8.5 変化率と積分

時刻を表す各実数 t に対してある量 $X(t)$ が定まるとする．時刻に対する変量 $X(t)$ の変化率とは，微分係数 $\dfrac{dX(t)}{dt}$ のことである．これは，時刻に対して $X(t)$ の変化する "速さ" である．微分積分の基本定理より，変化率 $\dfrac{dX(t)}{dt}$ を時刻 t_0 から 時刻 t_1 まで定積分した値が，時刻 t_0 から 時刻 t_1 までの間の $X(t)$ の変化量 $X(t_1) - X(t_0)$ である：

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dX(t)}{dt}\,dt = \Big[X(t)\Big]_{t=t_0}^{t=t_1} = X(t_1) - X(t_0)\ .$$

例えば，自動車とか電車とかの走行について，時々刻々の走行速度は走行距離の変化率である．従って，走行の速さを走行時間で定積分すると走行距離になる．

$\boxed{例}$ 自動車で **A** 地点を出発して 10 分後に **B** 地点に着いたとする．$0 \leq t \leq 10$ である各実数 t に対して，自動車で **A** 地点を出発してから t 分後の時点における速さを時速 $v(t)\,\mathrm{km}$ とおくとき，t の関数 $v(t)$ は次のように与えられるとする：$v(t) = 3t(10-t)$ （ $0 \leq t \leq 10$ ）．**A** 地点を出発してから **B** 地点に着くまでの自動車の走行距離を求める．

走行時間を分単位で考えているので，走行の速さも分単位で考える．時速 $v(t)\,\mathrm{km}$ は分速 $\dfrac{v(t)}{60}\,\mathrm{km}$ なので，発車してから 10 分間の走行距離は走行時間 t について 0 から 10 まで分速 $\dfrac{v(t)}{60}\,\mathrm{km}$ を定積分すればよい．

$$\begin{aligned}
\int_0^{10} \frac{v(t)}{60}\,dt &= \int_0^{10} \frac{t(10-t)}{20}\,dt = \frac{1}{20}\int_0^{10} (10t - t^2)\,dt \\
&= \frac{1}{20}\left[5t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^{10} = 25 - \frac{50}{3} \\
&= \frac{25}{3}\ .
\end{aligned}$$

A 地点を出発してから **B** 地点に着くまでの自動車の走行距離は $\dfrac{25}{3}\,\mathrm{km}$ である.

終

$\boxed{問 8.5.1}$ 自転車で **A** 地点を出発して 9 分後に **B** 地点に着いたとする．$0 \leq t \leq 9$ である各実数 t に対して，自転車で **A** 地点を出発してから t 分後の時点における速さを時速 $v(t)\,\mathrm{km}$ とおくとき，t の関数 $v(t)$ は次のように与えられるとする：$v(t) = 5\sqrt{t}(9-t)$ （ $0 \leq t \leq 9$ ）．**A** 地点を出発してから **B** 地点に着くまでの自転車の走行距離を求めよ．

$$
\begin{aligned}
\int_0^9 \frac{v(t)}{60}\,dt &= \int_0^9 \frac{\sqrt{t}(9-t)}{12}\,dt = \int_0^9 \frac{1}{12}\left(9t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}\right)dt \\
&= \left[\frac{1}{2}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{30}t^{\frac{5}{2}}\right]_0^9 = \frac{27}{2} - \frac{81}{10} \\
&= \frac{27}{5}\ .
\end{aligned}
$$

A 地点を出発してから **B** 地点に着くまでの走行距離は $\dfrac{27}{5}\,\mathrm{km}$ である． $\boxed{終}$

例えば，容器に水を注入するとき，注水の速さは時刻に対する注水量の変化率です．従って，注水の速さを時刻で定積分すると注入した水の総量になります．

例 最初は空であったタンクにポンプで水を注入していく．$0 \leq t \leq 10$ である各実数に対して，注水し始めてから t 分後の時点においてこのポンプが注水する速さは毎分 $\left(6-\dfrac{6}{e^{3t}}\right)$L であるとする．このポンプで注水を始めてから 10 分間で注入した水の総量を求める．

