

1.5 等比数列

数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \quad (d \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ を等差数列といい，定数 d をその公差という.

数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \quad (d \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ を等差数列といい，定数 d をその公差という.

数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_n = ra_{n-1} \quad (r \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ を等比数列といい，定数 r をその公比という.

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \quad \text{において} \quad n = 4 \quad \text{とすると} \quad a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \quad \text{において} \quad n = 4 \quad \text{とすると} \quad a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \quad \text{において} \quad n = 5 \quad \text{とすると} \quad a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \quad \text{において} \quad n = 4 \quad \text{とすると} \quad a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \quad \text{において} \quad n = 5 \quad \text{とすると} \quad a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \quad \text{において} \quad n = 6 \quad \text{とすると} \quad a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 ,$$

\vdots .

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 ,$$

\vdots .

また, 正の各自然数 n について $a_{n-1} = \frac{a_n}{2}$ なので,

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 ,$$

\vdots .

また, 正の各自然数 n について $a_{n-1} = \frac{a_n}{2}$ なので,

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{10}{2} = 5 ,$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 ,$$

\vdots .

また, 正の各自然数 n について $a_{n-1} = \frac{a_n}{2}$ なので,

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{10}{2} = 5 ,$$

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 2 \text{ とすると } a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{5}{2} ,$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 ,$$

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 ,$$

\vdots .

また, 正の各自然数 n について $a_{n-1} = \frac{a_n}{2}$ なので,

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{10}{2} = 5 ,$$

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 2 \text{ とすると } a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{5}{2} ,$$

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 1 \text{ とすると } a_0 = \frac{a_1}{2} = \frac{5}{4} .$$

終

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. 正の各自然数 n について漸化式 $a_n = a_{n-1}r$ が成り立つので, 自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \dots$ を計算していくと,

$$a_{m+1} = a_m r = a_m r^1,$$

$$a_{m+2} = a_{m+1} r = a_m r \cdot r = a_m r^2,$$

$$a_{m+3} = a_{m+2} r = a_m r^2 \cdot r = a_m r^3,$$

$$a_{m+4} = a_{m+3} r = a_m r^3 \cdot r = a_m r^4,$$

$$a_{m+5} = a_{m+4} r = a_m r^4 \cdot r = a_m r^5,$$

$$\vdots$$

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. 正の各自然数 n について漸化式 $a_n = a_{n-1}r$ が成り立つので, 自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \dots$ を計算していくと,

$$a_{m+1} = a_m r = a_m r^1,$$

$$a_{m+2} = a_{m+1} r = a_m r \cdot r = a_m r^2,$$

$$a_{m+3} = a_{m+2} r = a_m r^2 \cdot r = a_m r^3,$$

$$a_{m+4} = a_{m+3} r = a_m r^3 \cdot r = a_m r^4,$$

$$a_{m+5} = a_{m+4} r = a_m r^4 \cdot r = a_m r^5,$$

$$\vdots$$

このように, 各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_m & \xrightarrow{\times r} & a_{m+1} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+2} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+3} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+4} & \xrightarrow{\times r} & \cdots & \xrightarrow{\times r} & a_{m+k} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & a_m r & & a_m r^2 & & a_m r^3 & & a_m r^4 & & \cdots & & a_m r^k \end{array} .$$

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_m & \xrightarrow{\times r} & a_{m+1} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+2} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+3} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+4} & \xrightarrow{\times r} & \cdots & \xrightarrow{\times r} & a_{m+k} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & a_m r & & a_m r^2 & & a_m r^3 & & a_m r^4 & & \cdots & & a_m r^k \end{array} .$$

この等式 $a_{m+k} = a_m r^k$ において $m+k = n$ とおく ; $k = n - m$ なので ,

$$a_n = a_m r^{n-m} .$$

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_m & \xrightarrow{\times r} & a_{m+1} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+2} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+3} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+4} & \xrightarrow{\times r} & \cdots & \xrightarrow{\times r} & a_{m+k} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ & & a_m r & & a_m r^2 & & a_m r^3 & & a_m r^4 & & \cdots & & a_m r^k \end{array} .$$

この等式 $a_{m+k} = a_m r^k$ において $m+k = n$ とおく ; $k = n - m$ なので ,

$$a_n = a_m r^{n-m} .$$

定理 数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき , 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

定理 数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる.

