_a^b S(t)\,dt$ である．



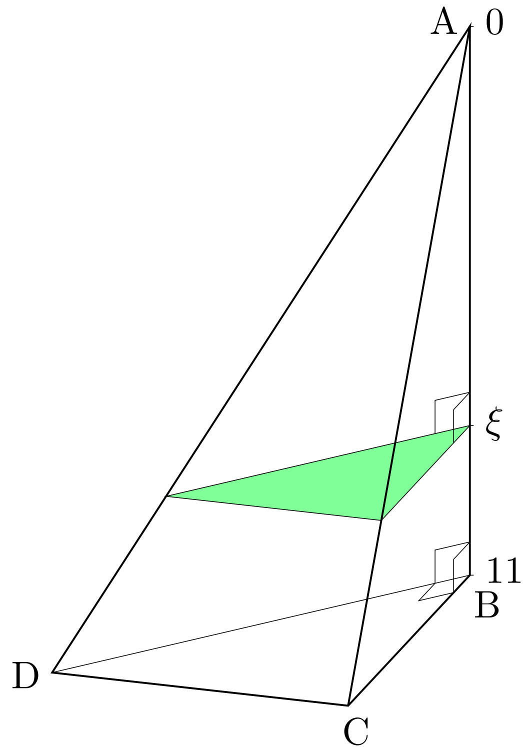
$\boxed{\text{問}8.3.1}$ 空間内の 4 点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ を頂点とする三角錐 ABCD において，角 $\mathrm{ABC}, \mathrm{ABD}$, CBD は直角である．$\overline{\mathrm{AB}} = 11$ ，$\overline{\mathrm{BC}} = 5$ ，$\overline{\mathrm{BD}} = 8$ とする．この三角錐の体積を考える．直角三角形 BCD を底面とする．頂点 A を原点とし，頂点 A から頂点 B への向きに座標軸をとる．この座標軸上で座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 ABCD との共通部分（右図の明緑色の部分）と直角三角形 BCD とは相似であり，相似比は $\xi : 11$ で，面積の比は $\xi^2 : 11^2$ である．



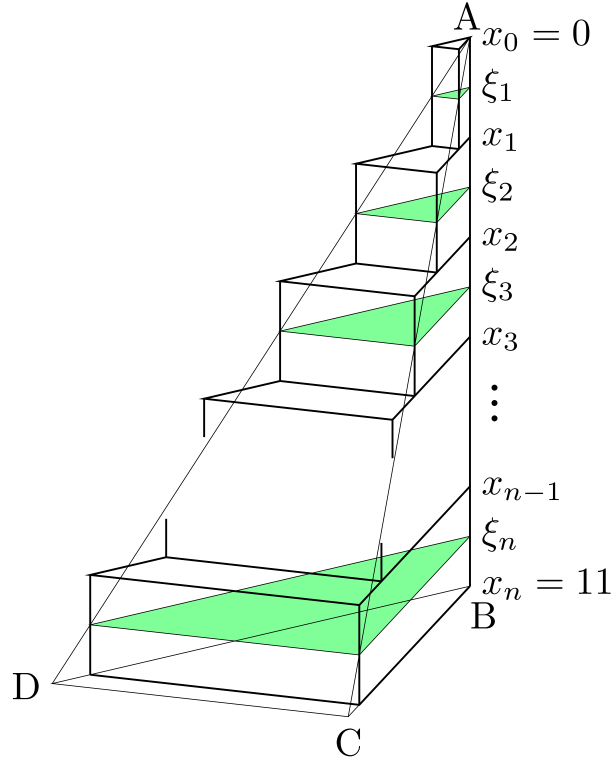
(1) 座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 ABCD との共通部分の面積を求めよ．

共通部分の面積は三角錐の底面と相似な直角三角形であり，直角を挟む 2 辺の長さは $\dfrac{5\xi}{11}$ と $\dfrac{8\xi}{11}$ とである；よってその面積は

$$\frac{1}{2}\times\frac{5\xi}{11}\times\frac{8\xi}{11} = \frac{20\xi^2}{11^2}\ .$$



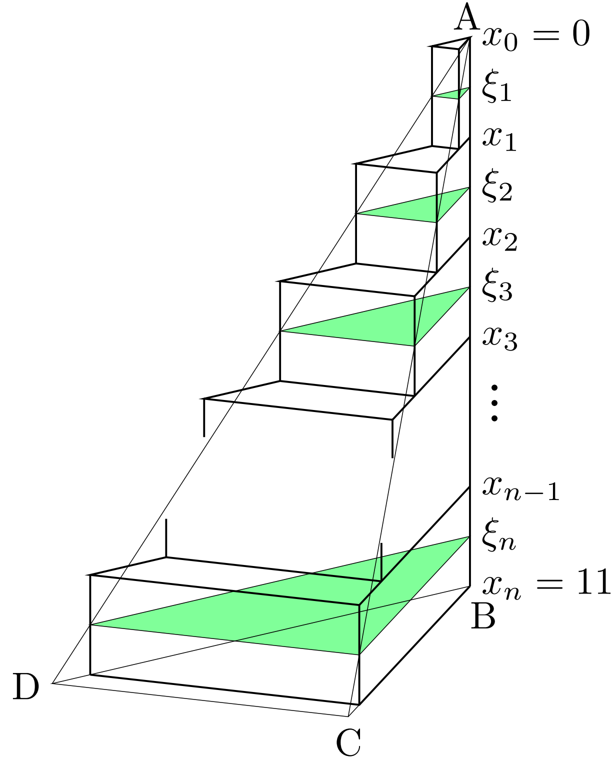
(2) 変数 n を正の自然数を表すとする．$0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ に対して，右図のように三角錐 ABCD を n 個の直三角柱（側面は底面及び上面と垂直）を併せた立体で近似する：この体積 S_n を表す式を記せ．またこの式を何というか記せ．



(2) 変数 n を正の自然数を表すとする．
$0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ に対して，右図のように三角錐 ABCD を n 個の直三角柱（側面は底面及び上面と垂直）を併せた立体で近似する：この体積 S_n を表す式を記せ．またこの式を何というか記せ．

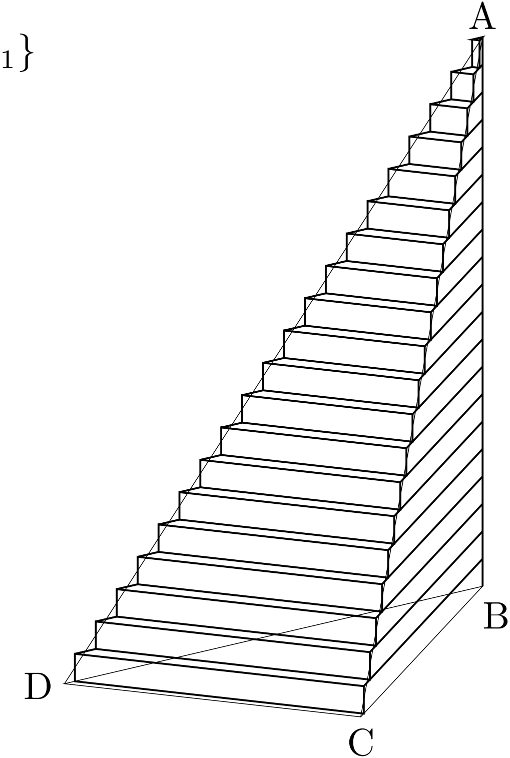
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{20{\xi_k}^2}{11^2}(x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\dfrac{20}{11^2}x^2$ のリーマン和である．



