1.5 等比数列

数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad (\, d \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ を等差数列といい，定数 d をその公差という．

数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad (\ d \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ を等差数列といい，定数 d をその公差という.

数列 $\{a_n\}$ について，漸化式

$$a_n = ra_{n-1} \qquad (\ r \text{ は変数 } n \text{ と無関係な定数})$$

が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ を等比数列といい，定数 r をその公比という.

$\boxed{\text{例}}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする．正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので，

例 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする．正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので，

$a_n = 2a_{n-1}$ において $n = 4$ とすると $a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20$ ，

$\boxed{\text{例}}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする．正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので，

$a_n = 2a_{n-1}$ において $n = 4$ とすると $a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20$,

$a_n = 2a_{n-1}$ において $n = 5$ とすると $a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40$,

$\boxed{\text{例}}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする. 正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので,

$a_n = 2a_{n-1}$ において $n = 4$ とすると $a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20$,

$a_n = 2a_{n-1}$ において $n = 5$ とすると $a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40$,

$a_n = 2a_{n-1}$ において $n = 6$ とすると $a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80$,

$\boxed{\text{例}}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする．正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので，

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20\ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40\ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80\ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160\ ,$$
$$\vdots \quad .$$

$\boxed{例}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする．正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので，

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 \ ,$$
$$\vdots \quad .$$

また，正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ より $a_{n-1} = \dfrac{a_n}{2}$ なので，

$\boxed{例}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする．正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので，

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 \ ,$$
$$\vdots \quad .$$

また，正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ より $a_{n-1} = \dfrac{a_n}{2}$ なので，

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする．正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので，

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 \ ,$$
$$\vdots \quad .$$

また，正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ より $a_{n-1} = \dfrac{a_n}{2}$ なので，

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \ ,$$
$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 2 \text{ とすると } a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{5}{2} \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比が 2 で $a_3 = 10$ とする．正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ なので，

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 4 \text{ とすると } a_4 = 2a_3 = 2 \times 10 = 20 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 5 \text{ とすると } a_5 = 2a_4 = 2 \times 20 = 40 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 6 \text{ とすると } a_6 = 2a_5 = 2 \times 40 = 80 \ ,$$
$$a_n = 2a_{n-1} \text{ において } n = 7 \text{ とすると } a_7 = 2a_6 = 2 \times 80 = 160 \ ,$$
$$\vdots \quad .$$

また，正の各自然数 n について $a_n = 2a_{n-1}$ より $a_{n-1} = \dfrac{a_n}{2}$ なので，

$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 3 \text{ とすると } a_2 = \frac{a_3}{2} = \frac{10}{2} = 5 \ ,$$
$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 2 \text{ とすると } a_1 = \frac{a_2}{2} = \frac{5}{2} \ ,$$
$$a_{n-1} = \frac{a_n}{2} \text{ において } n = 1 \text{ とすると } a_0 = \frac{a_1}{2} = \frac{5}{4} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比を r とおく．正の各自然数 n について漸化式 $a_n = a_{n-1}r$ が成り立つので，自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \ldots$ を計算していくと，

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= a_m r = a_m r^1 \ , \\ a_{m+2} = a_{m+1} r &= a_m r \cdot r = a_m r^2 \ , \\ a_{m+3} = a_{m+2} r &= a_m r^2 \cdot r = a_m r^3 \ , \\ a_{m+4} = a_{m+3} r &= a_m r^3 \cdot r = a_m r^4 \ , \\ a_{m+5} = a_{m+4} r &= a_m r^4 \cdot r = a_m r^5 \ , \\ &\vdots \qquad\qquad . \end{aligned}$$

等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比を r とおく．正の各自然数 n について漸化式 $a_n = a_{n-1}r$ が成り立つので，自然数 m に対する項 a_m から $a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, a_{m+4}, \ldots$ を計算していくと，

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= a_m r = a_m r^1 \ , \\ a_{m+2} &= a_{m+1} r = a_m r \cdot r = a_m r^2 \ , \\ a_{m+3} &= a_{m+2} r = a_m r^2 \cdot r = a_m r^3 \ , \\ a_{m+4} &= a_{m+3} r = a_m r^3 \cdot r = a_m r^4 \ , \\ a_{m+5} &= a_{m+4} r = a_m r^4 \cdot r = a_m r^5 \ , \\ &\vdots \qquad\qquad . \end{aligned}$$

