

## 8.4 関数のグラフの長さ

定積分の定義を復習する.

定義 実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  で、関数  $f$  の定義域は区間  $[a, b]$  を含むとする. 正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

とおく.  $S_n$  を  $f$  のリーマン和という.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  であるどのようなリーマン和  $S_n$  も  $n \rightarrow \infty$  のとき収束して極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が関数  $f$  及び実数  $a, b$  だけから唯一つに決まるならば, 関数  $f$  は  $a$  から  $b$  まで (定) 積分可能であるといい, リーマン和  $S_n$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を  $a$  から  $b$  までの  $f$  の定積分といい,  $\int_a^b f(x) dx$  と書き表す:  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

定義 実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  で、関数  $f$  の定義域は区間  $[a, b]$  を含むとする。正の各自然数  $n$  に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり、

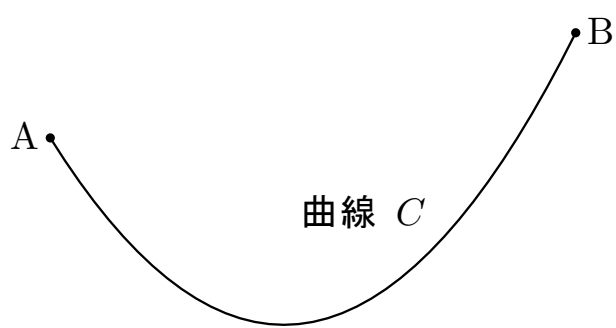
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

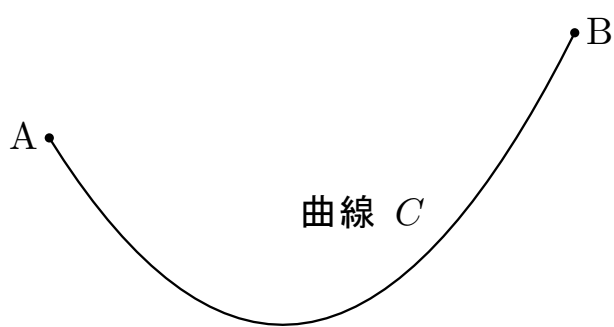
とおく。 $S_n$  を  $f$  のリーマン和という。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  であるどのようなリーマン和  $S_n$  も  $n \rightarrow \infty$  のとき収束して極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が関数  $f$  及び実数  $a, b$  だけから唯一つに決まるならば、関数  $f$  は  $a$  から  $b$  まで (定) 積分可能であるといい、リーマン和  $S_n$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を  $a$  から  $b$  までの  $f$  の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$  と書き表す： $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  .

関数  $f$  が  $a$  から  $b$  まで積分可能であるとき, 関数  $f$  は  $b$  から  $a$  まで積分可能であるといい,  $f$  の  $b$  から  $a$  までの定積分  $\int_b^a f(x) dx$  を次のように定義する:  $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$  .

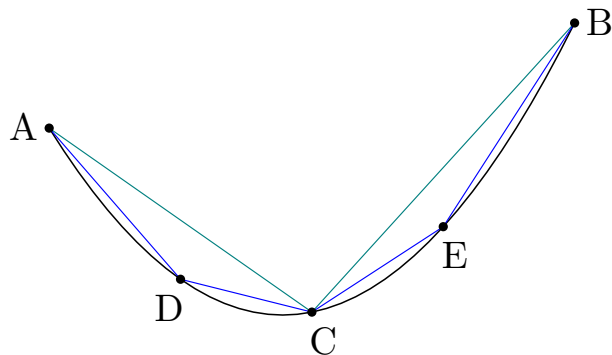
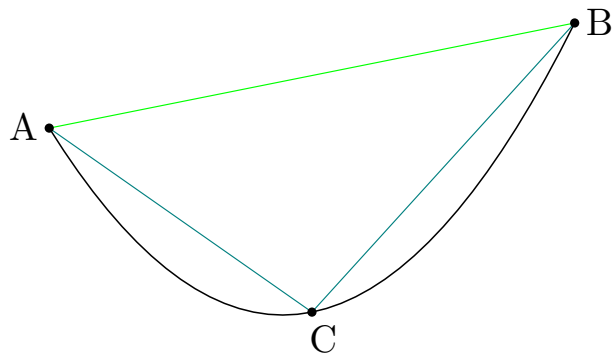
例として、右図のような、放物線の一部を  $C$  とおく。この曲線  $C$  の長さを考える。曲線  $C$  の端点の各々を  $A, B$  とおく。