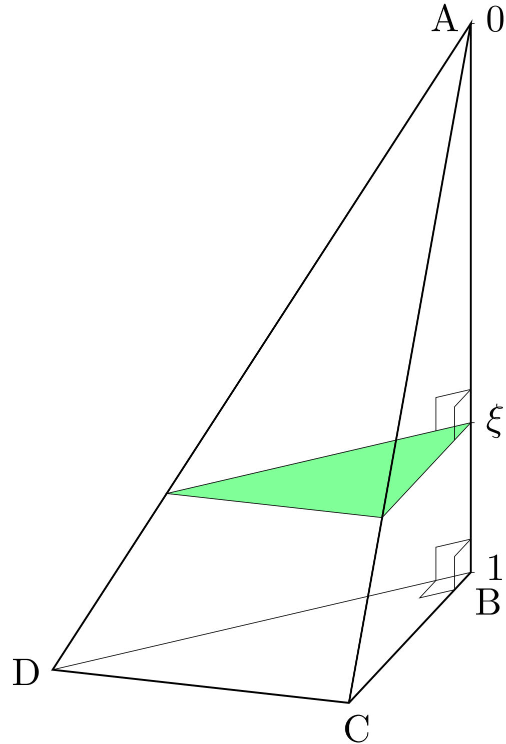
(3)

$\delta_n = \max\{x_1 - x_0\,, x_2 - x_1\,, x_3 - x_2\,, \ldots\,, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする；つまり $n \to \infty$ のとき $x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3\,, \ldots\,, x_{n-1}\,, x_n$ の間隔は総て 0 に近づくとする． $n \to \infty$ のとき薄い三角柱を併せた立体の体積 S_n は右図のように三角錐 ABCD の体積に限りなく近づく；つまり S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が三角錐 ABCD の体積である．このことを用いて，定積分によって三角錐 ABCD の体積を求めよ．



$\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ なので，$n \to \infty$ のとき関数 $\dfrac{20}{11^2}x^2$ のリーマン和 S_n は定積分 $\displaystyle\int_0^{11}\frac{20}{11^2}x^2dx$ に収束する．三角錐 ABCD の体積は

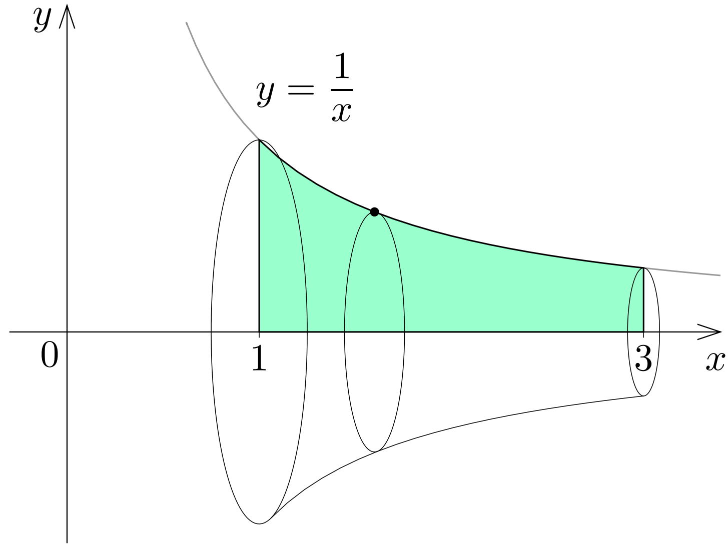
$$\lim_{n\to\infty}S_n = \int_0^{11}\frac{20}{11^2}x^2\,dx$$
$$= \frac{20}{11^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{11}$$
$$= \frac{20}{11^2}\cdot\frac{1}{3}11^3$$
$$= \frac{220}{3}\ .$$



終

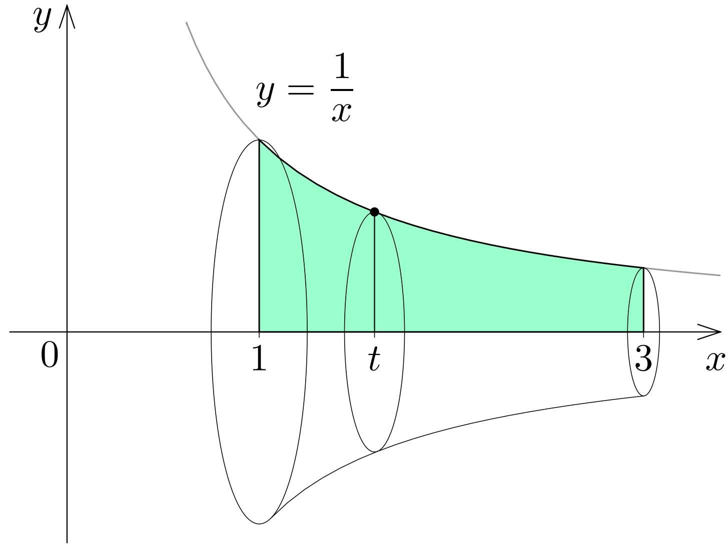
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える. 3 次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える．3 次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める．



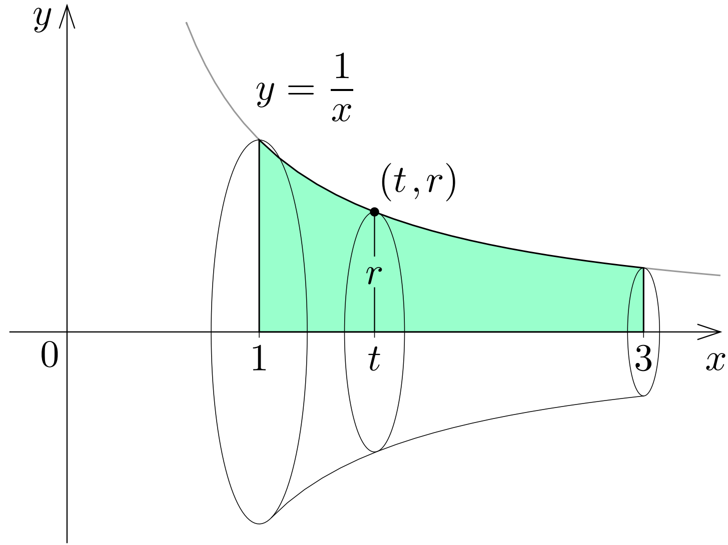
例 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える．3 次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める．

与えられた回転体を V とおく．区間 $[1,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である；



$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える．3 次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める．

与えられた回転体を V とおく．区間 $[1,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフに属すので，

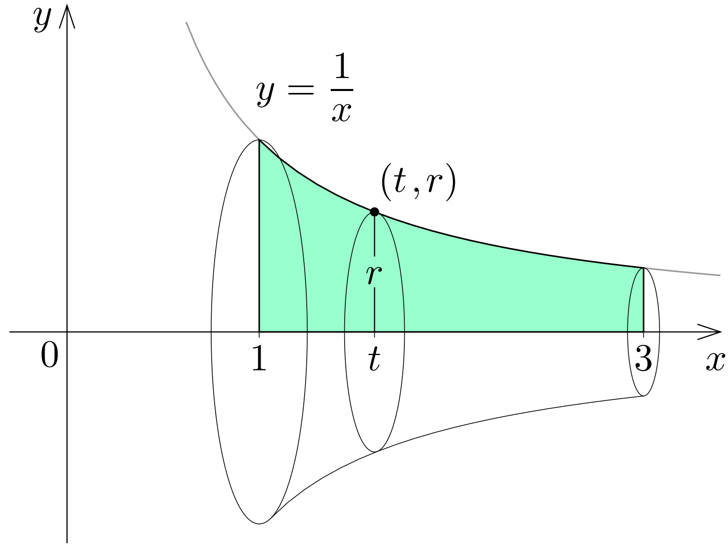


$r =$;