このように，各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$ ．

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_m & \xrightarrow{\times r} & a_{m+1} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+2} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+3} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+4} & \xrightarrow{\times r} & \cdots & \xrightarrow{\times r} & a_{m+k} \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\
 & & a_m r & & a_m r^2 & & a_m r^3 & & a_m r^4 & & \cdots & & a_m r^k
\end{array} .
$$

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_m & \xrightarrow{\times r} & a_{m+1} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+2} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+3} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+4} & \xrightarrow{\times r} & \cdots & \xrightarrow{\times r} & a_{m+k} \\ & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\ & & a_m r & & a_m r^2 & & a_m r^3 & & a_m r^4 & & \cdots & & a_m r^k \end{array} .$$

この等式 $a_{m+k} = a_m r^k$ において $m + k = n$ とおく; $k = n - m$ なので,

$a_n = a_m r^{n-m}$.

各自然数 k に対して $a_{m+k} = a_m r^k$.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_m & \xrightarrow{\times r} & a_{m+1} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+2} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+3} & \xrightarrow{\times r} & a_{m+4} & \xrightarrow{\times r} & \cdots & \xrightarrow{\times r} & a_{m+k} \\
 & & \| & & \| & & \| & & \| & & & & \| \\
 & & a_m r & & a_m r^2 & & a_m r^3 & & a_m r^4 & & \cdots & & a_m r^k
\end{array} .
$$

この等式 $a_{m+k} = a_m r^k$ において $m+k=n$ とおく; $k = n-m$ なので,

$a_n = a_m r^{n-m}$.

定理　数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき, 数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

定理　数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる.

定理　数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる．第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が公比が r である等比数列であるとき，

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_1 r^{n-1} \ .$$

定理　数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

　この定理より次のようになる．第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ が公比が r である等比数列であるとき，

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_1 r^{n-1} .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公比が r である等比数列であるとき，

$$\text{各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 r^n .$$

定理　数列 $\{a_n\}$ が公比が r である等比数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の定義域の各自然数 m, n について $a_n = a_m r^{n-m}$.

この定理より次のようになる．第 1 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ が公比が r である等比数列であるとき，

$$\text{正の各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_1 r^{n-1} \ .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公比が r である等比数列であるとき，

$$\text{各自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 r^{n} \ .$$

このように，等比数列の一般項は公比が r の冪の定数倍である．

$\boxed{\text{例}}$ 自然数でない実数 x に対して，例えば $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^x$ のような，底が負の数で指数が x である冪は定義されていない（指数関数の底は正の実数に限られる）.

$\boxed{\text{例}}$ 自然数でない実数 x に対して，例えば $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^x$ のような，底が負の数で指数が x である冪は定義されていない（指数関数の底は正の実数に限られる）．しかし，数列 $\{a_n\}$ の独立変数 n の値は自然数に限られるので，$\left(-\dfrac{2}{3}\right)^n$ のような負の数を底とする冪の値がある：

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1\ ,\ \ \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}\ ,\ \ \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\ ,\ \ \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}\ ,\ \ \cdots\ .$$

例 自然数でない実数 x に対して，例えば $\left(-\frac{2}{3}\right)^x$ のような，底が負の数で指数が x である冪は定義されていない（指数関数の底は正の実数に限られる）．しかし，数列 $\{a_n\}$ の独立変数 n の値は自然数に限られるので，$\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ のような負の数を底とする冪の値がある：

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^0 = 1\,,\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^1 = -\frac{2}{3}\,,\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}\,,\quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}\,,\quad \cdots\,.$$

従って，例えば公比が $-\frac{2}{3}$ である等比数列 $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ ができる． 終

$\boxed{例}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比が 2 である等比数列であり，$a_5 = 28$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

例 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比が 2 である等比数列であり, $a_5 = 28$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比が 2 である等比数列なので, 各自然数 n について,

$$a_n = a_5 2^{n-5} = 28 \cdot 2^{n-5} = 7 \cdot 2^2 \cdot 2^{n-5} = 7 \cdot 2^{n-3} \ .$$

終

$$a_n = a_m r^{n-m}$$

$\boxed{問1.5.1}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比が $\dfrac{1}{3}$ である等比数列であり， $a_2 = 45$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比が $\dfrac{1}{3}$ である等比数列なので，

$$a_n = a_2\left(\quad\right)^{n-} \quad =$$

$\boxed{\text{問}1.5.1}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比が $\dfrac{1}{3}$ である等比数列であり, $a_2 = 45$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ.

