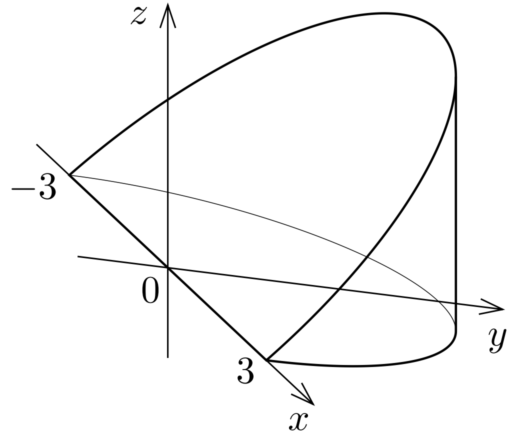
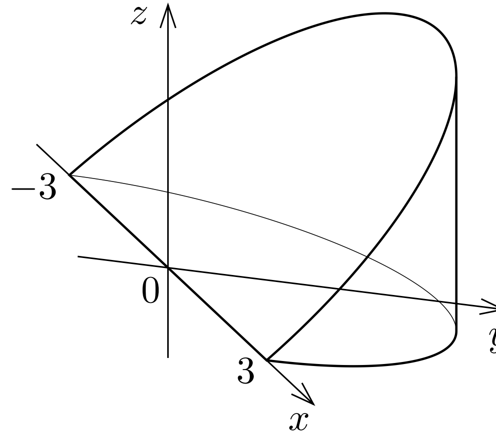
8. 補遺 2　座標空間における立体領域の体積

$\boxed{例}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

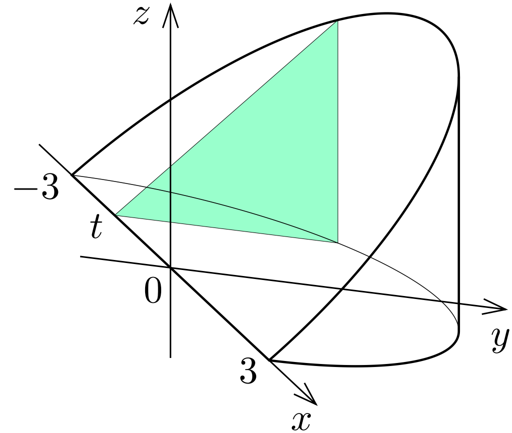


$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

立体領域 V の各点 $(x\,,y\,,z)$ について, $x^2+y^2 \leq 9$ なので, $x^2 \leq 9-y^2 \leq 9$, よって $-3 \leq x \leq 3$.

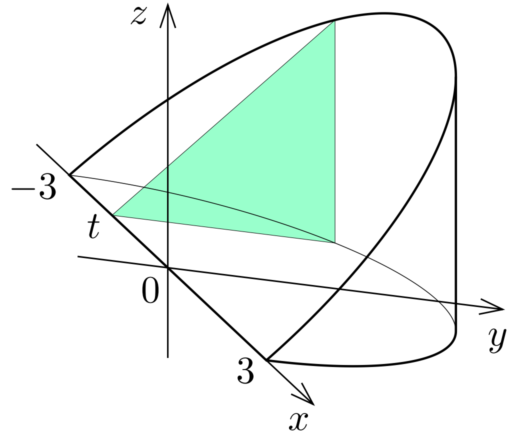


$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.



立体領域 V の各点 (x, y, z) について, $x^2+y^2 \leq 9$ なので, $x^2 \leq 9-y^2 \leq 9$, よって $-3 \leq x \leq 3$. 区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して x 軸に垂直な平面 $x=t$ と V との共通部分を考える.

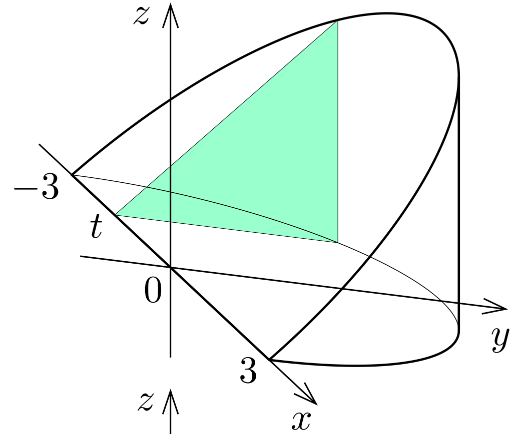
例 xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

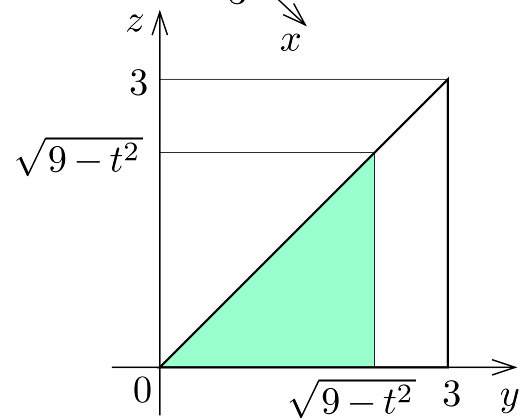


立体領域 V の各点 (x, y, z) について, $x^2+y^2 \leq 9$ なので, $x^2 \leq 9-y^2 \leq 9$, よって $-3 \leq x \leq 3$. 区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して x 軸に垂直な平面 $x=t$ と V との共通部分を考える. 不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と方程式 $x=t$ とより, $t^2+y^2 \leq 9$, $y^2 \leq 9-t^2$, $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq \sqrt{9-t^2}$.

