1.4 等差数列

数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad (\,d \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ を等差数列といい，定数 d をその公差という.

例 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3=49$ とする．1 以上の各自然数 n について $a_n=a_{n-1}+10$ なので，

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 1 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 4$ とすると $a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59$,

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 1 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 4$ とすると $a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59$,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 5$ とすると $a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69$,

$\boxed{例}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする. 1 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 4$ とすると $a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59$,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 5$ とすると $a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69$,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 6$ とすると $a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79$,

例 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3=49$ とする．1 以上の各自然数 n について $a_n=a_{n-1}+10$ なので，

$$
\begin{aligned}
&a_n=a_{n-1}+10 \text{ において } n=4 \text{ とすると } a_4=a_3+10=49+10=59\ ,\\
&a_n=a_{n-1}+10 \text{ において } n=5 \text{ とすると } a_5=a_4+10=59+10=69\ ,\\
&a_n=a_{n-1}+10 \text{ において } n=6 \text{ とすると } a_6=a_5+10=69+10=79\ ,\\
&a_n=a_{n-1}+10 \text{ において } n=7 \text{ とすると } a_7=a_6+10=79+10=89\ ,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\quad .
\end{aligned}
$$

$\boxed{例}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする．1 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので，

$$
\begin{aligned}
&a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59\ ,\\
&a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69\ ,\\
&a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79\ ,\\
&a_n = a_{n-1} + 10 \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = a_6 + 10 = 79 + 10 = 89\ ,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \quad .
\end{aligned}
$$

また，1 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ より $a_{n-1} = a_n - 10$ なので，

$\boxed{例}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする．1 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので，

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 4$ とすると $a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59$,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 5$ とすると $a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69$,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 6$ とすると $a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79$,

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 7$ とすると $a_7 = a_6 + 10 = 79 + 10 = 89$,

$$\vdots \quad .$$

また，1 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ より $a_{n-1} = a_n - 10$ なので，

$a_{n-1} = a_n - 10$ において $n = 3$ とすると $a_2 = a_3 - 10 = 49 - 10 = 39$,

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3 = 49$ とする．1 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ なので，

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 4$ とすると $a_4 = a_3 + 10 = 49 + 10 = 59$ ，

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 5$ とすると $a_5 = a_4 + 10 = 59 + 10 = 69$ ，

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 6$ とすると $a_6 = a_5 + 10 = 69 + 10 = 79$ ，

$a_n = a_{n-1} + 10$ において $n = 7$ とすると $a_7 = a_6 + 10 = 79 + 10 = 89$ ，

$$\vdots \quad .$$

また，1 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 10$ より $a_{n-1} = a_n - 10$ なので，

$a_{n-1} = a_n - 10$ において $n = 3$ とすると $a_2 = a_3 - 10 = 49 - 10 = 39$ ，

$a_{n-1} = a_n - 10$ において $n = 2$ とすると $a_1 = a_2 - 10 = 39 - 10 = 29$ ，

例 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は等差数列であり公差が 10 であり $a_3=49$ とする．1 以上の各自然数 n について $a_n=a_{n-1}+10$ なので，

$$
\begin{aligned}
&a_n=a_{n-1}+10 \text{ において } n=4 \text{ とすると } a_4=a_3+10=49+10=59\ , \\
&a_n=a_{n-1}+10 \text{ において } n=5 \text{ とすると } a_5=a_4+10=59+10=69\ , \\
&a_n=a_{n-1}+10 \text{ において } n=6 \text{ とすると } a_6=a_5+10=69+10=79\ , \\
&a_n=a_{n-1}+10 \text{ において } n=7 \text{ とすると } a_7=a_6+10=79+10=89\ , \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\quad .
\end{aligned}
$$

また，1 以上の各自然数 n について $a_n=a_{n-1}+10$ より $a_{n-1}=a_n-10$ なので，

$$
\begin{aligned}
&a_{n-1}=a_n-10 \text{ において } n=3 \text{ とすると } a_2=a_3-10=49-10=39\ , \\
&a_{n-1}=a_n-10 \text{ において } n=2 \text{ とすると } a_1=a_2-10=39-10=29\ , \\
&a_{n-1}=a_n-10 \text{ において } n=1 \text{ とすると } a_0=a_1-10=29-10=19\ .
\end{aligned}
$$

終

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差を d とおく．1 以上の各自然数 n について漸化式 $a_n = a_{n-1} + d$ が成り立つので，自然数 m に対する項 a_m から a_{m+1} , $a_{m+2}\,, a_{m+3}\,, a_{m+4}\,, \ldots$ を計算していくと，

$$
\begin{aligned}
a_{m+1} &= a_m + d = a_m + d \ , \\
a_{m+2} &= a_{m+1} + d = (a_m + d) + d = a_m + 2d \ , \\
a_{m+3} &= a_{m+2} + d = (a_m + 2d) + d = a_m + 3d \ , \\
a_{m+4} &= a_{m+3} + d = (a_m + 3d) + d = a_m + 4d \ , \\
a_{m+5} &= a_{m+4} + d = (a_m + 4d) + d = a_m + 5d \ , \\
&\ \ \vdots \qquad\qquad .
\end{aligned}
$$