数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ は公比が $\dfrac{1}{3}$ である等比数列なので,

$$a_n = a_2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = 45\cdot\frac{1}{3^{n-2}} = \frac{5\cdot 3^2}{3^{n-2}} = \frac{5}{3^{n-4}} .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする.
各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

例 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比は正の実数であり，$a_2 = 7$ ，$a_6 = 63$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す．

まず公比を求める．

等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比を r とおく．$a_6 = a_2 r^{6-2}$ なので，

$a_n = a_m r^{n-m}$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比は正の実数であり，$a_2=7$ ，$a_6=63$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す．

まず公比を求める．

等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比を r とおく．$a_6=a_2r^{6-2}$ なので，$63=7r^4$ ，$r^4=9$ ，

例 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2=7$, $a_6=63$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず公比を求める.

等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比を r とおく. $a_6=a_2r^{6-2}$ なので, $63=7r^4$, $r^4=9$, $r>0$ なので

$$r = 9^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} \ .$$

例 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比は正の実数であり, $a_2 = 7$, $a_6 = 63$ とする. 各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表す.

まず公比を求める.

等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比を r とおく. $a_6 = a_2 r^{6-2}$ なので, $63 = 7r^4$, $r^4 = 9$, $r > 0$ なので

$$r = 9^{\frac{1}{4}} = (3^2)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} .$$

よって,

$$a_n = a_2 r^{n-2} = 7 \cdot \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{n-2} = 7 \cdot 3^{\frac{n}{2}-1} .$$

終

$a_n = a_m r^{n-m}$

$\boxed{\text{問}1.5.2}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比は正の実数であり，$a_3 = 4$ ，$a_{12} = 500$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ．

等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比を r とおく．$a_{12} = \qquad = \qquad$ なので，

$\qquad = 500$ ，$r^9 = \qquad = \qquad$ ，$r > 0$ なので $r = \qquad = \qquad = \qquad$ ．

よって，

$$a_n = $$

$\boxed{問1.5.2}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比は正の実数であり，$a_3 = 4$ ，$a_{12} = 500$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ．

　等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比を r とおく．$a_{12} = a_3 r^{12-3} = a_3 r^9$ なので，$4r^9 = 500$ ，$r^9 = \dfrac{500}{4} = 125$ ，$r > 0$ なので $r = 125^{\frac{1}{9}} = (5^3)^{\frac{1}{9}} = 5^{\frac{1}{3}}$ ．

よって，

$$a_n =$$

$\boxed{問 1.5.2}$ 等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比は正の実数であり，$a_3 = 4$ ，$a_{12} = 500$ とする．各自然数 n に対する項 a_n を n の式で表せ．

　等比数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ の公比を r とおく．$a_{12} = a_3 r^{12-3} = a_3 r^9$ なので，$4r^9 = 500$ ，$r^9 = \dfrac{500}{4} = 125$ ，$r > 0$ なので $r = 125^{\frac{1}{9}} = (5^3)^{\frac{1}{9}} = 5^{\frac{1}{3}}$ ．
よって，

$$a_n = a_3 r^{n-3} = 4 \cdot \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{n-3} = 4 \cdot 5^{\frac{n}{3}-1} \ .$$

$\boxed{終}$

等比数列の項の総和の計算法を説明する.

$\boxed{\text{例}}$ 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k) = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n$$

を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k) = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n$$

を計算する．この値を S とおく：

$$S = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k) = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n$$

を計算する．この値を S とおく：

$$S = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n \ .$$

この等式の両辺に公比 5 を掛ける：

$$5S = (2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n)\cdot 5$$

$\boxed{\text{例}}$ 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k) = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n$$

を計算する．この値を S とおく：

$$S = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n \ .$$

この等式の両辺に公比 5 を掛ける：

$$\begin{aligned}5S &= (2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n)\cdot 5\\ &= 2\cdot 5+10\cdot 5+50\cdot 5+250\cdot 5+1250\cdot 5+\cdots\\ &\qquad +2\cdot 5^{n-2}\cdot 5+2\cdot 5^{n-1}\cdot 5+2\cdot 5^n\cdot 5\end{aligned}$$