$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と $0 \leq z \leq y$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

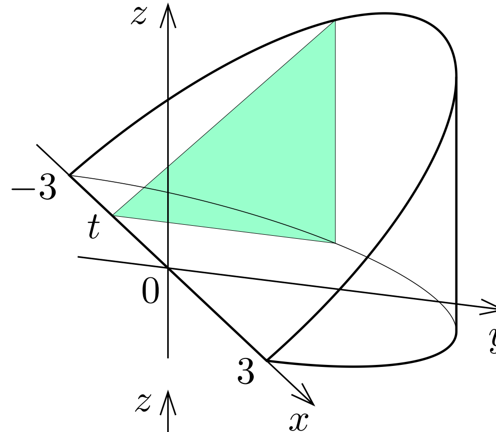
立体領域 V の各点 (x,y,z) について, $x^2+y^2 \leq 9$ なので, $x^2 \leq 9-y^2 \leq 9$ ，よって $-3 \leq x \leq 3$ ．区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して x 軸に垂直な平面 $x=t$ と V との共通部分を考える. 不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と方程式 $x=t$ とより, $t^2+y^2 \leq 9$ ， $y^2 \leq 9-t^2$ ， $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq \sqrt{9-t^2}$ ．この不等式と不等式 $0 \leq z \leq y$ との連立は, yz 座標平面において, 2 辺の長さが $\sqrt{9-t^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す.

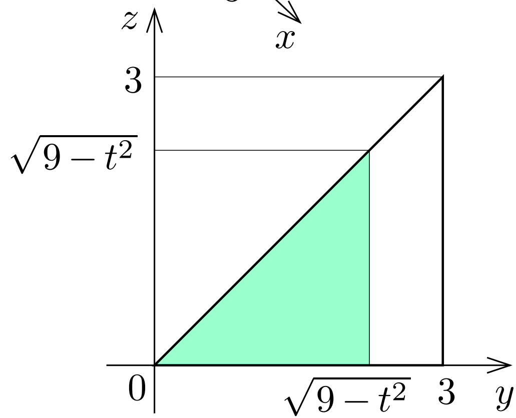




区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}\sqrt{9-t^2}\sqrt{9-t^2} = \frac{9-t^2}{2}.$$



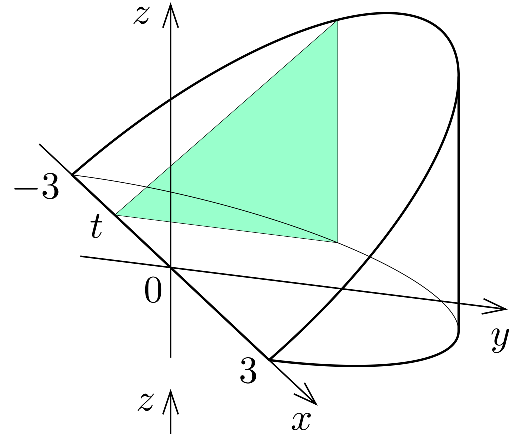


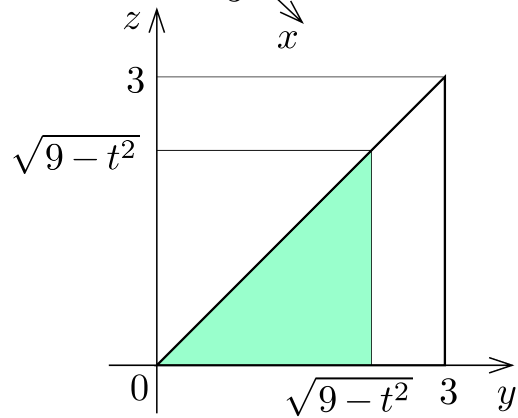
区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}\sqrt{9-t^2}\sqrt{9-t^2} = \frac{9-t^2}{2} \ .$$

立体領域 V の体積は，

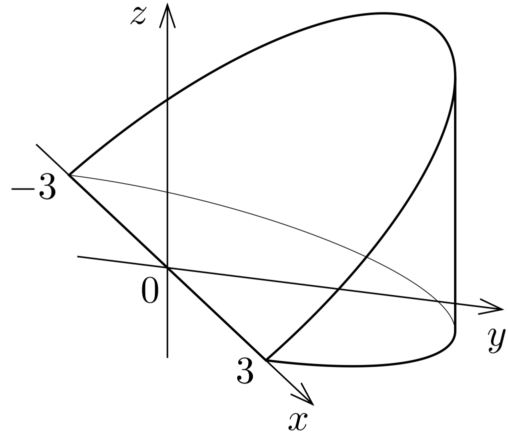
$$\int_{-3}^{3} S(t)\,dt = \int_{-3}^{3}\frac{9-t^2}{2}\,dt = \left[\frac{9}{2}t-\frac{1}{6}t^3\right]_{-3}^{3}$$
$$= 18 \ .$$