定理 数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる. 第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が公比が r である等比数列であるとき,

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について } a_n = a_1 r^{n-1} .$$

定理 数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる. 第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が公比が r である等比数列であるとき,

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について } a_n = a_1 r^{n-1} .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公比が r である等比数列であるとき,

$$\text{各自然数 } n \text{ について } a_n = a_0 r^n .$$

定理 数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる. 第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が公比が r である等比数列であるとき,

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について } a_n = a_1 r^{n-1} .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公比が r である等比数列であるとき,

$$\text{各自然数 } n \text{ について } a_n = a_0 r^n .$$

このように, 等比数列の一般項は公比が r の冪の定数倍である.

例 自然数でない実数 x に対して, 例えば $\left(-\frac{2}{3}\right)^x$ のような, 底が負の数で指数が x である冪は定義されていない (指数関数の底は正の実数に限られる).

例 自然数でない実数 x に対して, 例えば $\left(-\frac{2}{3}\right)^x$ のような, 底が負の数で指数が x である冪は定義されていない (指数関数の底は正の実数に限られる). しかし, 数列 $\{a_n\}$ の独立変数 n の値は自然数に限られるので, $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ のような負の数を底とする冪の値がある:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}, \quad \dots$$

例 自然数でない実数 x に対して、例えば $\left(-\frac{2}{3}\right)^x$ のような、底が負の数で指数が x である冪は定義されていない（指数関数の底は正の実数に限られる）。しかし、数列 $\{a_n\}$ の独立変数 n の値は自然数に限られるので、 $\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ のような負の数を底とする冪の値がある：

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}, \quad \dots$$

従って、例えば公比が $-\frac{2}{3}$ である等比数列 $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ ができる。

終

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が 2 である等比数列であり, $a_5 = 28$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が 2 である等比数列であり, $a_5 = 28$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が 2 である等比数列なので, 各自然数 n について,

$$a_n = a_5 2^{n-5} = 28 \cdot 2^{n-5} = 7 \cdot 2^2 \cdot 2^{n-5} = 7 \cdot 2^{n-3} .$$

終

$$a_n = a_m r^{n-m}$$

問1.5.1 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が $\frac{1}{3}$ である等比数列であり, $a_2 = 45$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が $\frac{1}{3}$ である等比数列なので,

$$a_n = a_2 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2} =$$

問1.5.1 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が $\frac{1}{3}$ である等比数列であり, $a_2 = 45$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は公比が $\frac{1}{3}$ である等比数列なので,

$$a_n = a_2 \left(\frac{1}{3} \right)^{n-2} = 45 \cdot \frac{1}{3^{n-2}} = \frac{5 \cdot 3^2}{3^{n-2}} = \frac{5}{3^{n-4}} .$$

終

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず公比を求める.

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_6 = a_2 r^{6-2}$ なので,

$$a_n = a_m r^{n-m}$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず公比を求める.

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_6 = a_2 r^{6-2}$ なので, $63 = 7r^4$,
 $r^4 = 9$,

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず公比を求める.

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_6 = a_2 r^{6-2}$ なので, $63 = 7r^4$,
 $r^4 = 9$, $r > 0$ なので

$$r = 9^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}.$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず公比を求める.

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_6 = a_2 r^{6-2}$ なので, $63 = 7r^4$,
 $r^4 = 9$, $r > 0$ なので

$$r = 9^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}.$$

よって,

$$a_n = a_2 r^{n-2} = 7 \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{n-2} = 7 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1}.$$

$$a_n = a_m r^{n-m}$$

終

問1.5.2 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_3 = 4$, $a_{12} = 500$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_{12} = \qquad = \qquad$ なので,
 $= 500$, $r^9 = \qquad = \qquad$, $r > 0$ なので $r = \qquad = \qquad = \qquad$.