例 公比が 5 である等比数列の項の総和

$$\sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k) = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n$$

を計算する．この値を S とおく：

$$S = 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n \ .$$

この等式の両辺に公比 5 を掛ける：

$$\begin{aligned}
5S &= (2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^{n-2}+2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n)\cdot 5 \\
&= 2\cdot 5+10\cdot 5+50\cdot 5+250\cdot 5+1250\cdot 5+\cdots \\
&\qquad +2\cdot 5^{n-2}\cdot 5+2\cdot 5^{n-1}\cdot 5+2\cdot 5^n\cdot 5 \\
&= 10+50+250+1250+6250+\cdots 2\cdot 5^{n-1}+2\cdot 5^n+2\cdot 5^{n+1} \ .
\end{aligned}$$

$$5S = 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \cdots 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n} + 2 \cdot 5^{n+1} \quad ,$$

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n} \quad .$$

$$5S = 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \cdots 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n} + 2 \cdot 5^{n+1} \ ,$$

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n} \ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算すると，右辺はほとんどの項が消える.

$$\begin{array}{rrl} & 5S = & \quad 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \quad \cdots \quad + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n} + 2 \cdot 5^{n+1} \\ -) & S = & 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \ \cdots \ + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n} \\ \hline & 4S = & -2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2 \cdot 5^{n+1} \end{array}$$

$$5S = 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \cdots 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n} + 2 \cdot 5^{n+1} \ ,$$

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n} \ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算すると，右辺はほとんどの項が消える.

$$\begin{array}{rrl}
 & 5S = & \quad 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \quad \cdots \quad + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n} + 2 \cdot 5^{n+1} \\
-) & S = & 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \ \cdots \ + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n} \\
\hline
 & 4S = & -2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2 \cdot 5^{n+1}
\end{array}$$

つまり $4S = -2 + 2 \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot 5^{n+1} - 2$ なので，$S = \dfrac{1}{2}(5^{n+1} - 1)$.

$$5S = 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \cdots 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} \ ,$$

$$S = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n \ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算すると，右辺はほとんどの項が消える．

$$\begin{array}{rrl}
 & 5S = & \quad\quad 10 + 50 + 250 + 1250 + 6250 + \quad \cdots \quad + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n + 2 \cdot 5^{n+1} \\
-) & S = & 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \ \cdots \ + 2 \cdot 5^{n-2} + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n \\
\hline
 & 4S = & -2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2 \cdot 5^{n+1}
\end{array}$$

つまり $4S = -2 + 2 \cdot 5^{n+1} = 2 \cdot 5^{n+1} - 2$ なので， $S = \dfrac{1}{2}(5^{n+1} - 1)$ ．よって

$$\sum_{k=0}^{n} (2 \cdot 5^k) = 2 + 10 + 50 + 250 + 1250 + \cdots + 2 \cdot 5^{n-1} + 2 \cdot 5^n = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 1) \ . \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{例}}$ 2 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5 \cdot 3^k\}_{k \geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^{n}(5 \cdot 3^k)$ を計算する.

$\boxed{例}$ 2 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5\cdot 3^k\}_{k\geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ を計算する.

$S=\sum_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5\cdot 3^2+5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+5\cdot 3^6+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n \ .$$

例 2 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5\cdot 3^k\}_{k\geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ を計算する.

$S=\sum_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5\cdot 3^2+5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+5\cdot 3^6+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n \ .$$

等比数列 $\{5\cdot 3^k\}_{k\geq 2}$ の公比は　　である.

$\boxed{\text{例}}$ 2 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5\cdot 3^k\}_{k\geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ を計算する.

$S=\sum_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5\cdot 3^2 + 5\cdot 3^3 + 5\cdot 3^4 + 5\cdot 3^5 + 5\cdot 3^6 + \cdots + 5\cdot 3^{n-1} + 5\cdot 3^n \ .$$

等比数列 $\{5\cdot 3^k\}_{k\geq 2}$ の公比は 3 である. この公比 3 を両辺に掛ける:

$$3S = 5\cdot 3^3 + 5\cdot 3^4 + 5\cdot 3^5 + 5\cdot 3^6 + 5\cdot 3^7 + \cdots + 5\cdot 3^n + 5\cdot 3^{n+1} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 2 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5\cdot 3^k\}_{k\geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ を計算する.