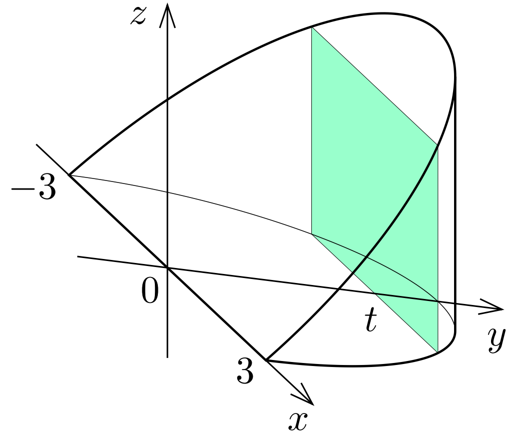


y 軸に垂直な平面と立体領域 V との共通部分を考えてもよい.

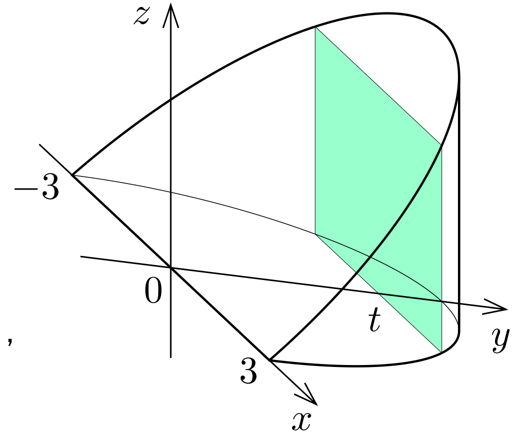
立体領域 V の各点 (x, y, z) について，$x^2+y^2 \leq 9$ なので，$y^2 \leq 9-x^2 \leq 9$ ，$-3 \leq y \leq 3$ ，$y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$.



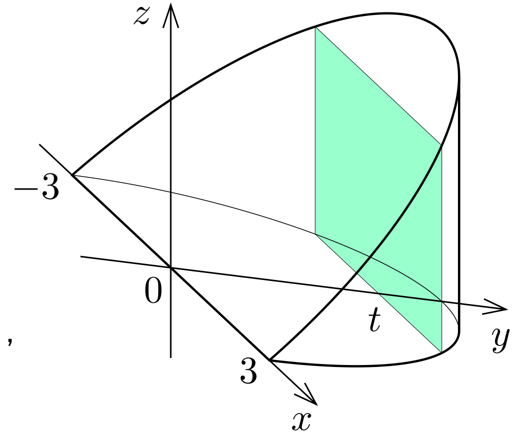
立体領域 V の各点 (x, y, z) について，$x^2+y^2 \leq 9$ なので，$y^2 \leq 9-x^2 \leq 9$，$-3 \leq y \leq 3$，$y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して y 軸に垂直な平面 $y=t$ と V との共通部分を考える.



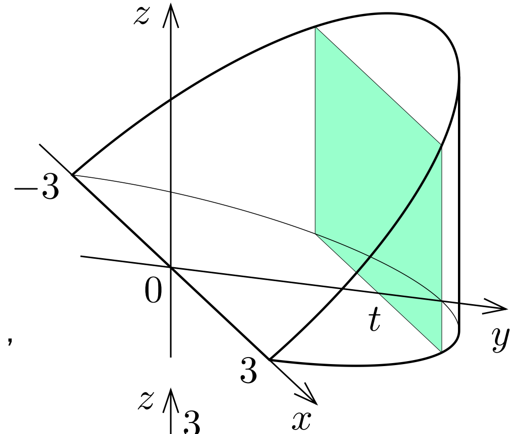
立体領域 V の各点 (x,y,z) について，$x^2+y^2 \leq 9$ なので，$y^2 \leq 9-x^2 \leq 9$ ，$-3 \leq y \leq 3$ ，$y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ ．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して y 軸に垂直な平面 $y=t$ と V との共通部分を考える．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と方程式 $y=t$ とより，$x^2+t^2 \leq 9$ ，$x^2 \leq 9-t^2$ ，$-\sqrt{9-t^2} \leq x \leq \sqrt{9-t^2}$ ．