よって,

$$a_n =$$

問1.5.2 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_3 = 4$, $a_{12} = 500$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_{12} = a_3 r^{12-3} = a_3 r^9$ なので,
 $4r^9 = 500$, $r^9 = \frac{500}{4} = 125$, $r > 0$ なので $r = 125^{\frac{1}{9}} = (5^3)^{\frac{1}{9}} = 5^{\frac{1}{3}}$.
よって,

$$a_n =$$

問1.5.2 等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_3 = 4$, $a_{12} = 500$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

等比数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の公比を r とおく. $a_{12} = a_3 r^{12-3} = a_3 r^9$ なので,
 $4r^9 = 500$, $r^9 = \frac{500}{4} = 125$, $r > 0$ なので $r = 125^{\frac{1}{9}} = (5^3)^{\frac{1}{9}} = 5^{\frac{1}{3}}$.
よって,

$$a_n = a_3 r^{n-3} = 4 \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{n-3} = 4 \cdot 5^{\frac{n}{3}-1} .$$

終

等比数列の項の総和の計算法を説明する.

例 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n$$

を計算する.

例 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n$$

を計算する．この値を S とおく：

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n .$$

例 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n$$

を計算する. この値を S とおく :

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n .$$

この等式の両辺に公比 5 を掛ける :

$$\begin{aligned} 5S &= (2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n) \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 5 + 10 \cdot 5 + 50 \cdot 5 + 250 \cdot 5 + 1250 \cdot 5 + \cdots \\ &\quad + 2 \cdot 5^{n-2} \cdot 5 + 2 \cdot 5^{n-1} \cdot 5 + 2 \cdot 5^n \cdot 5 \\ &= 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} . \end{aligned}$$

$$5S = 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \cdots 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} \ ,$$

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n \ .$$

$$5S = 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \cdots 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} ,$$

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算すると，右辺はほとんどの項が消える．

$$\begin{array}{r} 5S = \quad 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \quad \cdots \quad + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} \\ -) \quad S = \quad 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \quad \cdots \quad + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n \\ \hline 4S = -2 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + 2 \cdot 5^{n+1} \end{array}$$

つまり $4S = -2 + 2 \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot 5^{n+1} - 2$ なので， $S = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1)$ ．

$$5S = 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \cdots 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} ,$$

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算すると，右辺はほとんどの項が消える．

$$\begin{array}{r} 5S = \quad 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \quad \cdots \quad + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} \\ -) \quad S = \quad 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \quad \cdots \quad + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n \\ \hline 4S = -2 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad + 2 \cdot 5^{n+1} \end{array}$$

つまり $4S = -2 + 2 \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot 5^{n+1} - 2$ なので， $S = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1)$ ． よって

$$\sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1) . \boxed{\text{終}}$$

例 2 以上の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ を計算する.

例 2 以上の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ を計算する.

$$S = \sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k) \quad \text{とおく.}$$

$$S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n .$$

例 2 以上の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ を計算する.

$$S = \sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k) \text{ とおく.}$$

$$S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n .$$

項の公比は 3 である. この公比 3 を両辺に掛ける :

$$3S = 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + 5 \cdot 3^7 + \cdots + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} .$$

【例】 2 以上の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ を計算する.

$$S = \sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k) \text{ とおく.}$$

$$S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n .$$

項の公比は 3 である. この公比 3 を両辺に掛ける :

$$3S = 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + 5 \cdot 3^7 + \cdots + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} .$$

$3S$ から S を引く :

$$\begin{array}{rcl} 3S & = & 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} \\ -) \quad S & = & 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n \\ \hline 2S & = & -5 \cdot 3^2 \qquad \qquad \qquad + 5 \cdot 3^{n+1} \end{array}$$

$$\text{つまり } 2S = -5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^{n+1} = 5 \cdot 3^{n+1} - 45 .$$

例 2 以上の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k)$ を計算する.