注水の速さを注水時間で積分すれば注水時間で注入した水の総量になる．

$$\int_0^{10}\left(6-\frac{6}{e^{3t}}\right)dt=\int_0^{10}(6-6e^{-3t})\,dt=\left[6t+2e^{-3t}\right]_0^{10}=60+2e^{-30}-2$$
$$=58+\frac{2}{e^{30}}\ .$$

注入始めてから 10 分間で注入した水の総量は $\left(58+\dfrac{2}{e^{30}}\right)$L である． 終

$\boxed{\text{問}8.5.2}$ 水が溜ったタンクからポンプで水を吸い出していく． $0 \leq t \leq 20$ である各実数に対して，注水し始めてから t 分後の時点においてこのポンプが水を吸い出す速さは毎分 $\left(3 - \dfrac{6}{t+2}\right)\mathrm{L}$ であるとする．このポンプで水を吸い出し始めてから 20 分間で吸い出した水の総量を求めよ．

$$\int_0^{20}\left(3-\frac{6}{t+2}\right)dt = \Big[3t - 6\ln(t+2)\Big]_0^{20} = 60 - 6\ln 22 + 6\ln 2 = 60 - 6\ln\frac{22}{2}$$
$$= 60 - 6\ln 11 \ .$$

このポンプで水を吸い出し始めてから 20 分間で吸い出した水の総量は $(60 - 6\ln 11)\mathrm{L}$ である．

電力は，時刻に対して電気エネルギー（電力量）が変化する速さ，つまり時刻に対する電気エネルギーの変化率である．従って，電力を時刻で定積分したものが電気エネルギー（電力量）の変化量になる．

$\boxed{\text{例}}$ ある電気暖房機は，ある環境で，0 以上の各実数 t に対して，始動してから t 分間運転させた時点において消費する電力を $P(t)\,\mathrm{W}$ とおくと，$P(t)=\dfrac{3000t}{e^t}$ であるとする．この環境でこの電気暖房機を始動させてから 30 分間運転させたとき，その間に消費した電力量（単位 Wh ）を求める．

暖房機の運転時間を分単位で考えているので，電力量も分単位で考える．$P(t)\,\mathrm{W}$ の電力を 1 分間つまり $\dfrac{1}{60}$ 時間消費すると，その間の消費電力量は $\dfrac{P(t)}{60}\,\mathrm{Wh}$ である．つまり，この電気暖房機は，始動してから t 分間運転させた時点において毎分 $\dfrac{P(t)}{60}\,\mathrm{Wh}$ の電力を消費する．積分定数を C とおくと，

$$\int\frac{P(t)}{60}\,dt=\int\frac{3000t}{60e^t}\,dt=50\int te^{-t}dt=50\Big\{t(-e^{-t})-\int(-e^{-t})\,dt\Big\}$$

$$=50(-te^{-t}-e^{-t})+C=-50\frac{t+1}{e^t}+C\ .$$

よって,

$$\int_0^{30} \frac{P(t)}{60}\,dt = -50\left[\frac{t+1}{e^t}\right]_0^{30} = -50\left(\frac{31}{e^{30}}-1\right) = 50\left(1-\frac{31}{e^{30}}\right) .$$

始動させてから 30 分間運転させた間に消費した電力量は $50\left(1-\frac{31}{e^{30}}\right)\mathrm{Wh}$ である.

終

$\boxed{問8.5.3}$ ある日，ある家では，$0 \le t < 24$ である各実数 t に対して，時刻 t 時における消費電力 $P(t)\,\mathrm{W}$ が次のようになったとします：

$$P(t) = \begin{cases} 0 & (\ 0 \le t < 6 \ \text{のとき}) \\ 36t - t^2 & (\ 6 \le t < 24 \ \text{のとき}) \end{cases} .$$

この日この家で消費された電力量（単位 Wh ）を求めなさい.

$$\int_0^{24} P(t)\,dt = \int_6^{24} (36t - t^2)\,dt = \left[18t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_6^{24} = 24^2(18-8) - 36(18-2)$$
$$= 5184\ .$$

この日この家で消費された電力量は $5184\mathrm{Wh}$ である. $\boxed{終}$

時刻に対するある変量の変化率つまり微分係数とはその変量の値の変化が進む速さです．変化が進む速さを時刻で定積分したものがその間に蓄積された変化量です．