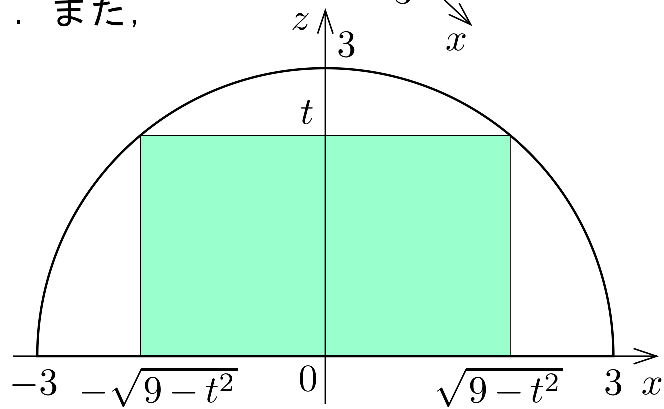


立体領域 V の各点 (x,y,z) について，$x^2+y^2 \leq 9$ なので，$y^2 \leq 9-x^2 \leq 9$ ，$-3 \leq y \leq 3$ ，$y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ ．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して y 軸に垂直な平面 $y=t$ と V との共通部分を考える．不等式 $x^2+y^2 \leq 9$ と方程式 $y=t$ とより，$x^2+t^2 \leq 9$ ，$x^2 \leq 9-t^2$ ，$-\sqrt{9-t^2} \leq x \leq \sqrt{9-t^2}$ ．また，不等式 $0 \leq z \leq y$ と方程式 $y=t$ とより $0 \leq z \leq t$ ．



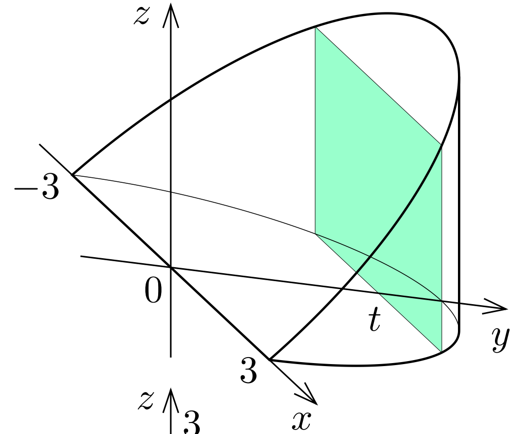
立体領域 V の各点 (x,y,z) について，$x^2+y^2\leq 9$ なので，$y^2\leq 9-x^2\leq 9$ ，$-3\leq y\leq 3$ ，$y\geq 0$ なので $0\leq y\leq 3$ ．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して y 軸に垂直な平面 $y=t$ と V との共通部分を考える．不等式 $x^2+y^2\leq 9$ と方程式 $y=t$ とより，$x^2+t^2\leq 9$ ，$x^2\leq 9-t^2$ ，$-\sqrt{9-t^2}\leq x\leq\sqrt{9-t^2}$ ．また，不等式 $0\leq z\leq y$ と方程式 $y=t$ とより $0\leq z\leq t$ ．これらの不等式の連立は，yz 座標平面において，x 軸方向の辺の長さが $2\sqrt{9-t^2}$ で z 軸方向の辺の長さが t である長方形で囲まれる領域を表す．

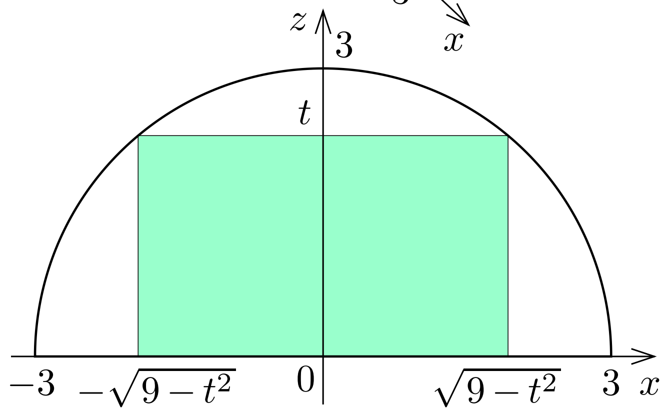




区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $y=t$ と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = 2\sqrt{9-t^2}\,t = 2t\sqrt{9-t^2} .$$



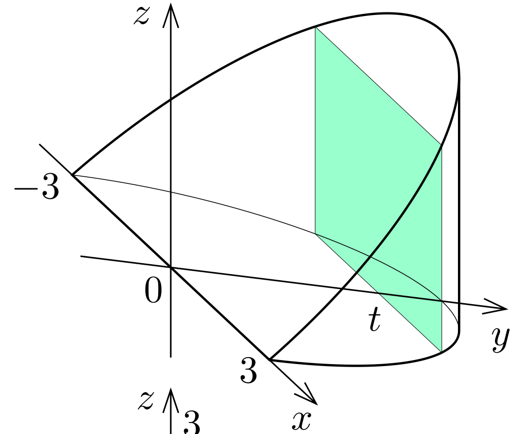


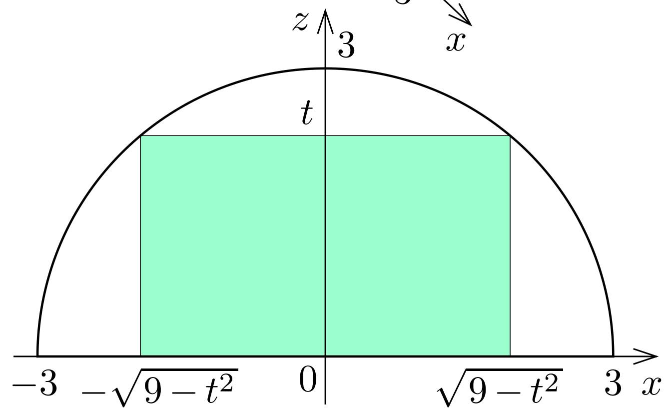
区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $y=t$ と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = 2\sqrt{9-t^2}\,t = 2t\sqrt{9-t^2}\ .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t)\,dt = \int_0^3 2t\sqrt{9-t^2}\,dt\ .$$