$S=\sum_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ とおく.

$$S = 5\cdot 3^2+5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+5\cdot 3^6+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n \ .$$

等比数列 $\{5\cdot 3^k\}_{k\geq 2}$ の公比は 3 である. この公比 3 を両辺に掛ける：

$$3S = 5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+5\cdot 3^6+5\cdot 3^7+\cdots+5\cdot 3^n+5\cdot 3^{n+1} \ .$$

$3S$ から S を引く：

$$\begin{array}{rrcl} & 3S & = & \phantom{5\cdot 3^2+{}} 5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n+5\cdot 3^{n+1} \\ -) & S & = & 5\cdot 3^2+5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n \\ \hline & 2S & = & -5\cdot 3^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +5\cdot 3^{n+1} \end{array}$$

つまり $2S=-5\cdot 3^2+5\cdot 3^{n+1}=5\cdot 3^{n+1}-45$.

$\boxed{\text{例}}$ 2 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{5\cdot 3^k\}_{k\geq 2}$ の項の総和 $\sum_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ を計算する.

$S=\sum_{k=2}^{n}(5\cdot 3^k)$ とおく.

$$S=5\cdot 3^2+5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+5\cdot 3^6+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n\ .$$

等比数列 $\{5\cdot 3^k\}_{k\geq 2}$ の公比は 3 である. この公比 3 を両辺に掛ける:

$$3S=5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+5\cdot 3^6+5\cdot 3^7+\cdots+5\cdot 3^n+5\cdot 3^{n+1}\ .$$

$3S$ から S を引く:

$$\begin{array}{rrcl}
 & 3S & = & \qquad\qquad\quad 5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n+5\cdot 3^{n+1} \\
-) & S & = & 5\cdot 3^2+5\cdot 3^3+5\cdot 3^4+5\cdot 3^5+\cdots+5\cdot 3^{n-1}+5\cdot 3^n \\
\hline
 & 2S & = & -5\cdot 3^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +5\cdot 3^{n+1}
\end{array}$$

つまり $2S=-5\cdot 3^2+5\cdot 3^{n+1}=5\cdot 3^{n+1}-45$. よって $S=\dfrac{5\cdot 3^{n+1}-45}{2}$. 故に $\sum_{k=0}^{n}(5\cdot 3^k)=\dfrac{5\cdot 3^{n+1}-45}{2}$. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}1.5.3}$ 3 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{8\cdot 5^k\}_{k\geq 3}$ の項の総和 $\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S=\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)$ とおく. 等比数列 $\{8\cdot 5^k\}_{k\geq 3}$ の公比は　　である.

$$S=8\cdot 5^3+8\cdot 5^4+8\cdot 5^5+8\cdot 5^6+\cdots+8\cdot 5^{n-1}+8\cdot 5^n\ ,$$

$$S=8\cdot\quad+8\cdot\quad+8\cdot\quad+8\cdot\quad+\cdots+8\cdot\quad+8\cdot\qquad.$$

から　　を引くと $4S=$　　　　　　　　なので,

$$S=$$

よって $\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)=$

$\boxed{問 1.5.3}$ 3 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{8\cdot 5^k\}_{k\geq 3}$ の項の総和 $\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S=\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)$ とおく. 等比数列 $\{8\cdot 5^k\}_{k\geq 3}$ の公比は 5 である.

$$S=8\cdot 5^3+8\cdot 5^4+8\cdot 5^5+8\cdot 5^6+\cdots+8\cdot 5^{n-1}+8\cdot 5^n\ ,$$

$$5S=8\cdot \quad +8\cdot \quad +8\cdot \quad +8\cdot \quad +\cdots+8\cdot \quad +8\cdot \qquad .$$

から を引くと $4S=$ なので,

$$S=$$

よって $\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)=$

$\boxed{問1.5.3}$ 3 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{8\cdot 5^k\}_{k\geq 3}$ の項の総和 $\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S=\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)$ とおく. 等比数列 $\{8\cdot 5^k\}_{k\geq 3}$ の公比は 5 である.

$$S=8\cdot 5^3+8\cdot 5^4+8\cdot 5^5+8\cdot 5^6+\cdots+8\cdot 5^{n-1}+8\cdot 5^n ,$$

$$5S=8\cdot 5^4+8\cdot 5^5+8\cdot 5^6+8\cdot 5^7+\cdots+8\cdot 5^n+8\cdot 5^{n+1} .$$

$5S$ から S を引くと $4S=$ なので,

$$S=$$

よって $\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)=$

$\boxed{問1.5.3}$ 3 以上の各自然数 n に対して等比数列 $\{8\cdot 5^k\}_{k\geq 3}$ の項の総和 $\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)$ を計算せよ.

