1.1 数列の定義

数列とは，定義域が自然数の集合である関数のことである；但し，数列の定義域はひと続きの自然数の集合でなければならない．

数列とは，定義域が自然数の集合である関数のことである；但し，数列の定義域はひと続きの自然数の集合でなければならない．例えば，集合 $\{1,2,3,5,6,7\}$ のように途中で抜けた自然数がある集合は数列の定義域にならない．

数列とは，定義域が自然数の集合である関数のことである；但し，数列の定義域はひと続きの自然数の集合でなければならない．例えば，集合 $\{1,2,3,5,6,7\}$ のように途中で抜けた自然数がある集合は数列の定義域にならない．

関数の定義域の要素を表す変数を独立変数という．数列では，定義域の要素は自然数なので，独立変数は自然数を表す．

数列とは，定義域が自然数の集合である関数のことである；但し，数列の定義域はひと続きの自然数の集合でなければならない．例えば，集合 $\{1,2,3,5,6,7\}$ のように途中で抜けた自然数がある集合は数列の定義域にならない．

関数の定義域の要素を表す変数を独立変数という．数列では，定義域の要素は自然数なので，独立変数は自然数を表す．それで，通常，数列の独立変数には i,j,k,l,m,n などの文字を使う．

数列について，関数の値を特に項という．関数 f が数列であるとき，自然数 n における関数 f の値 $f(n)$ を第 n 項という．

数列について，関数の値を特に項という．関数 f が数列であるとき，自然数 n における関数 f の値 $f(n)$ を第 n 項という．第 1 項から始まる数列の第 1 項を特に初項という．自然数を表す独立変数 n に対する第 n 項を一般項という．

数列について，関数の値を特に項という．関数 f が数列であるとき，自然数 n における関数 f の値 $f(n)$ を第 n 項という．第 1 項から始まる数列の第 1 項を特に初項という．自然数を表す独立変数 n に対する第 n 項を一般項という．

数列 a について，自然数 n における値つまり第 n 項 $a(n)$ をしばしば a_n と書き表す；そして，数列 a そのものを $\{a_n\}$ と書き表す．

数列について，関数の値を特に項という．関数 f が数列であるとき，自然数 n における関数 f の値 $f(n)$ を第 n 項という．第 1 項から始まる数列の第 1 項を特に初項という．自然数を表す独立変数 n に対する第 n 項を一般項という．

数列 a について，自然数 n における値つまり第 n 項 $a(n)$ をしばしば a_n と書き表す；そして，数列 a そのものを $\{a_n\}$ と書き表す．つまり，自然数を表す変数 n に対して，

数列 $\{a_n\}$ は n を独立変数とする関数である．

数列について，関数の値を特に項という．関数 f が数列であるとき，自然数 n における関数 f の値 $f(n)$ を第 n 項という．第 1 項から始まる数列の第 1 項を特に初項という．自然数を表す独立変数 n に対する第 n 項を一般項という．

数列 a について，自然数 n における値つまり第 n 項 $a(n)$ をしばしば a_n と書き表す；そして，数列 a そのものを $\{a_n\}$ と書き表す．つまり，自然数を表す変数 n に対して，

数列 $\{a_n\}$ は n を独立変数とする関数である．

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{n^2\}$ は，自然数 n における値が $f(n) = n^2$ である関数 f であり，第 1 項は $f(1) = 1^2 = 1$ であり，第 7 項は $f(7) = 7^2 = 49$ であり，第 30 項は $f(30) = 30^2 = 900$ である． $\boxed{\text{終}}$

多くの場合，数列の定義域は，自然数全体 $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ かあるいは正の自然数全体 $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ かのどちらかである．

多くの場合，数列の定義域は，自然数全体 $\{0,1,2,3,4,\dots\}$ かあるいは正の自然数全体 $\{1,2,3,4,\dots\}$ かのどちらかである．例えば数列 $\{a_n\}$ の定義域が自然数全体 $\{0,1,2,3,\dots\}$ であることを明示するために $\{a_n\}_{n\geq 0}$ と書き表す.