$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える．3 次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める．

与えられた回転体を V とおく．
区間 $[1,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフに属すので，

$r = \dfrac{1}{t}$ ；

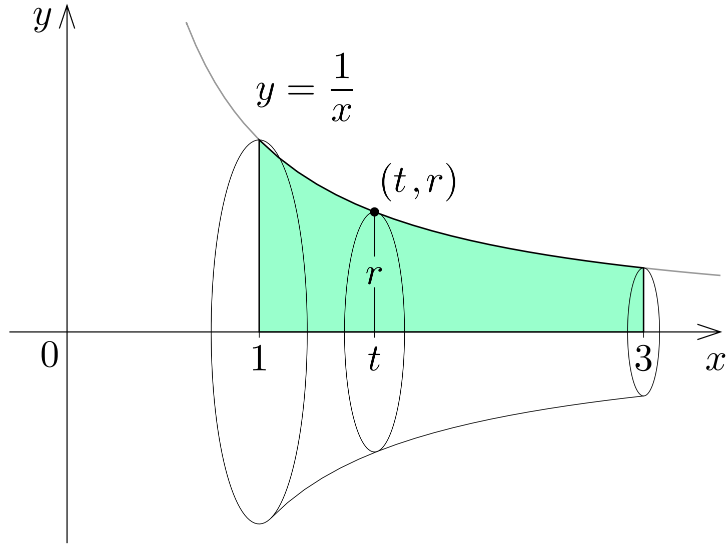


$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$ との連立で表される平面領域を考える．3 次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める．

与えられた回転体を V とおく．区間 $[1,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフに属すので，

$r = \dfrac{1}{t}$ ；よって，共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{\pi}{t^2} \ .$$



従って，回転体 V の体積は，

$$\int_1^3 S(t)\,dt = \int_1^3 \frac{\pi}{t^2}\,dt = \pi\int_1^3 t^{-2}dt = \pi\left[-t^{-1}\right]_1^3 = -\pi\left[\frac{1}{t}\right]_1^3 = -\pi\left(\frac{1}{3}-1\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}8.3.2}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考える．3 次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めよ．

与えられた回転体を V とおく．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は $y = e^x - 1$ のグラフに属すので，$r =$ ；よって，この共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi(\qquad)^2 .$$

従って，回転体 V の体積は，

$$\int_0^3 S(t)\,dt = \int_0^2 \qquad\qquad dt =$$

$\boxed{問 8.3.2}$ xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考える．3 次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めよ．

与えられた回転体を V とおく．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は $y = e^x - 1$ のグラフに属すので， $r = e^t - 1$ ；よって，この共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi(e^t - 1)^2 \ .$$

従って，回転体 V の体積は，

$$\int_0^3 S(t)\,dt = \int_0^2 \pi(e^t - 1)^2 dt =$$

問8.3.2 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考える．3 次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めよ．

与えられた回転体を V とおく．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は $y = e^x - 1$ のグラフに属すので， $r = e^t - 1$ ；よって，この共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi(e^t - 1)^2 \ .$$

従って，回転体 V の体積は，

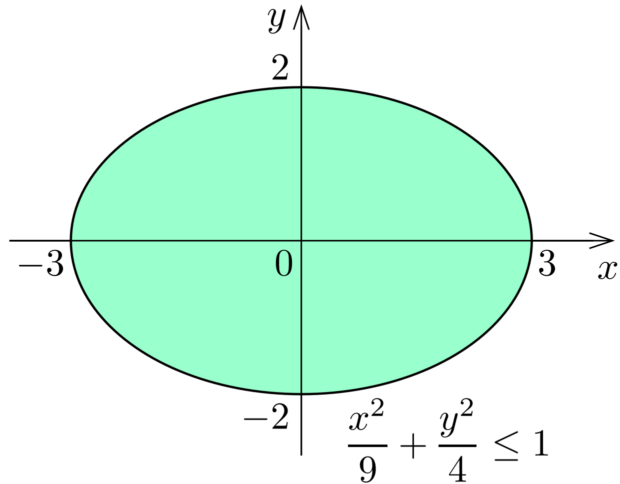
$$\begin{aligned} \int_0^3 S(t)\,dt &= \int_0^2 \pi(e^t - 1)^2 dt = \pi \int_0^3 (e^{2t} - 2e^t + 1)\,dt \\ &= \pi\left[\frac{1}{2}e^{2t} - 2e^t + t\right]_0^3 = \pi\left(\frac{1}{2}e^6 - 2e^3 + 3 - \frac{1}{2} + 2\right) \\ &= \pi\left(\frac{e^6 + 9}{2} - 2e^3\right) \ . \end{aligned}$$

終

例 xy 座標平面において不等式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$ が表す平面領域を，3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める.

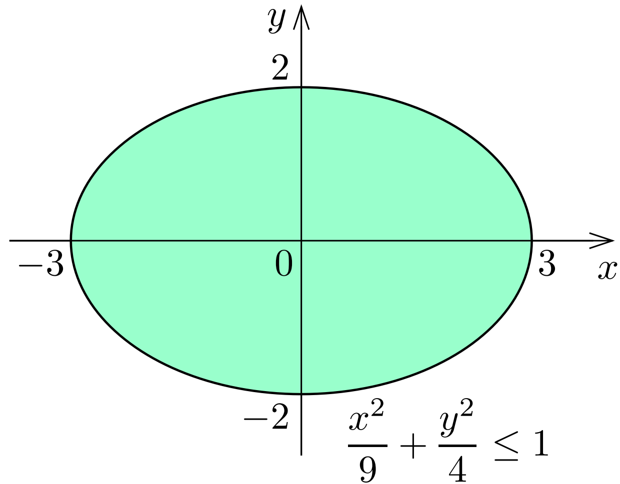
$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面において不等式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4} \leqq 1$ が表す平面領域を，3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める.

不等式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4} \leqq 1$ が表す平面領域は，方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4} = 1$ が表す楕円の境界と内部とを併せた領域である.



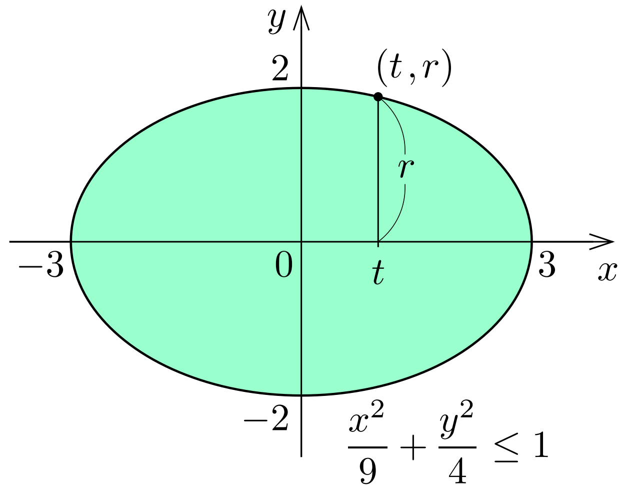
$\boxed{例}$ xy 座標平面において不等式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$ が表す平面領域を，3 次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求める．

不等式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$ が表す平面領域は，方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ が表す楕円の境界と内部とを併せた領域である．この領域の点 $(x\,,y)$ について，$1-\dfrac{x^2}{9}\geq\dfrac{y^2}{4}\geq 0$ なので，$x^2\leq 9$ ，
$x^2-9\leq 0$ ，$(x+3)(x-3)\leq 0$ ，
$-3\leq x\leq 3$ ．