$S=\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)$ とおく. 等比数列 $\{8\cdot 5^k\}_{k\geq 3}$ の公比は 5 である.

$$S=8\cdot 5^3+8\cdot 5^4+8\cdot 5^5+8\cdot 5^6+\cdots+8\cdot 5^{n-1}+8\cdot 5^n\ ,$$

$$5S=8\cdot 5^4+8\cdot 5^5+8\cdot 5^6+8\cdot 5^7+\cdots+8\cdot 5^n+8\cdot 5^{n+1}\ .$$

$5S$ から S を引くと $4S=8\cdot 5^{n+1}-8\cdot 5^3$ なので,

$$S=2\cdot 5^{n+1}-2\cdot 5^3=2\cdot 5^{n+1}-250\ .$$

よって $\sum_{k=3}^{n}(8\cdot 5^k)=2\cdot 5^{n+1}-250$. $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 各自然数 n に対して等比数列 $\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}_{k\geq 0}$ の項の総和 $\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する.

$\boxed{例}$ 各自然数 n に対して等比数列 $\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}_{k\geq 0}$ の項の総和 $\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する.

$S=\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ とおく：

$$S = 3+3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}+3\left(\frac{5}{7}\right)^n \ .$$

$\boxed{例}$ 各自然数 n に対して等比数列 $\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}_{k\geq 0}$ の項の総和 $\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する.

$S=\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ とおく:

$$S = 3+3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}+3\left(\frac{5}{7}\right)^n \ .$$

この等式の両辺に等比数列 $\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}_{k\geq 0}$ の公比 $\frac{5}{7}$ を掛ける:

$$\frac{5}{7}S = 3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+3\left(\frac{5}{7}\right)^4+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^n+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} \ .$$

$\boxed{例}$ 各自然数 n に対して等比数列 $\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}_{k\geq 0}$ の項の総和 $\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ を計算する.

$S=\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}$ とおく：

$$S = 3+3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n-1}+3\left(\frac{5}{7}\right)^n \ .$$

この等式の両辺に等比数列 $\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\}_{k\geq 0}$ の公比 $\frac{5}{7}$ を掛ける：

$$\frac{5}{7}S = 3\cdot\frac{5}{7}+3\left(\frac{5}{7}\right)^2+3\left(\frac{5}{7}\right)^3+3\left(\frac{5}{7}\right)^4+\cdots+3\left(\frac{5}{7}\right)^n+3\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} \ .$$

S から $\frac{5}{7}S$ を引く.

S から $\dfrac{5}{7}S$ を引く.

$$
\begin{array}{rrl}
 & S & = 3 + 3 \cdot \dfrac{5}{7} + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^n \\
-) & \dfrac{5}{7}S & = \phantom{3 +{}} 3 \cdot \dfrac{5}{7} + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^n + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n+1} \\
\hline
 & \dfrac{2}{7}S & = 3 - 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n+1}
\end{array}
$$

つまり $\dfrac{2}{7}S = 3 - 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n+1}$.

S から $\dfrac{5}{7}S$ を引く.

$$
\begin{array}{rrl}
 & S & = 3+3\cdot\dfrac{5}{7}+3\left(\dfrac{5}{7}\right)^2+3\left(\dfrac{5}{7}\right)^3+3\left(\dfrac{5}{7}\right)^4+\cdots+3\left(\dfrac{5}{7}\right)^n \\
-\,) & \dfrac{5}{7}S & = \phantom{3+{}}3\cdot\dfrac{5}{7}+3\left(\dfrac{5}{7}\right)^2+3\left(\dfrac{5}{7}\right)^3+3\left(\dfrac{5}{7}\right)^4+\cdots+3\left(\dfrac{5}{7}\right)^n+3\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n+1} \\
\hline
 & \dfrac{2}{7}S & = 3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -3\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n+1}
\end{array}
$$

つまり $\dfrac{2}{7}S=3-3\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n+1}$. 両辺に $\dfrac{7}{2}$ を掛けて

$$
S=3\cdot\frac{7}{2}-3\cdot\frac{7}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}=\frac{21}{2}-3\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^{n}=\frac{21}{2}-\frac{15}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^{n} .
$$