多くの場合，数列の定義域は，自然数全体 $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ かあるいは正の自然数全体 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ かのどちらかである．例えば数列 $\{a_n\}$ の定義域が自然数全体 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ であることを明示するために $\{a_n\}_{n \geq 0}$ と書き表す．また，例えば数列 $\{b_n\}$ の定義域が正の自然数全体 $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ であることを明示するために $\{b_n\}_{n \geq 1}$ と書き表す．

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数の全体を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を $a_n = 3n^2 - 7n$ と定める. m は自然数とする. この数列の第 4 項 a_4 及び第 $(m+2)$ 項 a_{m+2} を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 正の自然数の全体を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を $a_n = 3n^2 - 7n$ と定める. m は自然数とする. この数列の第 4 項 a_4 及び第 $(m+2)$ 項 a_{m+2} を計算する.

等式 $a_n = 3n^2 - 7n$ において n に 4 を代入して

$$a_4 = 3 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 = 4(12-7) = 20 \ .$$

例 正の自然数の全体を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を $a_n = 3n^2 - 7n$ と定める． m は自然数とする．この数列の第 4 項 a_4 及び第 $(m+2)$ 項 a_{m+2} を計算する．

　等式 $a_n = 3n^2 - 7n$ において n に 4 を代入して

$$a_4 = 3 \cdot 4^2 - 7 \cdot 4 = 4(12 - 7) = 20 \ .$$

等式 $a_n = 3n^2 - 7n$ において n に $m+2$ を代入して

$$\begin{aligned} a_{m+2} &= 3(m+2)^2 - 7(m+2) = (m+2)\{3(m+2) - 7\} \\ &= (m+2)(3m-1) \ . \end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}1.1.1}$ 自然数全体を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を $a_n = n^3 - 5n^2$ と定める．自然数 k について $k \geq 2$ とする．この数列の第 4 項 a_4 及び第 $(k-2)$ 項 a_{k-2} を計算せよ．

　等式 $a_n = n^3 - 5n^2$ において n に　　を代入して

$$a_4 =$$

等式 $a_n = n^3 - 5n^2$ において n に　　　　を代入して

$$a_{k-2} =$$

$\boxed{\text{問}1.1.1}$ 自然数全体を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を $a_n = n^3 - 5n^2$ と定める．自然数 k について $k \geq 2$ とする．この数列の第 4 項 a_4 及び第 $(k-2)$ 項 a_{k-2} を計算せよ．

等式 $a_n = n^3 - 5n^2$ において n に 4 を代入して

$$a_4 = 4^3 - 5 \cdot 4^2 = 4^2(4-5) = -16 \ .$$

等式 $a_n = n^3 - 5n^2$ において n に を代入して

$$a_{k-2} =$$

$\boxed{\text{問}1.1.1}$ 自然数全体を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を $a_n = n^3 - 5n^2$ と定める．自然数 k について $k \geq 2$ とする．この数列の第 4 項 a_4 及び第 $(k-2)$ 項 a_{k-2} を計算せよ．

等式 $a_n = n^3 - 5n^2$ において n に 4 を代入して

$$a_4 = 4^3 - 5 \cdot 4^2 = 4^2(4-5) = -16 \ .$$

等式 $a_n = n^3 - 5n^2$ において n に $k-2$ を代入して

$$\begin{aligned} a_{k-2} &= (k-2)^3 - 5(k-2)^2 = (k-2)^2(k-2-5) \\ &= (k-2)^2(k-7) \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

数列 $\{a_n\}$ について，第 $(n-1)$ 項 a_{n-1} の値や第 $(n-2)$ 項 a_{n-2} の値などから第 n 項 a_n の値を定める等式を漸化式という．

例 自然数全体 $\{0,1,2,3,\dots\}$ を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について,

$$1 \text{ 以上の各自然数 } n \text{ に対して} \quad a_n = 3a_{n-1} - 5$$

とする；このときの等式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ が漸化式である.