区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に属すので $\dfrac{t^2}{9}+\dfrac{r^2}{4}=1$，よって

$$r^2 = 4-\frac{4}{9}t^2\ ;$$

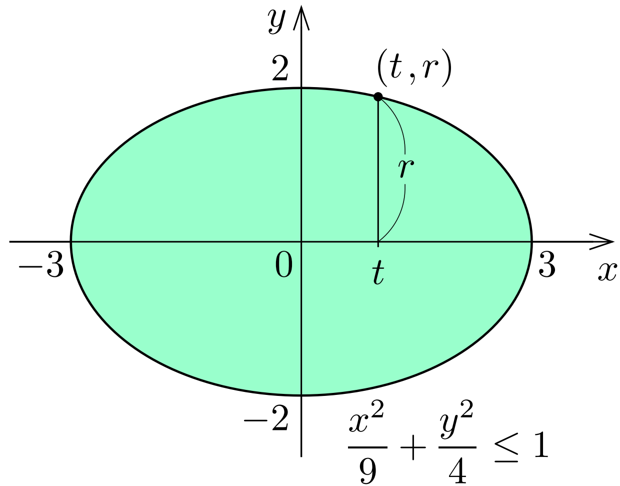


区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に属すので $\dfrac{t^2}{9}+\dfrac{r^2}{4}=1$，よって

$$r^2 = 4-\frac{4}{9}t^2 \ ;$$

共通部分の面積 $S(t)$ は

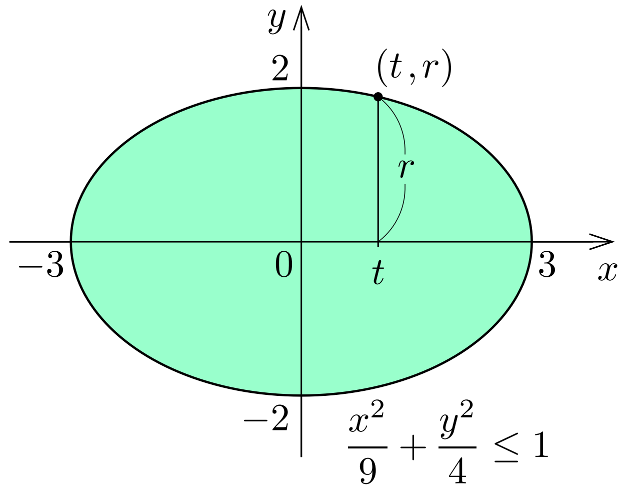
$$S(t) = \pi r^2 = \pi\left(4-\frac{4}{9}t^2\right) \ .$$



区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点が属し x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

に属すので $\dfrac{t^2}{9}+\dfrac{r^2}{4}=1$，よって

$$r^2=4-\frac{4}{9}t^2\ ;$$



共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\pi r^2=\pi\left(4-\frac{4}{9}t^2\right)\ .$$

故に回転体 V の体積は，

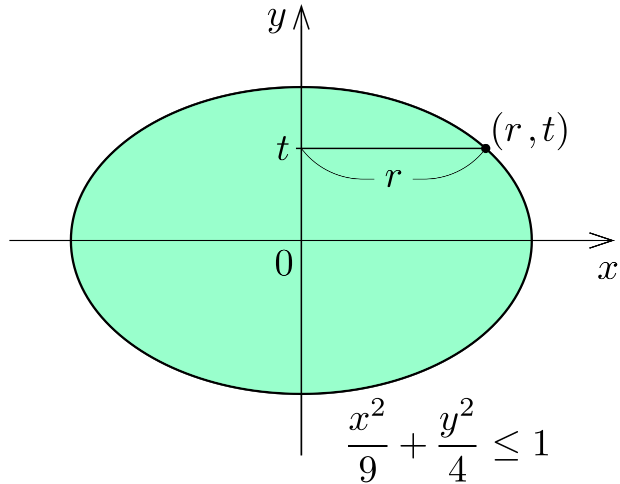
$$\int_{-3}^{3}S(t)\,dt=\int_{-3}^{3}\pi\left(4-\frac{4}{9}t^2\right)dt=\pi\left[4t-\frac{4}{27}t^3\right]_{-3}^{3}=\pi\left\{3-\frac{27}{27}-\left(-3-\frac{27}{27}\right)\right\}$$

$$=16\pi\ .$$

終

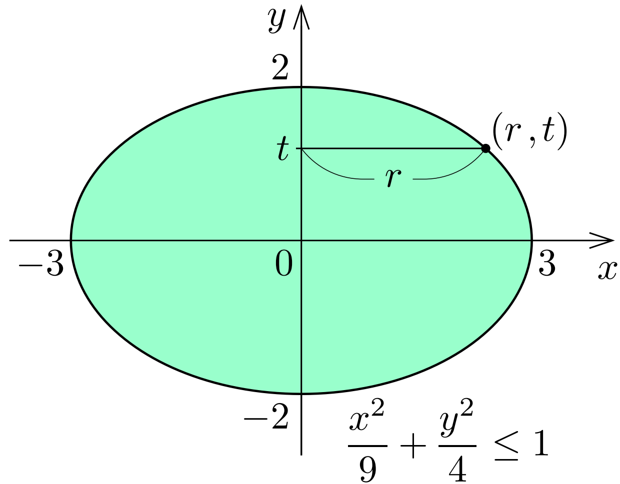
問 xy 座標平面において不等式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$ が表す平面領域を，3 次元空間において y 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求めよ．

不等式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$ が表す平面領域は方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ が表す楕円の境界と内部とを併せた領域である．この領域の点 (x,y) について，$1-\dfrac{y^2}{4}\geq\dfrac{x^2}{9}\geq 0$ なので，$y^2\leq\quad$，$y^2-\quad\leq 0$，$(y+\quad)(y-\quad)\leq 0$，$\quad\leq y\leq\quad$．区間 $[\quad,\quad]$ の各実数 t に対して，y 軸の座標 t の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (r,t) は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に属すので，$\dfrac{r^2}{9}+\dfrac{t^2}{4}=1$，$r^2=\quad$．



$\boxed{\text{問}}$ xy 座標平面において不等式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$ が表す平面領域を，3 次元空間において y 軸を中心に回転させてできる回転体 V の体積を求めよ．

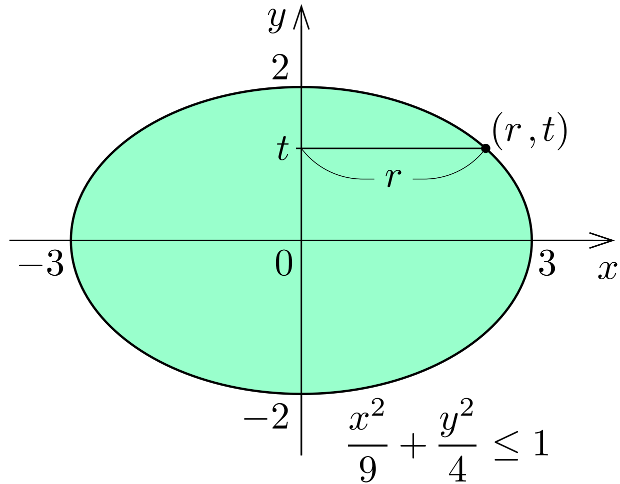
不等式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leq 1$ が表す平面領域は方程式 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ が表す楕円の境界と内部とを併せた領域である．この領域の点 (x,y) について，$1-\dfrac{y^2}{4}\geq\dfrac{x^2}{9}\geq 0$ なので，$y^2\leq 4$ ，$y^2-4\leq 0$ ，$(y+2)(y-2)\leq 0$ ，$-2\leq y\leq 2$ ．区間 $[-2,2]$ の各実数 t に対して，y 軸の座標 t の点が属し y 軸に垂直な平面と V との