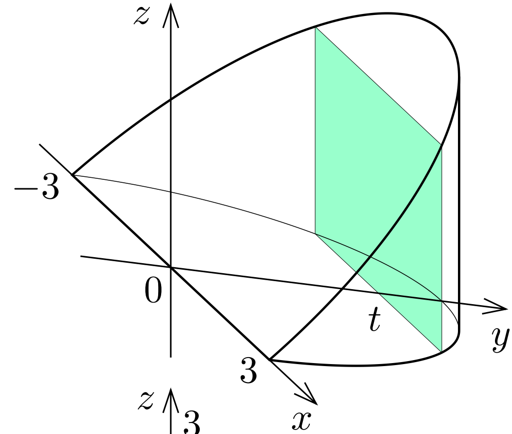
区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $y=t$ と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

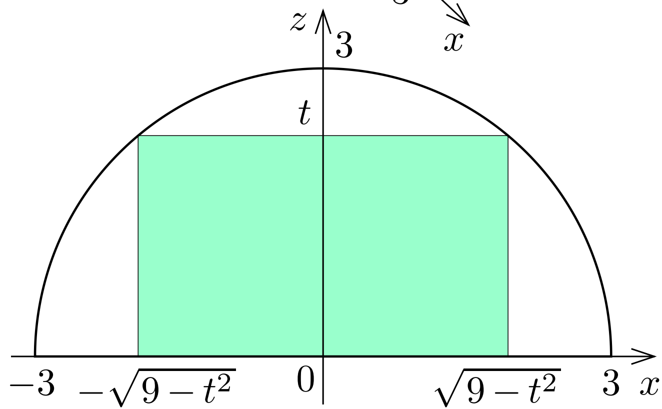
$$S(t) = 2\sqrt{9-t^2}\,t = 2t\sqrt{9-t^2}\ .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t)\,dt = \int_0^3 2t\sqrt{9-t^2}\,dt\ .$$

$u=9-t^2$ とおく. $\dfrac{du}{dt}=-2t$ なので $2t\,dt=-du$. $t=0$ のとき $u=9$, $t=3$ のとき $u=0$.





区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $y=t$ と V との共通部分の面積 $S(t)$ は

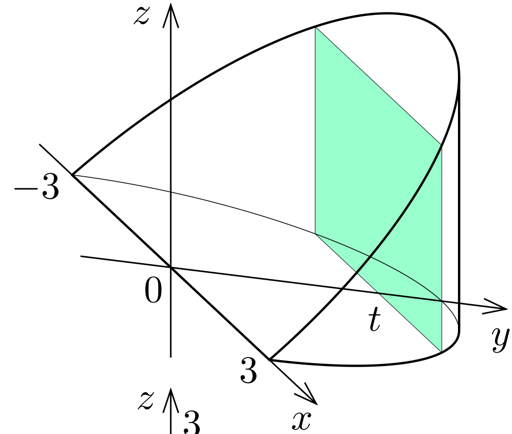
$$S(t) = 2\sqrt{9-t^2}\,t = 2t\sqrt{9-t^2}\ .$$

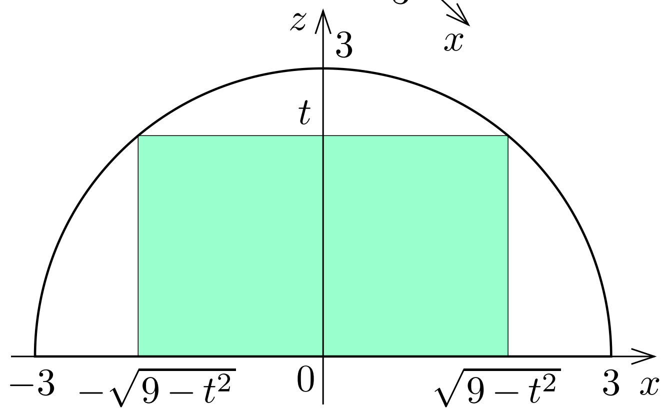
立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t)\,dt = \int_0^3 2t\sqrt{9-t^2}\,dt\ .$$

$u=9-t^2$ とおく. $\dfrac{du}{dt}=-2t$ なので $2t\,dt=-du$. $t=0$ のとき $u=9$, $t=3$ のとき $u=0$.

$$\begin{aligned}\int_0^3 2t\sqrt{9-t^2}\,dt &= \int_9^0 u^{\frac{1}{2}}(-du)\\ &= -\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_9^0\\ &= 18\ .\end{aligned}$$





故に立体領域 V の体積は 18 である.