$\boxed{\text{例}}$ 自然数全体 $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について,

$$1 \text{ 以上の各自然数 } n \text{ に対して} \quad a_n = 3a_{n-1} - 5$$

とする；このときの等式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ が漸化式である．更に $a_0 = 4$ とする．このとき,

$\boxed{例}$ 自然数全体 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について,

$$1 \text{ 以上の各自然数 } n \text{ に対して} \quad a_n = 3a_{n-1} - 5$$

とする ; このときの等式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ が漸化式である. 更に $a_0 = 4$ とする. このとき,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 1 にすると $a_1 = 3a_0 - 5 = 3 \cdot 4 - 5 = 7$,

例 自然数全体 $\{0,1,2,3,\ldots\}$ を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について,

$$1\text{ 以上の各自然数 } n \text{ に対して} \quad a_n = 3a_{n-1} - 5$$

とする；このときの等式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ が漸化式である．更に $a_0 = 4$ とする．このとき,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 1 にすると $a_1 = 3a_0 - 5 = 3\cdot 4 - 5 = 7$,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 2 にすると $a_2 = 3a_1 - 5 = 3\cdot 7 - 5 = 16$,

$\boxed{\text{例}}$ 自然数全体 $\{0,1,2,3,\dots\}$ を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について,

$$1 \text{ 以上の各自然数 } n \text{ に対して} \quad a_n = 3a_{n-1} - 5$$

とする；このときの等式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ が漸化式である．更に $a_0 = 4$ とする．このとき,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 1 にすると $a_1 = 3a_0 - 5 = 3\cdot 4 - 5 = 7$,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 2 にすると $a_2 = 3a_1 - 5 = 3\cdot 7 - 5 = 16$,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 3 にすると $a_3 = 3a_2 - 5 = 3\cdot 16 - 5 = 43$,

$\boxed{\text{例}}$ 自然数全体 $\{0,1,2,3,\dots\}$ を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について,

$$1 \text{ 以上の各自然数 } n \text{ に対して} \quad a_n = 3a_{n-1} - 5$$

とする;このときの等式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ が漸化式である.更に $a_0 = 4$ とする.このとき,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 1 にすると $a_1 = 3a_0 - 5 = 3\cdot 4 - 5 = 7$,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 2 にすると $a_2 = 3a_1 - 5 = 3\cdot 7 - 5 = 16$,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 3 にすると $a_3 = 3a_2 - 5 = 3\cdot 16 - 5 = 43$,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 4 にすると $a_4 = 3a_3 - 5 = 3\cdot 43 - 5 = 124$,

例 自然数全体 $\{0,1,2,3,\ldots\}$ を定義域とする数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について,

$$1 \text{ 以上の各自然数 } n \text{ に対して} \quad a_n = 3a_{n-1} - 5$$

とする;このときの等式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ が漸化式である. 更に $a_0 = 4$ とする. このとき,

漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 1 にすると $a_1 = 3a_0 - 5 = 3\cdot 4 - 5 = 7$,
漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 2 にすると $a_2 = 3a_1 - 5 = 3\cdot 7 - 5 = 16$,
漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 3 にすると $a_3 = 3a_2 - 5 = 3\cdot 16 - 5 = 43$,
漸化式 $a_n = 3a_{n-1} - 5$ で n を 4 にすると $a_4 = 3a_3 - 5 = 3\cdot 43 - 5 = 124$,

$$\vdots$$

というように, 次々に $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ の値を求めることができる. 終

一般的に，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，漸化式

$$a_n = \phi(a_{n-1}) \qquad (n \geq 1)$$

が成り立つとき，

$$a_1 = \phi(a_0)\ , \qquad a_2 = \phi(a_1)\ , \qquad a_3 = \phi(a_2)\ , \qquad a_4 = \phi(a_3)\ , \qquad \cdots$$

のように，a_0 の値が分かれば，順次 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ の値を求めることができる.