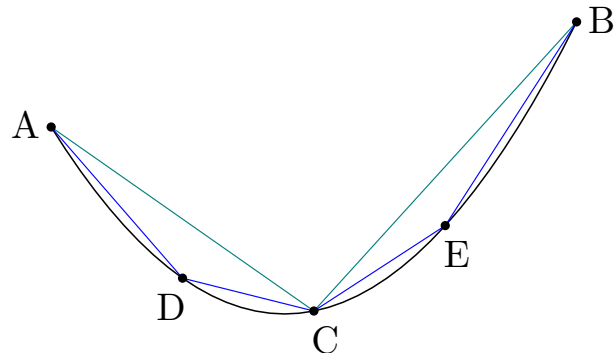
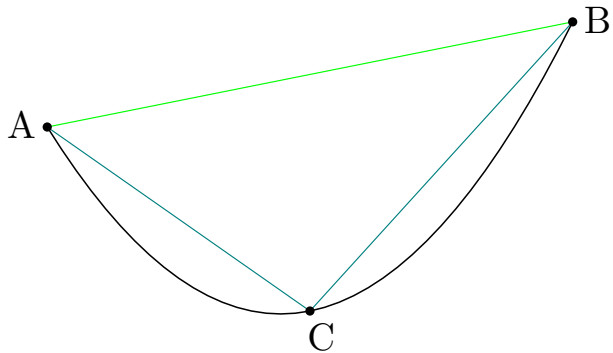


例として、右図のような、放物線の一部を  $C$  とおく。この曲線  $C$  の長さを考える。曲線  $C$  の端点の各々を  $A, B$  とおく。グラフに属す点のうち、点  $A$  と点  $B$  との間にある点  $C$  をとる。このとき、



線分  $AB$  の長さ  $<$  折れ線  $ACB$  の長さ  $<$  曲線  $C$  の長さ。

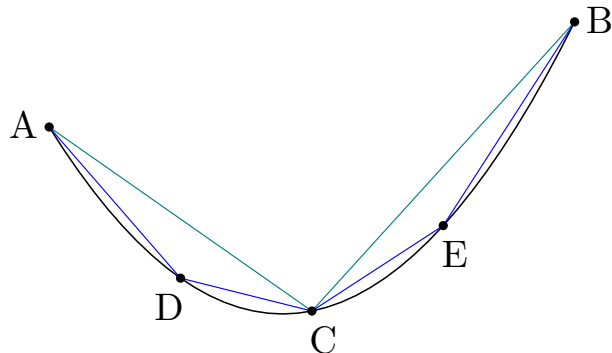
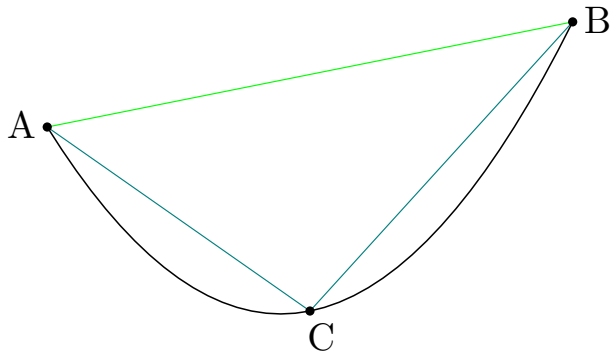




グラフに属す点のうち、点 A と点 C との間にある点 D と、点 C と点 B との間にある点 E とをとる。このとき、

折れ線 ACB の長さ < 折れ線 ADCEB の長さ < 曲線 C の長さ .