共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (r,t) は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に属すので，$\dfrac{r^2}{9}+\dfrac{t^2}{4}=1$ ，$r^2=9-\dfrac{9}{4}t^2$ ．

y 軸の座標 t の点が属し y 軸に垂直な平面と V との共通部分である円について，半径を r とおくと $r^2 = 9 - \dfrac{9}{4}t^2$ なので，面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi\left(9 - \frac{9}{4}t^2\right) .$$

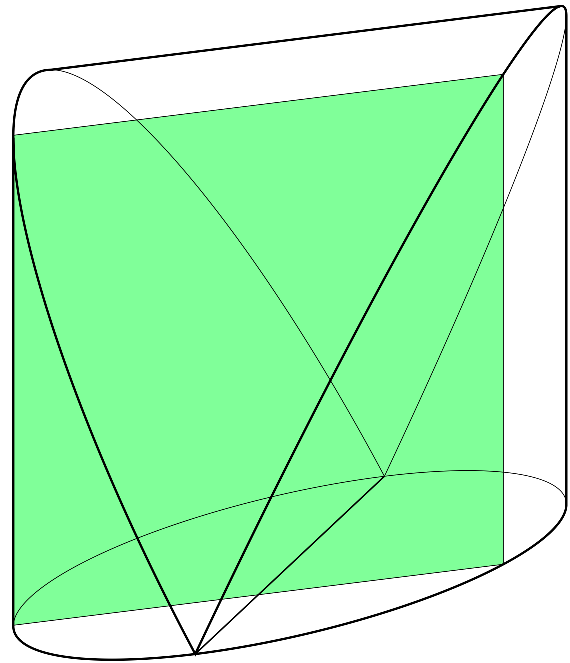


回転体 V の体積は

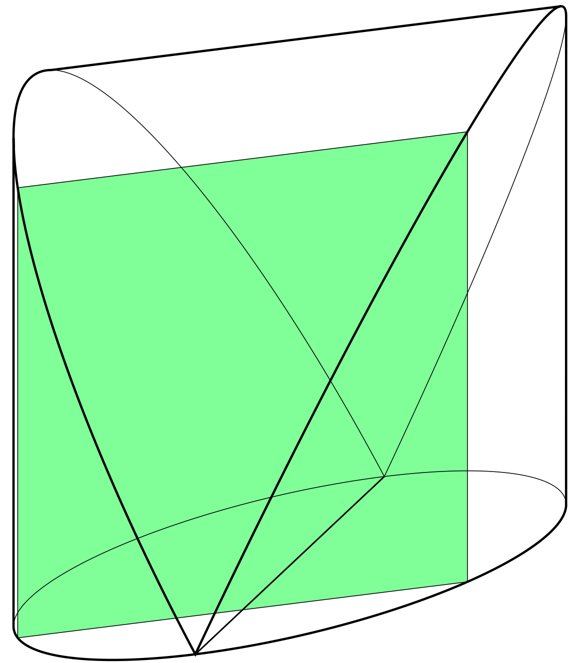
$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2} S(t)\,dt &= \int_{-2}^{2} \pi\left(9 - \frac{9}{4}t^2\right)dt \\ &= \pi\left[9t - \frac{3}{4}t^3\right]_{-2}^{2} \\ &= 24\pi .\end{aligned}$$

終

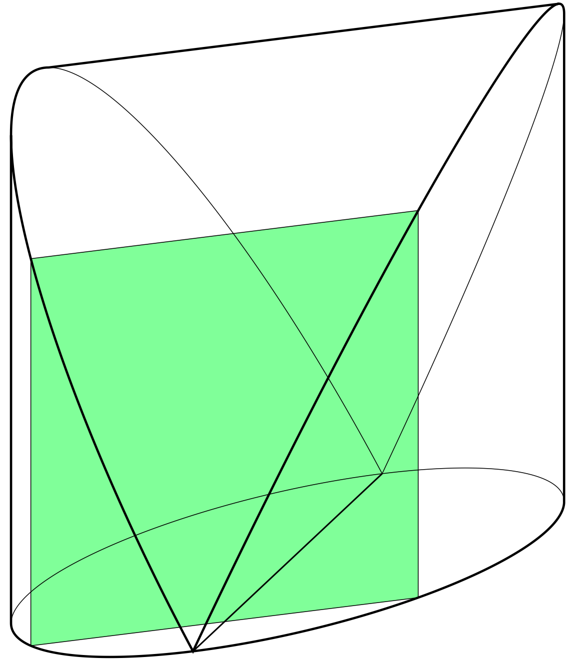
$\boxed{\text{例}}$ 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり，底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である．



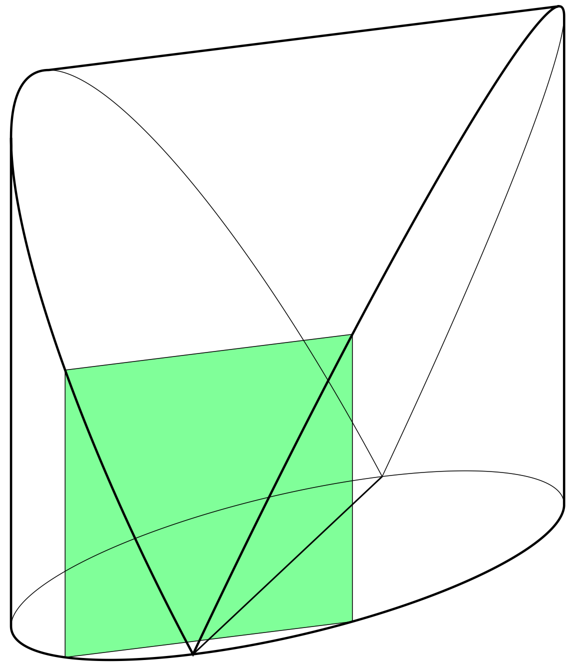
例 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり，底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である.



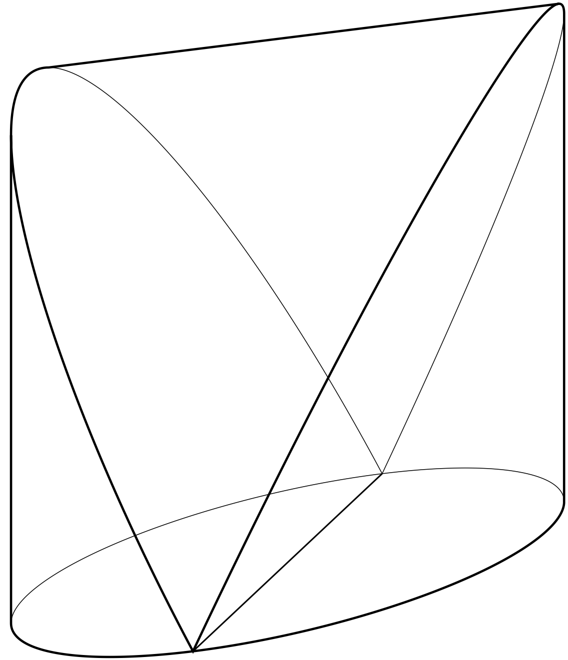
$\boxed{\text{例}}$ 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり，底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である.