終

$\boxed{\text{問8.補遺2.1}}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0 \leq z \leq x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めよ．

V の各点 (x,y,z) について，$x^2+y^2 \leq 3$ なので，$x^2 \leq 3-y^2 \leq \quad$ ，$\quad \leq x \leq \quad$ ．区間 $[\quad , \quad]$ の各実数 t に対して平面 $y=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ と方程式 $y=t$ とより，$x^2+t^2 \leq 3$ ，$x^2 \leq \quad$ ，$x \geq 0$ なので $0 \leq x \leq \quad$ ．更に不等式 $0 \leq z \leq x$ より $0 \leq z \leq x \leq \quad$ ；この不等式は，xz 座標平面において 2 辺の長さが　　　　である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = $$

立体領域 V の体積は，

$$\int \quad S(t)\,dt = $$

$\boxed{\text{問8.補遺2.1}}$ xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0 \leq z \leq x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めよ.

V の各点 (x,y,z) について, $x^2+y^2 \leq 3$ なので, $x^2 \leq 3-y^2 \leq 3$, $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$. 区間 $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ の各実数 t に対して平面 $y=t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $x^2+y^2 \leq 3$ と方程式 $y=t$ とより, $x^2+t^2 \leq 3$, $x^2 \leq 3-t^2$, $x \geq 0$ なので $0 \leq x \leq \sqrt{3-t^2}$. 更に不等式 $0 \leq z \leq x$ より $0 \leq z \leq x \leq \sqrt{3-t^2}$; この不等式は, xz 座標平面において 2 辺の長さが $\sqrt{3-t^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}\sqrt{3-t^2}\sqrt{3-t^2} = \frac{3-t^2}{2} \ .$$

立体領域 V の体積は,

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S(t)\,dt = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{3-t^2}{2}\,dt = \left[\frac{3}{2}t-\frac{1}{6}t^3\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において，不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

$\boxed{例}$ xyz 座標空間において，不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

　V の各点 (x, y, z) について， $x \geq 0$ かつ $x+y^2+z^2 \leq 5$ なので，

$0 \leq x \leq 5-y^2-z^2 \leq 5$.

$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において，不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

V の各点 (x,y,z) について， $x \geq 0$ かつ $x+y^2+z^2 \leq 5$ なので，$0 \leq x \leq 5-y^2-z^2 \leq 5$ ．区間 $[0,5]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える.

例 xyz 座標空間において，不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．

　V の各点 (x,y,z) について，$x \geq 0$ かつ $x+y^2+z^2 \leq 5$ なので，

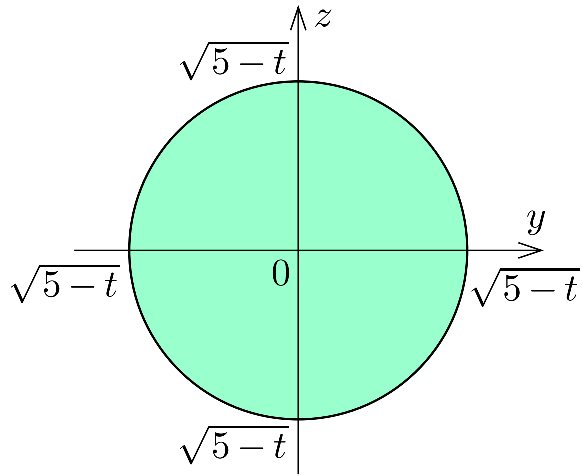
$0 \leq x \leq 5-y^2-z^2 \leq 5$ ．区間 $[0,5]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式

$x+y^2+z^2 \leq 5$ と方程式 $x=t$ とより，

$t+y^2+z^2 \leq 5$ ，$y^2+z^2 \leq 5-t$ ．

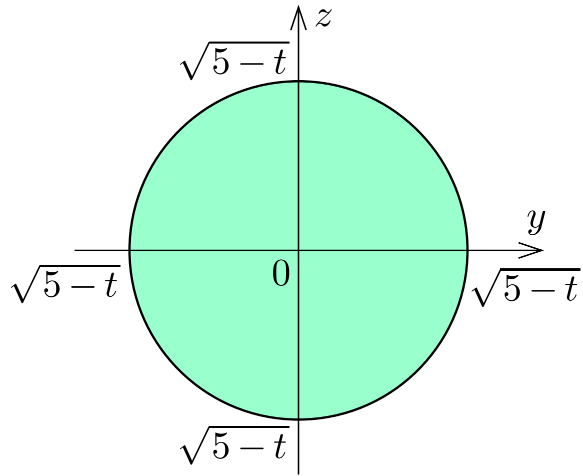
$\boxed{例}$ xyz 座標空間において，不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．