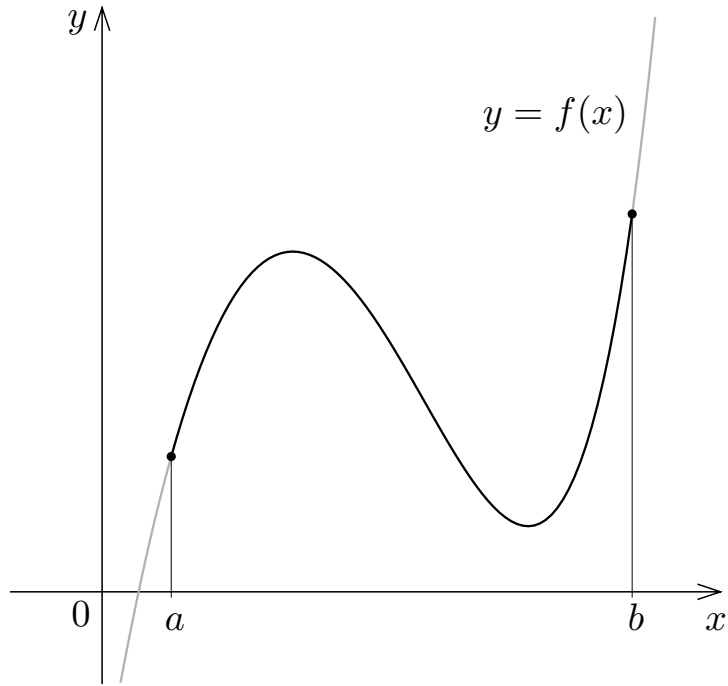


グラフに属す点のうち、点 A と点 C との間にある点 D と、点 C と点 B との間にある点 E とをとる。このとき、

折れ線  $ACB$  の長さ  $<$  折れ線  $ADCEB$  の長さ  $<$  曲線  $C$  の長さ。

このように、節点（折れる点）がより多い折れ線で曲線を近似すると、折れ線の長さは曲線の長さに近づいてく。

実数  $a$  と  $b$  について  
 $a \leq b$  で, 関数  $f$  の  
導関数  $f'$  は区間  $[a, b]$  に  
おいて連続であるとする.  
 $xy$  座標平面において不等  
式  $a \leq x \leq b$  と方程式  
 $y = f(x)$  との連立で表され  
る曲線の長さを考える.



正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  をとる.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  とする.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  をとる.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  とする.

$y = f(x)$  のグラフの点  $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  を次のように定める:

$$P_0 = (x_0, f(x_0)) , P_1 = (x_1, f(x_1)) , P_2 = (x_2, f(x_2)) , P_3 = (x_3, f(x_3)) , \cdots , \\ P_{n-1} = (x_{n-1}, f(x_{n-1})) , P_n = (x_n, f(x_n)) .$$

正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  をとる.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  とする.

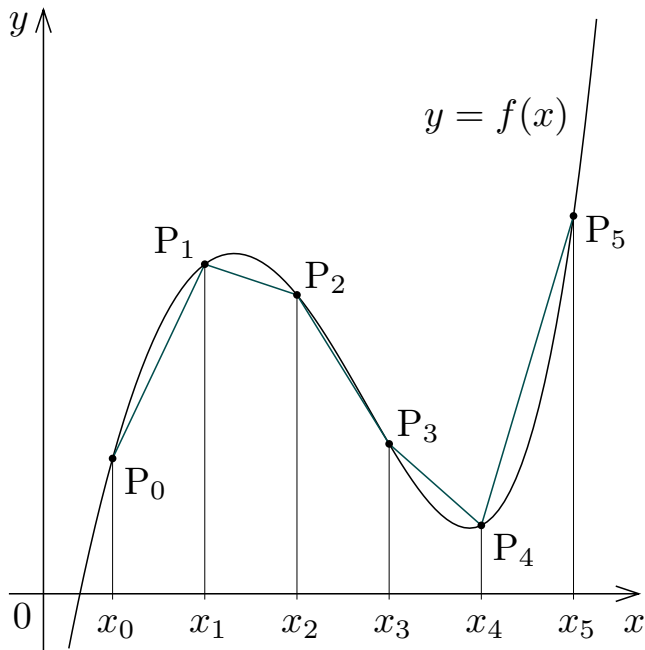
$y = f(x)$  のグラフの点  $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  を次のように定める:

$$P_0 = (x_0, f(x_0)), \quad P_1 = (x_1, f(x_1)), \quad P_2 = (x_2, f(x_2)), \quad P_3 = (x_3, f(x_3)), \quad \cdots, \\ P_{n-1} = (x_{n-1}, f(x_{n-1})), \quad P_n = (x_n, f(x_n)).$$

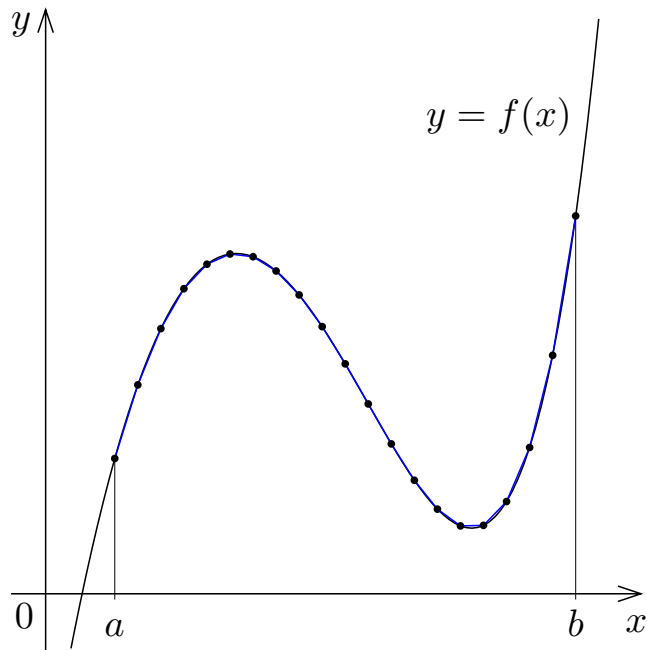
点  $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P_n$  を順に結ぶ折れ線の長さを  $L_n$  とおく:

$$L_n = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n} = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k}.$$

例えば次のような図になる.



$n = 5$  のときの折れ線



$n = 20$  のときの折れ線

次の定理があった.

定理 (平均値の定理) 実数  $p$  と  $q$  について  $p < q$  で, 関数  $f$  が区間  $[p, q]$  において微分可能であるならば, 次のような実数  $r$  がある:

$$f(q) - f(p) = f'(r)(q - p) \quad \text{かつ} \quad p < r < q .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $P_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$  ,  $P_k = (x_k, f(x_k))$   
なので, 線分  $P_{k-1}P_k$  の長さ  $\overline{P_{k-1}P_k}$  は

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} .$$



$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $P_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ,  $P_k = (x_k, f(x_k))$   
なので, 線分  $P_{k-1}P_k$  の長さ  $\overline{P_{k-1}P_k}$  は

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} .$$

$x_{k-1} < x_k$  なので, 平均値の定理より,

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

である実数  $\xi_k$  がある.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $P_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ,  $P_k = (x_k, f(x_k))$   
なので, 線分  $P_{k-1}P_k$  の長さ  $\overline{P_{k-1}P_k}$  は

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} .$$

$x_{k-1} < x_k$  なので, 平均値の定理より,

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

である実数  $\xi_k$  がある.

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}^2}$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $P_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ,  $P_k = (x_k, f(x_k))$   
なので, 線分  $P_{k-1}P_k$  の長さ  $\overline{P_{k-1}P_k}$  は

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} .$$

$x_{k-1} < x_k$  なので, 平均値の定理より,

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

である実数  $\xi_k$  がある.

$$\begin{aligned} \overline{P_{k-1}P_k} &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 \{1 + f'(\xi_k)^2\}} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} . \end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,  $P_{k-1} = (x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ ,  $P_k = (x_k, f(x_k))$   
なので, 線分  $P_{k-1}P_k$  の長さ  $\overline{P_{k-1}P_k}$  は