$\boxed{\text{例}}$ 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり，底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である．

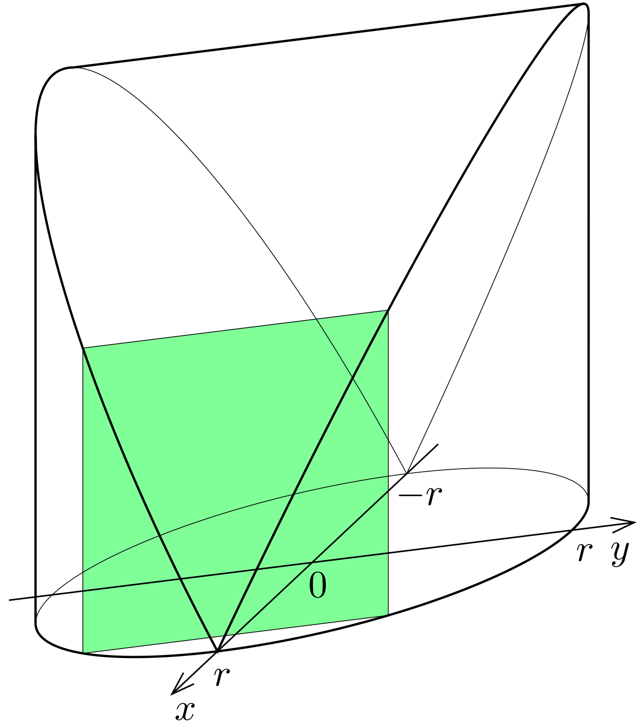


$\boxed{\text{例}}$ 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり，底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である．この立体図形 V の体積を求める．

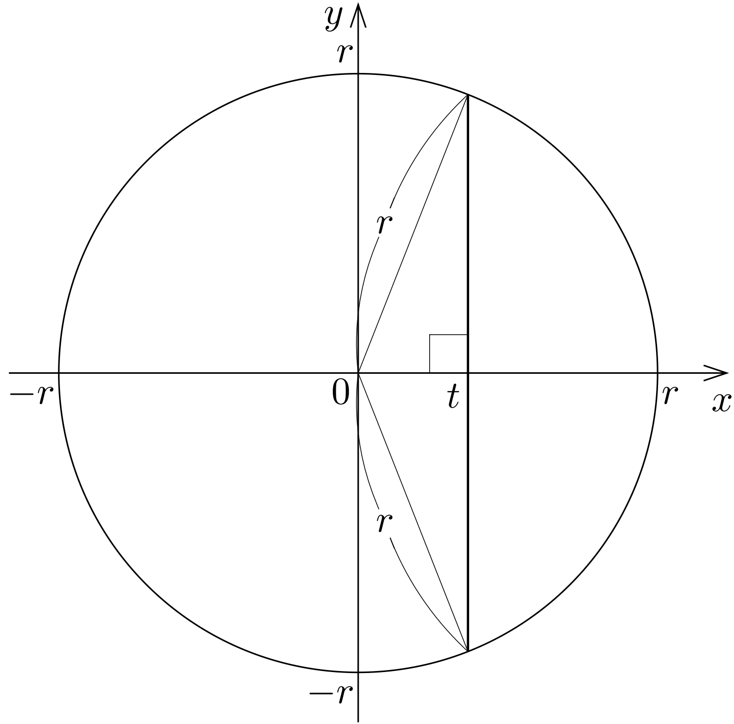


$\boxed{例}$ 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり，底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正方形で囲まれる平面領域である．この立体図形 V の体積を求める．

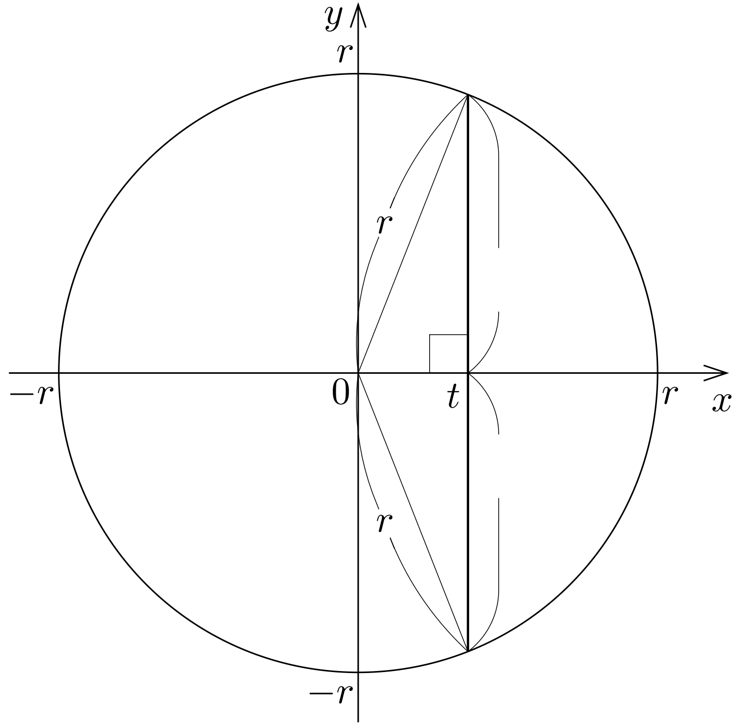
立体図形 V の底面を含む平面において底面の円の中心を原点とする xy 座標系をおく．x 軸に垂直な各平面と立体 V との共通部分が正方形である．V に属す点の x 座標の範囲は $-r \leq x \leq r$ ．



$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して，x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．

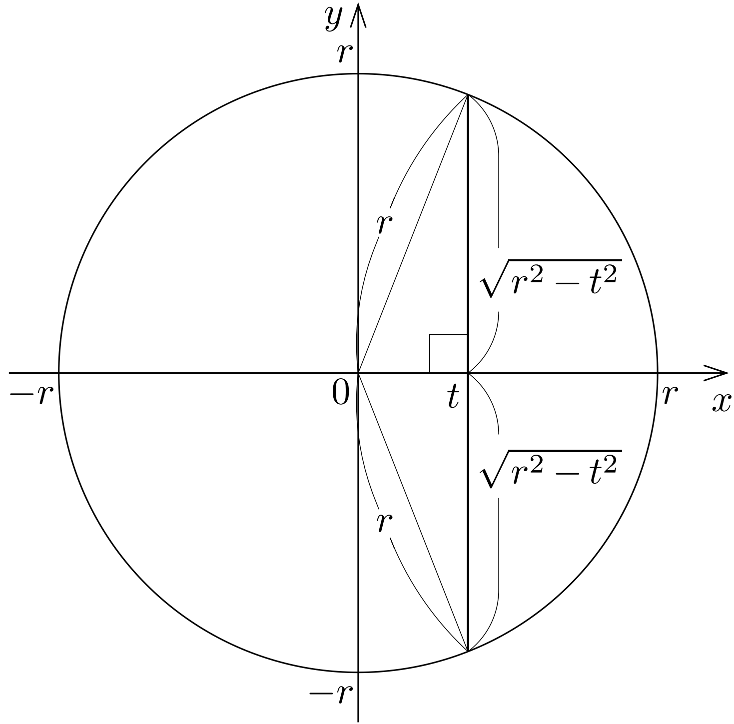


$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して，x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．正方形の 1 辺の長さは　　　　　　　　なので，正方形の面積は