一般的に，数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，漸化式

$$a_n = \phi(a_{n-1}) \qquad (\, n \geq 1 \,)$$

が成り立つとき，

$$a_1 = \phi(a_0) \;, \qquad a_2 = \phi(a_1) \;, \qquad a_3 = \phi(a_2) \;, \qquad a_4 = \phi(a_3) \;, \qquad \cdots$$

のように，a_0 の値が分かれば，順次 $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ の値を求めることができる．このように，漸化式によって数列を定めることを，数列の帰納的定義という．

$\boxed{\text{問}1.1.2}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 5$ ， 1 以上の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1} - 3$ ． a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 1 にすると $a_1 = 2a_0 - 3 = \qquad = \quad .$

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 2 にすると $a_2 = 2a_1 - 3 = \qquad = \quad .$

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 3 にすると $a_3 = 2a_2 - 3 = \qquad = \quad .$

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 4 にすると $a_4 = 2a_3 - 3 = \qquad = \quad .$

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 5 にすると $a_5 = 2a_4 - 3 = \qquad = \quad .$

$\boxed{\text{問}1.1.2}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 5$ ， 1 以上の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1} - 3$ ． a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 1 にすると $a_1 = 2a_0 - 3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 2 にすると $a_2 = 2a_1 - 3 = \qquad = \quad$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 3 にすると $a_3 = 2a_2 - 3 = \qquad = \quad$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 4 にすると $a_4 = 2a_3 - 3 = \qquad = \quad$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 5 にすると $a_5 = 2a_4 - 3 = \qquad = \quad$.

$\boxed{問1.1.2}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 5$ ， 1 以上の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1} - 3$ ． a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 1 にすると $a_1 = 2a_0 - 3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 2 にすると $a_2 = 2a_1 - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 3 にすると $a_3 = 2a_2 - 3 = \qquad =$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 4 にすると $a_4 = 2a_3 - 3 = \qquad =$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 5 にすると $a_5 = 2a_4 - 3 = \qquad =$.

$\boxed{問 1.1.2}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 5$ ， 1 以上の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1} - 3$ ． a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 1 にすると $a_1 = 2a_0 - 3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 2 にすると $a_2 = 2a_1 - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 3 にすると $a_3 = 2a_2 - 3 = 2 \cdot 11 - 3 = 19$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 4 にすると $a_4 = 2a_3 - 3 = \qquad = \quad$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 5 にすると $a_5 = 2a_4 - 3 = \qquad = \quad$.

$\boxed{問1.1.2}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 5$ ， 1 以上の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1} - 3$ ． a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 1 にすると $a_1 = 2a_0 - 3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 2 にすると $a_2 = 2a_1 - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 3 にすると $a_3 = 2a_2 - 3 = 2 \cdot 11 - 3 = 19$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 4 にすると $a_4 = 2a_3 - 3 = 2 \cdot 19 - 3 = 35$.

漸化式 $a_n = 2a_{n-1} - 3$ で n を 5 にすると $a_5 = 2a_4 - 3 = \qquad = \quad$.

$\boxed{問1.1.2}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0=5$ ， 1 以上の各自然数 n について $a_n=2a_{n-1}-3$ ． a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 の値を求めよ.

漸化式 $a_n=2a_{n-1}-3$ で n を 1 にすると $a_1=2a_0-3=2\cdot 5-3=7$.

漸化式 $a_n=2a_{n-1}-3$ で n を 2 にすると $a_2=2a_1-3=2\cdot 7-3=11$.

漸化式 $a_n=2a_{n-1}-3$ で n を 3 にすると $a_3=2a_2-3=2\cdot 11-3=19$.

漸化式 $a_n=2a_{n-1}-3$ で n を 4 にすると $a_4=2a_3-3=2\cdot 19-3=35$.

漸化式 $a_n=2a_{n-1}-3$ で n を 5 にすると $a_5=2a_4-3=2\cdot 35-3=67$.

$\boxed{終}$