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} .$$

$x_{k-1} < x_k$  なので, 平均値の定理より,

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k$$

である実数  $\xi_k$  がある.

$$\begin{aligned} \overline{P_{k-1}P_k} &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}^2} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 \{1 + f'(\xi_k)^2\}} \\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} . \end{aligned}$$

$x_{k-1} < x_k$  より  $x_k - x_{k-1} > 0$  なので  $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} = x_k - x_{k-1}$ , よって

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1}) .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1}) .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1}) .$$

従って、折れ線の長さ  $L_n$  は

$$L_n = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1}) .$$

従って、折れ線の長さ  $L_n$  は

$$L_n = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

関数  $F$  を  $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$  とおく。このとき,

$$L_n = \sum_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して,

$$\overline{P_{k-1}P_k} = \sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} (x_k - x_{k-1}) .$$

従って、折れ線の長さ  $L_n$  は

$$L_n = \sum_{k=1}^n \overline{P_{k-1}P_k} = \sum_{k=1}^n \left\{ \sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

関数  $F$  を  $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$  とおく。このとき,

$$L_n = \sum_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

$a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \xi_3 < x_3 < \dots < x_{n-1} < \xi_n < x_n = b$  なので、この等式の右辺は関数  $F$  のリーマン和である。



$L_n = \sum_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は関数  $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$  のリーマン和である.

$L_n = \sum_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は関数  $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$  のリーマン和である。関数  $f$  の導関数  $f'(x)$  は連続なので、関数  $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$  も連続である。従って関数  $F$  は  $a$  から  $b$  まで積分可能である。

$L_n = \sum_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は関数  $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$  のリーマン和である。関数  $f$  の導関数  $f'(x)$  は連続なので、関数  $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$  も連続である。従って関数  $F$  は  $a$  から  $b$  まで積分可能である。  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  なので、  $n \rightarrow \infty$  のとき  $L_n$  は  $F$  の定積分  $\int_a^b F(x) dx$  に収束する：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx .$$

$L_n = \sum_{k=1}^n \{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は関数  $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$  のリーマン和である. 関数  $f$  の導関数  $f'(x)$  は連続なので, 関数  $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$  も連続である. 従って関数  $F$  は  $a$  から  $b$  まで積分可能である.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  なので,  $n \rightarrow \infty$  のとき  $L_n$  は  $F$  の定積分  $\int_a^b F(x) dx$  に収束する:

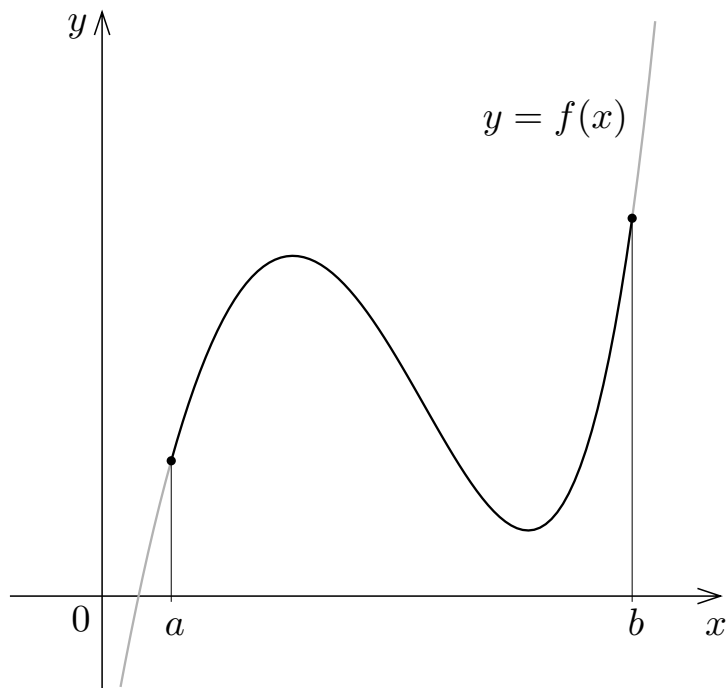
$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx .$$

方程式  $y = f(x)$  と不等式  $a \leq x \leq b$  とで表される曲線の長さは  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n$  なので  $\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$  である.