V の各点 (x,y,z) について，$x \geq 0$ かつ $x+y^2+z^2 \leq 5$ なので，$0 \leq x \leq 5-y^2-z^2 \leq 5$ ．区間 $[0,5]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $x+y^2+z^2 \leq 5$ と方程式 $x=t$ とより，$t+y^2+z^2 \leq 5$ ， $y^2+z^2 \leq 5-t$ ．この不等式は，yz 座標平面において半径が $\sqrt{5-t}$ である円で囲まれる領域を表す．



$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において，不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．

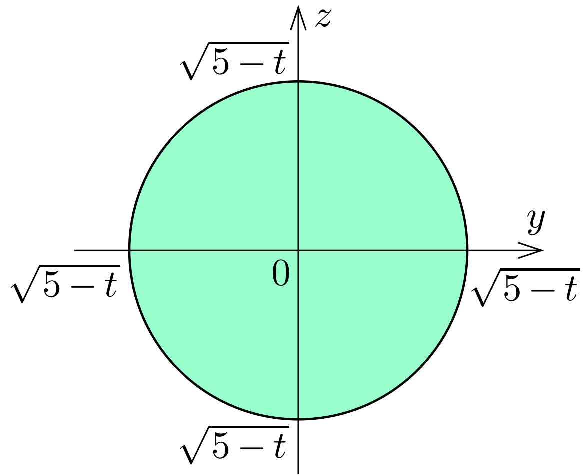
V の各点 (x,y,z) について，$x \geq 0$ かつ $x+y^2+z^2 \leq 5$ なので，$0 \leq x \leq 5-y^2-z^2 \leq 5$ ．区間 $[0,5]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $x+y^2+z^2 \leq 5$ と方程式 $x=t$ とより，$t+y^2+z^2 \leq 5$ ， $y^2+z^2 \leq 5-t$ ．この不等式は，yz 座標平面において半径が $\sqrt{5-t}$ である円で囲まれる領域を表す．その面積 $S(t)$ は



$$S(t) = \pi\sqrt{5-t}^2 = \pi(5-t) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において，不等式 $x \geq 0$ と $x+y^2+z^2 \leq 5$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．

V の各点 (x,y,z) について，$x \geq 0$ かつ $x+y^2+z^2 \leq 5$ なので，$0 \leq x \leq 5-y^2-z^2 \leq 5$ ．区間 $[0,5]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $x+y^2+z^2 \leq 5$ と方程式 $x=t$ とより，$t+y^2+z^2 \leq 5$ ，$y^2+z^2 \leq 5-t$ ．この不等式は，yz 座標平面において半径が $\sqrt{5-t}$ である円で囲まれる領域を表す．その面積 $S(t)$ は



$$S(t) = \pi\sqrt{5-t}^{\,2} = \pi(5-t) \ .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^5 S(t)\,dt = \int_0^5 \pi(5-t)\,dt = \pi\left[5t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^5 = \pi\left(25-\frac{25}{2}\right) = \frac{25\pi}{2} \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問}8.\text{補遺}2.2}$ xyz 座標空間において不等式 $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めよ.

V の各点 (x, y, z) について, $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2 \leq 6$. 区間 $[\quad, \quad]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y \leq 6 - x^2 - z^2$ と方程式 $y = t$ とより, $t \leq 6 - x^2 - z^2$, $x^2 + z^2 \leq \qquad$; この不等式は, xz 座標平面において半径が $\qquad$ である円で囲まれる領域を表す ; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) =$$

立体領域 V の体積は

$$\int S(x)\, dx =$$

$\boxed{\text{問}8.\text{補遺}2.2}$ xyz 座標空間において不等式 $0 \leq y \leq 6-x^2-z^2$ で表される立体領域 V の体積を求めよ.

V の各点 (x,y,z) について, $0 \leq y \leq 6-x^2-z^2 \leq 6$. 区間 $[0,6]$ の各実数 t に対して平面 $y=t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y \leq 6-x^2-z^2$ と方程式 $y=t$ とより, $t \leq 6-x^2-z^2$, $x^2+z^2 \leq 6-t$; この不等式は, xz 座標平面において半径が $\sqrt{6-t}$ である円で囲まれる領域を表す ; その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi\sqrt{6-t}^{\,2} = \pi(6-t) \ .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^6 S(x)\,dx = \int_0^6 \pi(6-t)\,dt = \pi\left[6t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^6 = \pi\left(36-\frac{36}{2}\right) = 18\pi \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{例}$ xyz 座標空間において，不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y + z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．

例 xyz 座標空間において，不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y + z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

V の各点 (x, y, z) について $0 \leq x \leq 3$.

例 xyz 座標空間において，不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y+z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

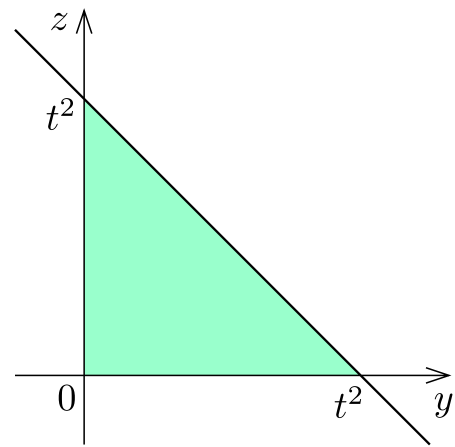
V の各点 (x,y,z) について $0 \leq x \leq 3$. 区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える.