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差を d とおく．1 以上の各自然数 n について漸化式 $a_n = a_{n-1} + d$ が成り立つので，自然数 m に対する項 a_m から a_{m+1} , a_{m+2} , a_{m+3} , a_{m+4} , ... を計算していくと，

$$
\begin{aligned}
a_{m+1} &= a_m + d = a_m + d \ , \\
a_{m+2} = a_{m+1} + d = (a_m + d) + d &= a_m + 2d \ , \\
a_{m+3} = a_{m+2} + d = (a_m + 2d) + d &= a_m + 3d \ , \\
a_{m+4} = a_{m+3} + d = (a_m + 3d) + d &= a_m + 4d \ , \\
a_{m+5} = a_{m+4} + d = (a_m + 4d) + d &= a_m + 5d \ , \\
&\vdots \qquad .
\end{aligned}
$$

このように，各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$.

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_m & \xrightarrow{+d} & a_{m+1} & \xrightarrow{+d} & a_{m+2} & \xrightarrow{+d} & a_{m+3} & \xrightarrow{+d} & a_{m+4} & \xrightarrow{+d} & \cdots & \xrightarrow{+d} & a_{m+k} \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\
 & & a_m + d & & a_m + 2d & & a_m + 3d & & a_m + 4d & & \cdots & & a_m + kd
\end{array}
.
$$

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_m & \xrightarrow{+d} & a_{m+1} & \xrightarrow{+d} & a_{m+2} & \xrightarrow{+d} & a_{m+3} & \xrightarrow{+d} & a_{m+4} & \xrightarrow{+d} & \cdots & \xrightarrow{+d} & a_{m+k} \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\
 & & a_m + d & & a_m + 2d & & a_m + 3d & & a_m + 4d & & \cdots & & a_m + kd
\end{array}
.
$$

この等式 $a_{m+k} = a_m + dk$ において $m + k = n$ とおく； $k = n - m$ なので，

$a_n = a_m + d(n - m)$.

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m + kd$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_m & \xrightarrow{+d} & a_{m+1} & \xrightarrow{+d} & a_{m+2} & \xrightarrow{+d} & a_{m+3} & \xrightarrow{+d} & a_{m+4} & \xrightarrow{+d} & \cdots & \xrightarrow{+d} & a_{m+k} \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\
 & & a_m + d & & a_m + 2d & & a_m + 3d & & a_m + 4d & & \cdots & & a_m + kd
\end{array} .
$$

この等式 $a_{m+k} = a_m + dk$ において $m + k = n$ とおく； $k = n - m$ なので，

$a_n = a_m + d(n - m)$.

定理　数列 $\{a_n\}$ が公差が d である等差数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n - m)$.

定理　数列 $\{a_n\}$ が公差が d である等差数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n-m)$.

この定理より次のようになる.

定理　数列 $\{a_n\}$ が公差が d である等差数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n-m)$.

この定理より次のようになる．第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が公差が d である等差数列であるとき，

$$1 \text{ 以上の各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_1 + d(n-1) \ .$$

定理　数列 $\{a_n\}$ が公差が d である等差数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n-m)$ ．

この定理より次のようになる．第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が公差が d である等差数列であるとき，

$$1 \text{ 以上の各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_1 + d(n-1) \text{ ．}$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公差が d である等差数列であるとき，

$$\text{各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 + dn \text{ ．}$$

定理　数列 $\{a_n\}$ が公差が d である等差数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m + d(n-m)$ ．

　この定理より次のようになる．第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が公差が d である等差数列であるとき，

$$1 \text{ 以上の各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_1 + d(n-1)\ .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公差が d である等差数列であるとき，

$$\text{各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 + dn\ .$$

　このように，等差数列の一般項は独立変数 n の 1 次式で表される．

例 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公差が -3 である等差数列で，$a_5 = 7$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す．

$\boxed{例}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公差が -3 である等差数列で，$a_5=7$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す．

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公差が -3 である等差数列なので，各自然数 n に対して，

$$a_n = a_5 + (-3)(n-5) = 7 - 3n + 15 = 22 - 3n\ .$$ $\boxed{終}$

$$a_n = a_m + d(n-m)$$

$\boxed{\text{問}1.4.1}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が $-\dfrac{3}{2}$ である等差数列であり, $a_7 = 5$ とする. 1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が $-\dfrac{3}{2}$ である等差数列なので, 1 以上の各自然数 n に対して,

$$a_n = a_7 + \left(\qquad \right)(n - \quad) =$$

$\boxed{\text{問}1.4.1}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が $-\dfrac{3}{2}$ である等差数列であり，$a_7 = 5$ とする．1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ．

　数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が $-\dfrac{3}{2}$ である等差数列なので，1 以上の各自然数 n に対して，

$$a_n = a_7 + \left(-\frac{3}{2}\right)(n-7) = 5 - \frac{3}{2}n + \frac{21}{2} = \frac{31-3n}{2} \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

例 等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ について $a_3 = 7$ かつ $a_8 = 27$ とする. 1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

例 等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ について $a_3 = 7$ かつ $a_8 = 27$ とする. 1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

　まず等差数列の公差を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ について $a_3 = 7$ かつ $a_8 = 27$ とする. 1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず等差数列の公差を求める.