$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して，x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．正方形の1辺の長さは $2\sqrt{r^2-t^2}$ なので，正方形の面積は

$$\left(2\sqrt{r^2-t^2}\right)^2 = 4(r^2-t^2)\ .$$

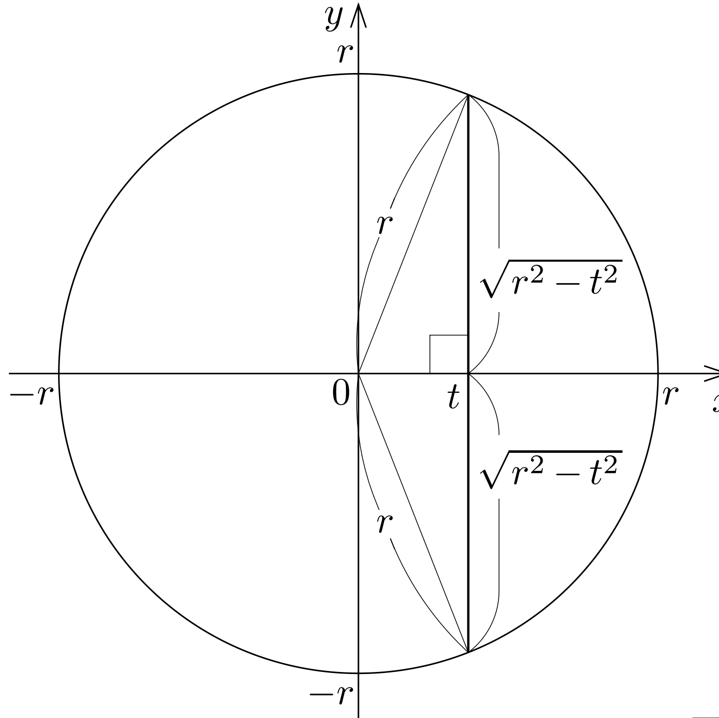


$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して，x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正方形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．正方形の 1 辺の長さは $2\sqrt{r^2-t^2}$ なので，正方形の面積は

$$\left(2\sqrt{r^2-t^2}\right)^2 = 4(r^2-t^2) \ .$$

V の体積は

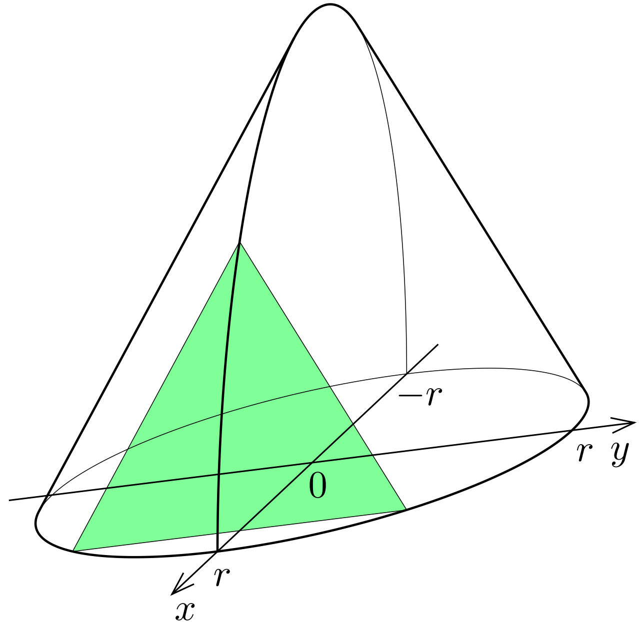
$$\int_{-r}^{r} 4(r^2-t^2)\,dt = 4\left[r^2t - \frac{1}{3}t^3\right]_{-r}^{r} = \frac{16}{3}r^3 \ .$$



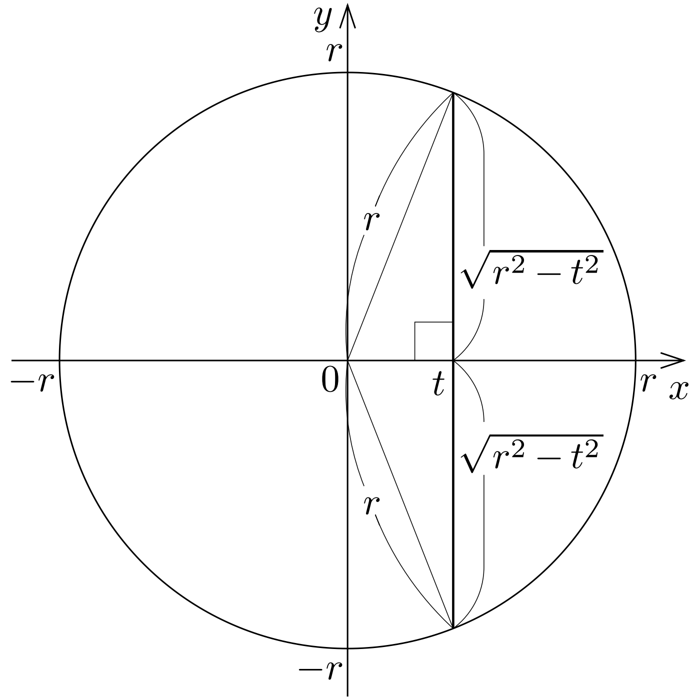
終

$\boxed{問8.3.4}$ 立体図形 V の底面は半径が r である円で囲まれる平面領域であり，底面の円のある直径に垂直な各平面と立体図形 V との共通部分は底辺が V の底面の円の弦である正三角形で囲まれる平面領域である．この立体図形 V の体積を求める．

立体図形 V の底面を含む平面において底面の円の中心を原点とする xy 座標系をおく．x 軸に垂直な各平面と立体 V との共通部分が正三角形である．V に属す点の x 座標の範囲は $-r \leq x \leq r$ ．



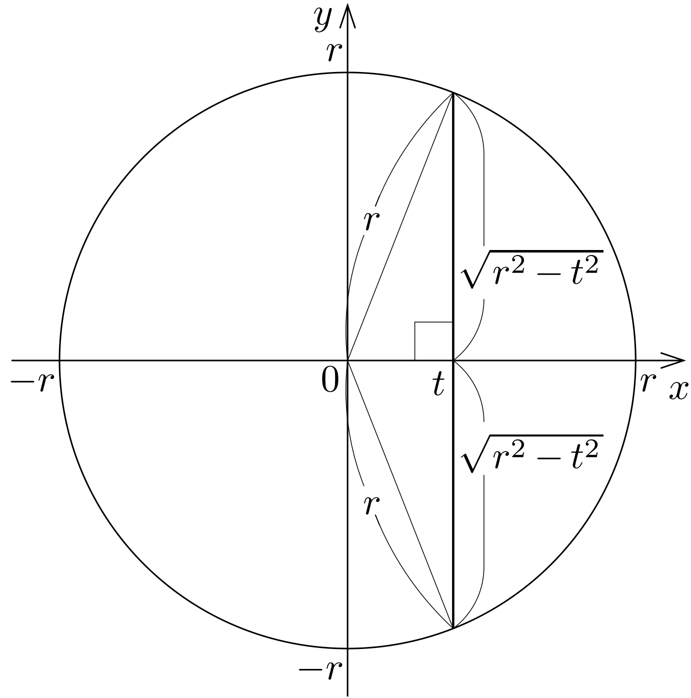
$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して，x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正三角形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．



正三角形の 1 辺の長さは $2\sqrt{r^2-t^2}$ なので，正三角形の面積は

V の体積は

$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して，x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正三角形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる.