定理 実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  で、関数  $f$  の導関数  $f'$  は区間  $[a, b]$  において連続であるとする。  
 $xy$  座標平面において不等式  $a \leq x \leq b$  と方程式  $y = f(x)$  との連立で表される曲線の長さは

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

である。



**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.

**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.

$y = 2\sqrt{x^3}$  より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sqrt{x^3}) = 2 \cdot \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} ,$$

**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.

$y = 2\sqrt{x^3}$  より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sqrt{x^3}) = 2 \cdot \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + (3\sqrt{x})^2 = 9x + 1 .$$



**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.

$y = 2\sqrt{x^3}$  より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sqrt{x^3}) = 2 \cdot \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + (3\sqrt{x})^2 = 9x + 1 .$$

曲線  $C$  の長さは  $\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{9x + 1} dx$  である.

**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x^3}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.

$y = 2\sqrt{x^3}$  より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sqrt{x^3}) = 2 \cdot \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + (3\sqrt{x})^2 = 9x + 1 .$$

曲線  $C$  の長さは  $\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{9x + 1} dx$  である. 変数  $t$  を  $t = 9x + 1$  とおく.  $\frac{dt}{dx} = 9$  より  $dx = \frac{1}{9} dt$ .  $x = 0$  のとき  $t = 1$ .  $x = 1$  のとき  $t = 10$ .

**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 1$  と方程式  $y = 2\sqrt{x}^3$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.

$y = 2\sqrt{x}^3$  より,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2\sqrt{x}^3) = 2 \cdot \frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + (3\sqrt{x})^2 = 9x + 1 .$$

曲線  $C$  の長さは  $\int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{9x + 1} dx$  である. 変数  $t$  を  $t = 9x + 1$  とおく.  $\frac{dt}{dx} = 9$  より  $dx = \frac{1}{9} dt$ .  $x = 0$  のとき  $t = 1$ .  $x = 1$  のとき  $t = 10$ . 曲線  $C$  の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{9x + 1} dx &= \int_1^{10} \sqrt{t} \frac{1}{9} dt = \frac{1}{9} \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{9} \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{10} = \frac{2}{27} (\sqrt{10}^3 - \sqrt{1}^3) \\ &= \frac{2}{27} (10\sqrt{10} - 1) . \end{aligned}$$

**問8.4.1**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 8$  と方程式  $y = \frac{\sqrt{x^3}}{3}$  との連

立で表される曲線  $C$  の長さを求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{x^3}}{3} = \frac{1}{3} \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = \quad = \quad \text{なので, 曲線 } C \text{ の長さは}$$

$$\int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^8 \sqrt{\quad} dx = \int_0^8 \sqrt{\quad} dx$$

変数  $t$  を  $t = \quad$  とおく.  $\frac{dt}{dx} = \quad$  なので  $dx = dt$ .  $x = 0$  のとき

$t = \quad$ .  $x = 8$  のとき  $t = \quad$ .

$$\int_0^8 \sqrt{\quad} dx =$$

曲線  $C$  の長さは  $\quad$  である.

**問8.4.1**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 8$  と方程式  $y = \frac{\sqrt{x^3}}{3}$  との連

立で表される曲線  $C$  の長さを求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{x^3}}{3} = \frac{1}{3} \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x} \quad \text{なので, 曲線 } C \text{ の長さは}$$

$$\int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^8 \sqrt{\frac{x}{4} + 1} dx .$$

変数  $t$  を  $t =$                       とおく.  $\frac{dt}{dx} =$                        なので  $dx = dt$  .  $x = 0$  のとき

$t =$                       .  $x = 8$  のとき  $t =$                       .

$$\int_0^8 \sqrt{\quad} dx =$$

曲線  $C$  の長さは                      である.