例 xyz 座標空間において，不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y+z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

V の各点 (x, y, z) について $0 \leq x \leq 3$. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y+z \leq x^2$ と方程式 $x = t$ とより, $y+z \leq t^2$.

$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において，不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y+z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．

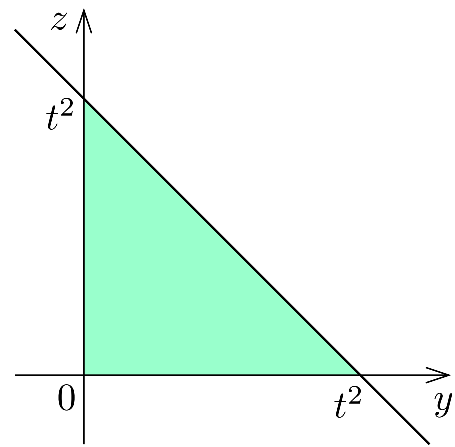
V の各点 (x,y,z) について $0 \leq x \leq 3$．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $y+z \leq x^2$ と方程式 $x=t$ とより，$y+z \leq t^2$．yz 座標平面において，不等式 $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y+z \leq t^2$ との連立で表される図形は，2 辺の長さが t^2 である直角二等辺三角形で囲まれる領域である．



$\boxed{\text{例}}$ xyz 座標空間において，不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y + z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める.

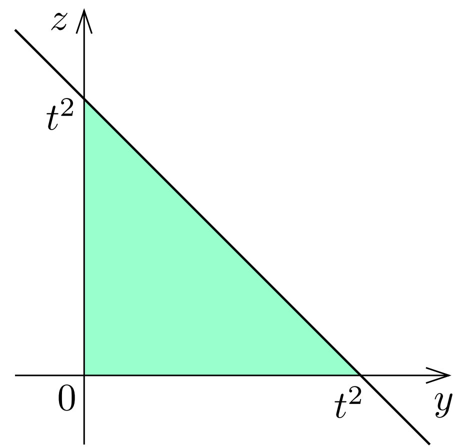
V の各点 (x, y, z) について $0 \leq x \leq 3$. 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える. 不等式 $y + z \leq x^2$ と方程式 $x = t$ とより, $y + z \leq t^2$. yz 座標平面において，不等式 $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y + z \leq t^2$ との連立で表される図形は，2 辺の長さが t^2 である直角二等辺三角形で囲まれる領域である. その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot t^2 = \frac{t^4}{2} \ .$$



$\boxed{例}$ xyz 座標空間において，不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y+z \leq x^2$ との連立で表される立体領域 V の体積を求める．

V の各点 (x,y,z) について $0 \leq x \leq 3$ ．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $y+z \leq x^2$ と方程式 $x=t$ とより，$y+z \leq t^2$ ．yz 座標平面において，不等式 $y \geq 0$ と $z \geq 0$ と $y+z \leq t^2$ との連立で表される図形は，2 辺の長さが t^2 である直角二等辺三角形で囲まれる領域である．その面積 $S(t)$ は



$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot t^2 = \frac{t^4}{2} \ .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t)\,dt = \int_0^3 \frac{t^4}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}t^5\right]_0^3 = \frac{243}{10} \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問8.補遺2.3}$ xyz 座標空間において，不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $0 \leq z \leq 3$ と $x + y \leq e^z$ との連立で表される立体領域 V の体積を求めよ． e は自然対数の底である．

V の各点 (x, y, z) について $0 \leq z \leq 3$ ． 区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $z = t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $x + y \leq e^z$ と方程式 $z = t$ とより， $x + y \leq e^t$ ． xy 座標平面において，不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x + y \leq e^t$ との連立で表される図形は，2 辺の長さが　　である直角二等辺三角形で囲まれる領域である．その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}(\quad)^2 = \frac{\quad}{2} \ .$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t)\,dt =$$

$\boxed{\text{問8.補遺2.3}}$ xyz 座標空間において，不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $0 \leq z \leq 3$ と $x+y \leq e^z$ との連立で表される立体領域 V の体積を求めよ． e は自然対数の底である．

V の各点 (x,y,z) について $0 \leq z \leq 3$ ．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面 $z=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式 $x+y \leq e^z$ と方程式 $z=t$ とより， $x+y \leq e^t$ ． xy 座標平面において，不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x+y \leq e^t$ との連立で表される図形は，2 辺の長さが e^t である直角二等辺三角形で囲まれる領域である．その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2}(e^t)^2 = \frac{e^{2t}}{2} \ .$$

立体領域 V の体積は

$$\textstyle\int_0^3 S(t)\,dt = \displaystyle\int_0^3 \frac{e^{2t}}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^3 = \frac{e^6-1}{4} \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$