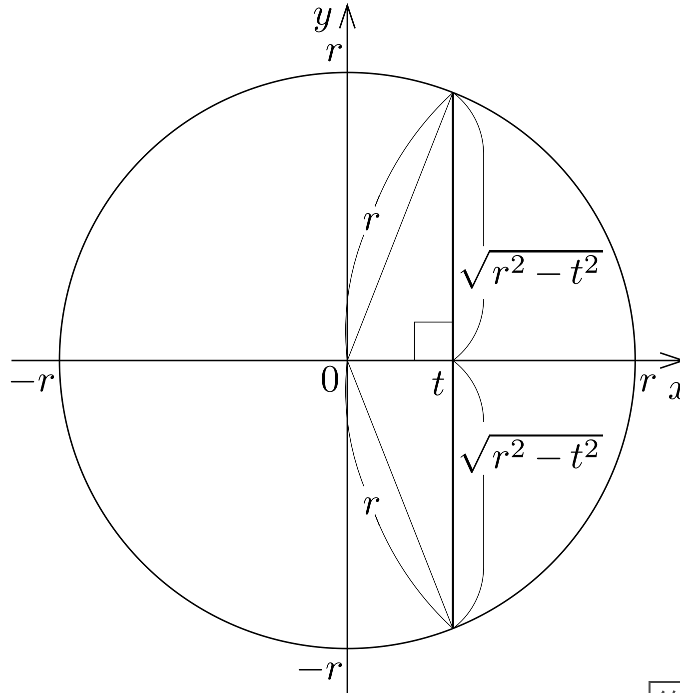
正三角形の 1 辺の長さは $2\sqrt{r^2-t^2}$ なので，正三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{r^2-t^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{r^2-t^2}$$

$$= \sqrt{3}\left(r^2-t^2\right) .$$

V の体積は

$-r \leq t \leq r$ である各実数 t に対して，x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の正三角形の底辺を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．



正三角形の 1 辺の長さは $2\sqrt{r^2-t^2}$ なので，正三角形の面積は

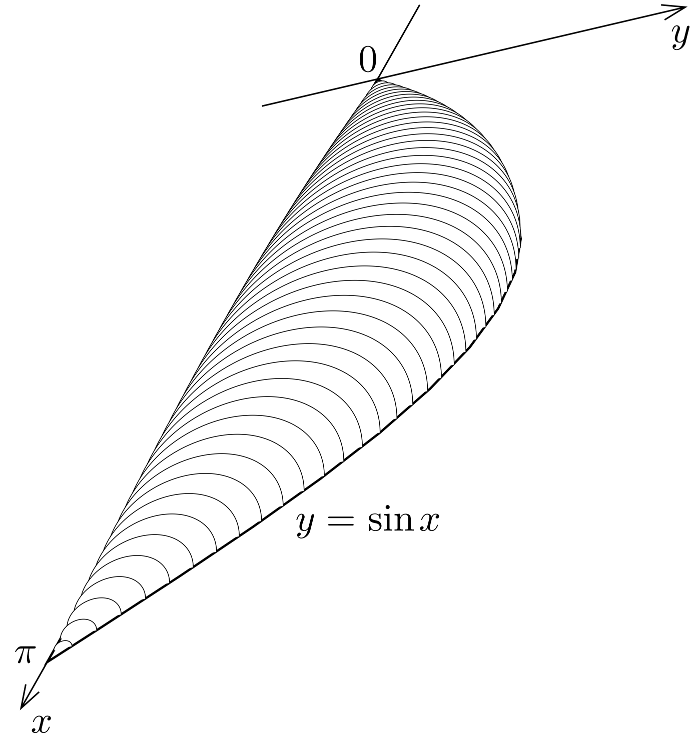
$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{r^2-t^2}\cdot\sqrt{3}\sqrt{r^2-t^2}$$
$$=\sqrt{3}\left(r^2-t^2\right) .$$

V の体積は

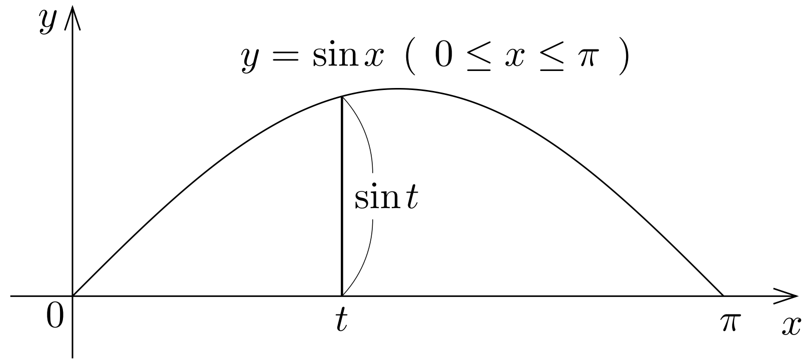
$$\int_{-r}^{r}\sqrt{3}(r^2-t^2)\,dt=\sqrt{3}\left[r^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-r}^{r}$$
$$=\frac{4}{3}\sqrt{3}\,r^3 .$$

終

$\boxed{\text{問}8.3.5}$ xy 座標平面の上に載っている立体図形 V がある．V の底面は xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq \pi$ と $0 \leq y \leq \sin x$ との連立で表される平面領域である．x 軸に垂直で x 軸との共有点の x 座標が 0 以上 π 以下である各平面と V との共通部分は半円で囲まれる平面領域であり，その半円の直径である線分の一方の端点は x 軸に属しもう一方の端点は $y = \sin x$ のグラフに属す．この立体図形 V の体積を求めよ．

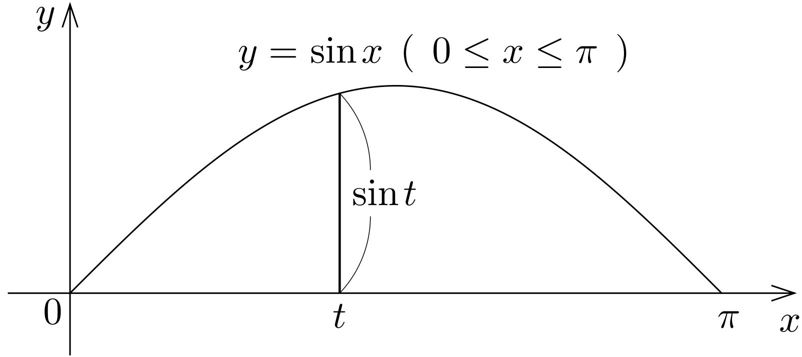


$0 \leq t \leq \pi$ である各実数 t に対して，x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の半円の直径である線分を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．



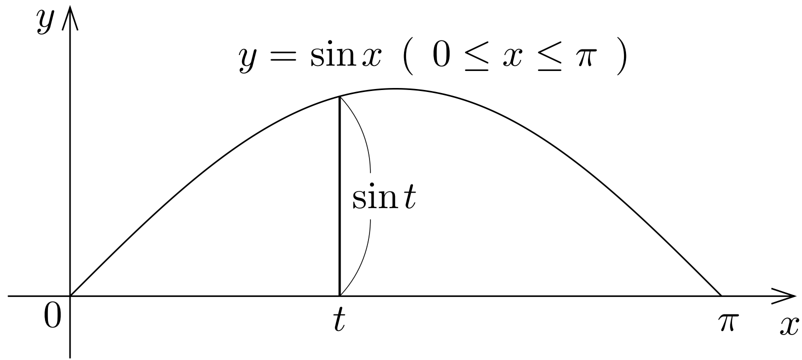
半円の直径が $\sin t$ なので，半円の面積は　　　　　　　　　　である．V の体積は

$0 \leq t \leq \pi$ である各実数 t に対して，x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の半円の直径である線分を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．



半円の直径が $\sin t$ なので，半円の面積は $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\sin t}{2}\right)^2$ である．V の体積は

$0 \leq t \leq \pi$ である各実数 t に対して，x 軸の座標が t である点が属し x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分の半円の直径である線分を xy 座標平面で図示すると右図のようになる．



半円の直径が $\sin t$ なので，半円の面積は $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\sin t}{2}\right)^2$ である．V の体積は

$$\int_0^{\pi} \frac{\pi}{2}\left(\frac{\sin t}{2}\right)^2 dt = \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt = \frac{\pi}{8}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\, dt = \frac{\pi}{16}\left[t - \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{16}\ .$$