$$S = \sum_{k=2}^n (5 \cdot 3^k) \text{ とおく.}$$

$$S = 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n .$$

項の公比は 3 である. この公比 3 を両辺に掛ける :

$$3S = 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^6 + 5 \cdot 3^7 + \cdots + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} .$$

$3S$ から S を引く :

$$\begin{array}{rcl} 3S & = & 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1} \\ -) \quad S & = & 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 5 \cdot 3^5 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n \\ \hline 2S & = & -5 \cdot 3^2 \qquad \qquad \qquad + 5 \cdot 3^{n+1} \end{array}$$

つまり $2S = -5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^{n+1} = 5 \cdot 3^{n+1} - 45$. よって $S = \frac{5 \cdot 3^{n+1} - 45}{2}$. 故

$$\text{に } \sum_{k=0}^n (5 \cdot 3^k) = \frac{5 \cdot 3^{n+1} - 45}{2} .$$

終

問1.5.3 3 以上の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S = \sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ とおく. 項の公比は 5 である.

$$S = 8 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + \cdots + 8 \cdot 5^{n-1} + 8 \cdot 5^n ,$$

$$5S = 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad + 8 \cdot \quad + \cdots + 8 \cdot 5^n + 8 \cdot \quad .$$

$5S$ から S を引くと $4S =$ なので,

$$S = \quad = \quad .$$

よって $\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k) =$.

問1.5.3 3 以上の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S = \sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ とおく. 項の公比は 5 である.

$$S = 8 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + \cdots + 8 \cdot 5^{n-1} + 8 \cdot 5^n ,$$

$$5S = 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + 8 \cdot 5^7 + \cdots + 8 \cdot 5^n + 8 \cdot 5^{n+1} .$$

$5S$ から S を引くと $4S =$ なので,

$$S = \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad .$$

よって $\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k) =$.

問1.5.3 3以上の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S = \sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k)$ とおく. 項の公比は 5 である.

$$S = 8 \cdot 5^3 + 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + \cdots + 8 \cdot 5^{n-1} + 8 \cdot 5^n ,$$

$$5S = 8 \cdot 5^4 + 8 \cdot 5^5 + 8 \cdot 5^6 + 8 \cdot 5^7 + \cdots + 8 \cdot 5^n + 8 \cdot 5^{n+1} .$$

$5S$ から S を引くと $4S = 8 \cdot 5^{n+1} - 8 \cdot 5^3$ なので,

$$S = 2 \cdot 5^{n+1} - 2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 5^{n+1} - 250 .$$

よって $\sum_{k=3}^n (8 \cdot 5^k) = 2 \cdot 5^{n+1} - 250$.

終

例 各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$ を計算する.

例 各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$ を計算する.

$$S = \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\} \quad \text{とおく :}$$

$$S = 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^3 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^{n-1} + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n .$$

例 各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$ を計算する.

$$S = \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\} \quad \text{とおく :}$$

$$S = 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^3 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^{n-1} + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n .$$

この等式の両辺に等比数列の公比 $\frac{5}{7}$ を掛ける :

$$\frac{5}{7}S = 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^3 + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^4 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^{n+1} .$$

例 各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$ を計算する.

$$S = \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\} \quad \text{とおく :}$$

$$S = 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^3 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^{n-1} + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n .$$

この等式の両辺に等比数列の公比 $\frac{5}{7}$ を掛ける :

$$\frac{5}{7}S = 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^3 + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^4 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^{n+1} .$$

S から $\frac{5}{7}S$ を引く.

S から $\frac{5}{7}S$ を引く.

$$\begin{array}{rcl} S & = & 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\frac{5}{7}\right)^n \\ -) \quad \frac{5}{7}S & = & 3 \cdot \frac{5}{7} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\frac{5}{7}\right)^n + 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} \\ \hline \frac{2}{7}S & = & 3 - 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} \end{array}$$

つまり $\frac{2}{7}S = 3 - 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}$.