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の公差を d とおく. $a_8 = a_3 + d(8-3)$ なので,

$$a_n = a_m + d(n-m)$$

,

$\boxed{\text{例}}$ 等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ について $a_3 = 7$ かつ $a_8 = 27$ とする. 1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

　まず等差数列の公差を求める.

　等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の公差を d とおく. $a_8 = a_3 + d(8-3)$ なので, $27 = 7 + 5d$, $5d = 20$, $d = 4$.

例 等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ について $a_3=7$ かつ $a_8=27$ とする．1 以上の各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず等差数列の公差を求める.

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ の公差を d とおく． $a_8=a_3+d(8-3)$ なので, $27=7+5d$, $5d=20$, $d=4$ ．1 以上の各自然数 n に対して,

$$a_n=a_3+4(n-3)=7+4n-12=4n-5\ .$$

終

$\boxed{\text{問}1.4.2}$ 等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について， $a_5 = 22$ かつ $a_{11} = 4$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ．

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差を d とおく． $a_{11} =$ 　　　　　　　　　　なので，
$4 =$ 　　　　　， 　　$=$ 　　　　， $d =$ 　　　． 各自然数 n に対して，

$$a_n =$$

$\boxed{\text{問}1.4.2}$ 等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，$a_5 = 22$ かつ $a_{11} = 4$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ．

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差を d とおく．$a_{11} = a_5 + d(11-5)$ なので，$4 = 22 + 6d$，$6d = -18$，$d = -3$．各自然数 n に対して，

$$a_n =$$

$\boxed{\text{問}1.4.2}$ 等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ について，$a_5 = 22$ かつ $a_{11} = 4$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ．

等差数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公差を d とおく．$a_{11} = a_5 + d(11-5)$ なので，$4 = 22 + 6d$，$6d = -18$，$d = -3$．各自然数 n に対して，

$$a_n = a_{11} - 3(n-11) = 4 - 3n + 33 = 37 - 3n .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が 2 である等差数列で，第 1 項は $a_1 = 5$ とする．
1 以上の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算する．

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が 2 である等差数列で，第 1 項は $a_1 = 5$ とする．1 以上の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算する．

　数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が 2 である等差数列なので，1 以上の各自然数 k に対して

$$a_k = a_1 + 2(k-1) = 5 + 2k - 2 = 2k + 3 \ .$$

例 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が 2 である等差数列で，第 1 項は $a_1 = 5$ とする．1 以上の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算する．

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が 2 である等差数列なので，1 以上の各自然数 k に対して

$$a_k = a_1 + 2(k-1) = 5 + 2k - 2 = 2k + 3 \ .$$

1 以上の各自然数 n に対して，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n} (2k+3) = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 3 = 2\frac{n(n+1)}{2} + 3n \\ &= n(n+4) \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問1.4.3}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公差が 4 である等差数列で，第 0 項は $a_0 = 5$ とする．各自然数 m に対して総和 $\sum_{k=0}^{m} a_k$ を計算せよ．

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が 4 である等差数列なので，各自然数 k に対して

$$a_k =$$

各自然数 m に対して，

$$\sum_{k=0}^{m} a_k =$$

$\boxed{\text{問}1.4.3}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公差が 4 である等差数列で，第 0 項は $a_0 = 5$ とする．各自然数 m に対して総和 $\sum_{k=0}^{m} a_k$ を計算せよ．

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が 4 である等差数列なので，各自然数 k に対して

$$a_k = a_0 + 4k = 4k + 5 \ .$$

各自然数 m に対して，

$$\sum_{k=0}^{m} a_k =$$

$\boxed{問1.4.3}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公差が 4 である等差数列で，第 0 項は $a_0 = 5$ とする．各自然数 m に対して総和 $\sum_{k=0}^{m} a_k$ を計算せよ．

数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ は公差が 4 である等差数列なので，各自然数 k に対して

$$a_k = a_0 + 4k = 4k + 5 \ .$$

各自然数 m に対して，

$$\sum_{k=0}^{m} a_k = \sum_{k=0}^{m} (4k+5) = 4 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + 5(m+1) = (m+1)(2m+5) \ .$$

$\boxed{終}$