**問8.4.1**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 8$  と方程式  $y = \frac{\sqrt{x^3}}{3}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\sqrt{x^3}}{3} = \frac{1}{3} \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x} \quad \text{なので, 曲線 } C \text{ の長さは}$$

$$\int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^8 \sqrt{\frac{x}{4} + 1} dx .$$

変数  $t$  を  $t = \frac{x}{4} + 1$  とおく.  $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{4}$  なので  $dx = 4dt$ .  $x = 0$  のとき  $t = 1$ .  $x = 8$  のとき  $t = 3$ .

$$\int_0^8 \sqrt{\frac{x}{4} + 1} dx = 4 \int_1^3 t^{\frac{1}{2}} dt = 4 \left[ \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = 8\sqrt{3} - \frac{8}{3} .$$

曲線  $C$  の長さは  $8\sqrt{3} - \frac{8}{3}$  である.

終

**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 3$  と方程式  $y = \sqrt{12 - x^2}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.

**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 3$  と方程式  $y = \sqrt{12 - x^2}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.

$0 \leq x \leq 3$  の範囲で, 変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{12 - x^2}$  について,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{12 - x^2} = \frac{d}{dx} (12 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (12 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}},$$



**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 3$  と方程式  $y = \sqrt{12 - x^2}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める.

$0 \leq x \leq 3$  の範囲で, 変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{12 - x^2}$  について,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{12 - x^2} = \frac{d}{dx} (12 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (12 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{12 - x^2}} = \sqrt{\frac{12}{12 - x^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}},$$

**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 3$  と方程式  $y = \sqrt{12 - x^2}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める。

$0 \leq x \leq 3$  の範囲で、変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{12 - x^2}$  について、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{12 - x^2} = \frac{d}{dx} (12 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (12 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{12 - x^2}} = \sqrt{\frac{12}{12 - x^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}},$$

曲線  $C$  の長さは

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^3 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}} dx$$

**例**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 3$  と方程式  $y = \sqrt{12 - x^2}$  との連立で表される曲線  $C$  の長さを求める。

$0 \leq x \leq 3$  の範囲で、変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{12 - x^2}$  について、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{12 - x^2} = \frac{d}{dx} (12 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (12 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{12 - x^2}} = \sqrt{\frac{12}{12 - x^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}},$$

曲線  $C$  の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_0^3 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}} dx = \sqrt{12} \left[ \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{12}} \right]_0^3 \\ &= \sqrt{12} \left( \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1} 0 \right) = \sqrt{12} \cdot \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{12} \pi}{3}. \end{aligned}$$

**問8.4.2**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 3$  と方程式  $y = \sqrt{36 - x^2}$  とで表される曲線  $C$  の長さを求めよ.

$0 \leq x \leq 3$  の範囲で, 変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{36 - x^2}$  について,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{36 - x^2} =$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} =$$

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx =$$

曲線  $C$  の長さは      である.

**問8.4.2**  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 3$  と方程式  $y = \sqrt{36 - x^2}$  とで表される曲線  $C$  の長さを求めよ.

$0 \leq x \leq 3$  の範囲で, 変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{36 - x^2}$  について,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{36 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{36 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{36 - x^2}} = \sqrt{\frac{36}{36 - x^2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}}, \end{aligned}$$

$$\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_0^3 \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}} dx$$

曲線  $C$  の長さは      である.

問8.4.2  $xy$  座標平面において不等式  $0 \leq x \leq 3$  と方程式  $y = \sqrt{36 - x^2}$  とで表される曲線  $C$  の長さを求めよ.

$0 \leq x \leq 3$  の範囲で, 変数  $x$  の関数  $y = \sqrt{36 - x^2}$  について,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sqrt{36 - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{36 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}},$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{36 - x^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{36 - x^2}} = \sqrt{\frac{36}{36 - x^2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_0^3 \frac{6}{\sqrt{36 - x^2}} dx = 6 \left[ \sin^{-1} \frac{x}{6} \right]_0^3 \\ &= 6 \left( \sin^{-1} \frac{1}{2} - \sin^{-1} 0 \right) = 6 \cdot \frac{\pi}{6} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

曲線  $C$  の長さは  $\pi$  である.

終