S から $\frac{5}{7}S$ を引く.

$$\begin{array}{rcl} S & = & 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\frac{5}{7}\right)^n \\ -) \quad \frac{5}{7}S & = & 3 \cdot \frac{5}{7} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\frac{5}{7}\right)^n + 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} \\ \hline \frac{2}{7}S & = & 3 - 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} \end{array}$$

つまり $\frac{2}{7}S = 3 - 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}$. 両辺に $\frac{7}{2}$ を掛けて

$$S = 3 \cdot \frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{7}{2} \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} = \frac{21}{2} - 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7} \left(\frac{5}{7}\right)^n = \frac{21}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{5}{7}\right)^n .$$

S から $\frac{5}{7}S$ を引く.

$$\begin{array}{rcl} S & = & 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\frac{5}{7}\right)^n \\ -) \quad \frac{5}{7}S & = & 3 \cdot \frac{5}{7} + 3\left(\frac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\frac{5}{7}\right)^n + 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} \\ \hline \frac{2}{7}S & = & 3 - 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} \end{array}$$

つまり $\frac{2}{7}S = 3 - 3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}$. 両辺に $\frac{7}{2}$ を掛けて

$$S = 3 \cdot \frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{7}{2} \left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} = \frac{21}{2} - 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7} \left(\frac{5}{7}\right)^n = \frac{21}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{5}{7}\right)^n .$$

故に $\sum_{k=0}^n \left\{ 3\left(\frac{5}{7}\right)^k \right\} = \frac{21}{2} - \frac{15}{2} \left(\frac{5}{7}\right)^n$.

終

問1.5.4 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

$$S = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n,$$

$$\frac{3}{5}S = \qquad \qquad \qquad .$$

$$S \text{ から } \frac{3}{5}S \text{ を引くと } \frac{2}{5}S = \qquad \qquad \qquad \text{なので,}$$

$$S = \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad .$$

$$\text{つまり } \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} = \qquad \qquad \qquad .$$

問1.5.4 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

$$S = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n,$$

$$\frac{3}{5}S = 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^5 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}.$$

$$S \text{ から } \frac{3}{5}S \text{ を引くと } \frac{2}{5}S = \qquad \qquad \qquad \text{なので,}$$

$$S = \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad .$$

$$\text{つまり } \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} = \qquad \qquad \qquad .$$

問1.5.4 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

$$S = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n,$$

$$\frac{3}{5}S = 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^5 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}.$$

$$S \text{ から } \frac{3}{5}S \text{ を引くと } \frac{2}{5}S = 4 \cdot \frac{3}{5} - 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} \quad \text{なので,}$$

$$S = 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} - 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} \frac{5}{2} = 6 - 10 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} = 6 - 10 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{3}{5} \right)^n = 6 - 6 \left(\frac{3}{5} \right)^n.$$

$$\text{つまり } \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} = 6 - 6 \left(\frac{3}{5} \right)^n.$$

終

定数 r について $r \neq 1$ とする. 最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} .$$

定数 r について $r \neq 1$ とする. 最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} .$$

この等式の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n .$$

定数 r について $r \neq 1$ とする. 最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} .$$

この等式の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n .$$

S_n から rS_n を引くと,

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ &\quad - (ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n) \\ &= a - ar^n , \end{aligned}$$

定数 r について $r \neq 1$ とする. 最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} .$$

この等式の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n .$$

S_n から rS_n を引くと,

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ &\quad - (ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n) \\ &= a - ar^n , \end{aligned}$$

よって $(1-r)S_n = a(1-r^n)$ なので, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} .$

$r = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} &= \underbrace{a + a + a + a + a + \cdots + a + a}_{n \text{ 個の } a \text{ の和}} \\ &= an . \end{aligned}$$

$r = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} &= \underbrace{a + a + a + a + a + \cdots + a + a}_{n \text{ 個の } a \text{ の和}} \\ &= an . \end{aligned}$$

定理 正の各自然数 n に対して, 最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は, $r \neq 1$ のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} ,$$

$r = 1$ のとき

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = an .$$

例 正の各自然数 n に対して、初項が 5 で 公比が 3 である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和を計算する.

例 正の各自然数 n に対して，初項が 5 で 公比が 3 である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和を計算する．

$$5 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} = \frac{5(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{5}{2}(3^n - 1) . \quad \boxed{\text{終}}$$

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

例 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

例 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ は初項が $4 \left(\frac{3}{5} \right)^1 = \frac{12}{5}$ であり公比が $\frac{3}{5}$ である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和なので,

例 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ は初項が $4 \left(\frac{3}{5} \right)^1 = \frac{12}{5}$ であり公比が $\frac{3}{5}$ である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和なので,

$$\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

例 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ は初項が $4 \left(\frac{3}{5} \right)^1 = \frac{12}{5}$ であり公比が $\frac{3}{5}$ である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和なので,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} &= 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \\ &= \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^1 + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^2 + \cdots + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

例 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ は初項が $4 \left(\frac{3}{5} \right)^1 = \frac{12}{5}$ であり公比が $\frac{3}{5}$ である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和なので,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} &= 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \\ &= \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^1 + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^2 + \cdots + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-2} + \frac{12}{5} \left(\frac{3}{5} \right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{12}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}}{1 - \frac{3}{5}} \\ &= 6 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} . \end{aligned}$$

終

問1.5.5 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 6 \left(\frac{5}{3} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

問1.5.5 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 6 \left(\frac{5}{3} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ 6 \left(\frac{5}{3} \right)^k \right\} &= 6 \cdot \frac{5}{3} + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^2 + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^3 + \cdots + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^n \\ &= 10 + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^1 + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^2 + \cdots + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-2} + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

問1.5.5 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 6 \left(\frac{5}{3} \right)^k \right\}$ を計算せよ.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \left\{ 6 \left(\frac{5}{3} \right)^k \right\} &= 6 \cdot \frac{5}{3} + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^2 + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^3 + \cdots + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} + 6 \left(\frac{5}{3} \right)^n \\&= 10 + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^1 + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^2 + \cdots + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-2} + 10 \left(\frac{5}{3} \right)^{n-1} \\&= \frac{10 \left\{ \left(\frac{5}{3} \right)^n - 1 \right\}}{\frac{5}{3} - 1} \\&= 15 \left\{ \left(\frac{5}{3} \right)^n - 1 \right\} .\end{aligned}$$

終

例 正の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n$ を計算する.

例 正の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n$ を計算する.

総和

$$\begin{aligned} & 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n \\ &= 2 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + \cdots + 2 \cdot 5^n \\ &= \sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) \end{aligned}$$

は、第 0 項が 2 であり公比が 5 である等比数列の第 0 項から第 n 項までの
個の項の総和である.

例 正の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n$ を計算する.

総和

$$\begin{aligned} & 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n \\ &= 2 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + \cdots + 2 \cdot 5^n \\ &= \sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) \end{aligned}$$

は、第 0 項が 2 であり公比が 5 である等比数列の第 0 項から第 n 項までの $(n+1)$ 個の項の総和である.

例 正の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n$ を計算する.

総和

$$\begin{aligned} & 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n \\ &= 2 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + \cdots + 2 \cdot 5^n \\ &= \sum_{k=0}^n (2 \cdot 5^k) \end{aligned}$$

は、第 0 項が 2 であり公比が 5 である等比数列の第 0 項から第 n 項までの $(n+1)$ 個の項の総和である.

$$\begin{aligned} 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^n &= \frac{2(5^{n+1} - 1)}{5 - 1} \\ &= \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1) . \end{aligned}$$

終

問1.5.6 正の各自然数 n に対して総和 $4 + 12 + 36 + 108 + 324 + \cdots + 4 \cdot 3^n$ を計算せよ.

問1.5.6 正の各自然数 n に対して総和 $4 + 12 + 36 + 108 + 324 + \cdots + 4 \cdot 3^n$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} 4 + 12 + 36 + 108 + 324 + \cdots + 4 \cdot 3^n &= \sum_{k=1}^{n+1} (4 \cdot 3^{k-1}) \\ &= \frac{4(3^{n+1} - 1)}{3 - 1} \\ &= 2(3^{n+1} - 1) . \end{aligned}$$

終