S から $\dfrac{5}{7}S$ を引く.

$$
\begin{array}{rrl}
 & S & = 3 + 3 \cdot \dfrac{5}{7} + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^n \\
-) & \dfrac{5}{7}S & = \qquad 3 \cdot \dfrac{5}{7} + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^2 + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^3 + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^4 + \cdots + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^n + 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n+1} \\
\hline
 & \dfrac{2}{7}S & = 3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n+1}
\end{array}
$$

つまり $\dfrac{2}{7}S = 3 - 3\left(\dfrac{5}{7}\right)^{n+1}$. 両辺に $\dfrac{7}{2}$ を掛けて

$$
S = 3 \cdot \frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{7}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} = \frac{21}{2} - 3 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7}\left(\frac{5}{7}\right)^n = \frac{21}{2} - \frac{15}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^n .
$$

故に $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left\{3\left(\frac{5}{7}\right)^k\right\} = \frac{21}{2} - \frac{15}{2}\left(\frac{5}{7}\right)^n$. 終

$\boxed{問1.5.4}$ 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算せよ.

$S = \sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ とおく.

$S = 4\cdot\frac{3}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \cdots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n$,

$\frac{3}{5}S =$.

S から $\frac{3}{5}S$ を引くと $\frac{2}{5}S =$ なので,

$S =$

つまり $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} =$

$\boxed{問 1.5.4}$ 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算せよ.

$S = \sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ とおく.

$$S = 4\cdot\frac{3}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \cdots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n ,$$

$$\frac{3}{5}S = 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^5 + \cdots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} .$$

S から $\frac{3}{5}S$ を引くと $\frac{2}{5}S =$ なので,

$S =$

つまり $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} =$

$\boxed{\text{問}1.5.4}$ 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算せよ.

$S = \sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ とおく.

$$S = 4\cdot\frac{3}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + \cdots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n ,$$

$$\frac{3}{5}S = 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^4 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^5 + \cdots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} .$$

S から $\frac{3}{5}S$ を引くと $\frac{2}{5}S = 4\cdot\frac{3}{5} - 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$ なので,

$$S = 4\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{2} - 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\frac{5}{2} = 6 - 10\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = 6 - 10\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n = 6 - 6\left(\frac{3}{5}\right)^n .$$

つまり $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\} = 6 - 6\left(\frac{3}{5}\right)^n$. $\boxed{\text{終}}$

定数 r について $r \neq 1$ とする．最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく：

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad .$$

定数 r について $r \neq 1$ とする．最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく：

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \ .$$

この等式の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \ .$$

定数 r について $r \neq 1$ とする．最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく：

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \ .$$

この等式の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \ .$$

S_n から rS_n を引くと，

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ &\qquad - (ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n) \\ &= a - ar^n \ , \end{aligned}$$

定数 r について $r \neq 1$ とする．最初の項が a で公比が r である等比数列の初め n 個の項の総和を S_n とおく：

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \quad .$$

この等式の両辺に公比 r を掛けると

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \quad .$$

S_n から rS_n を引くと，

$$\begin{aligned} S_n - rS_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} \\ &\qquad - (ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n) \\ &= a - ar^n \quad , \end{aligned}$$

よって $(1-r)S_n = a(1-r^n)$ なので， $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ ．

$r=1$ のとき,

$$\begin{aligned} a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} &= \underbrace{a+a+a+a+a+\cdots+a+a}_{n\text{ 個の }a\text{ の和}} \\ &= an\ . \end{aligned}$$

$r=1$ のとき,

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} = \underbrace{a+a+a+a+a+\cdots+a+a}_{n\text{ 個の }a\text{ の和}}$$

$$= an\ .$$

定理　正の各自然数 n に対して，最初の項が a で公比が r である等比数列の初めの n 個の項の総和は，$r \neq 1$ のとき

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}\ ,$$

$r=1$ のとき

$$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1} = an\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の各自然数 n に対して，初項が 5 で 公比が 3 である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和を計算する.

例 正の各自然数 n に対して，初項が 5 で 公比が 3 である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和を計算する.

$$5+5\cdot3+5\cdot3^2+5\cdot3^3+\cdots+5\cdot3^{n-1}=\frac{5(3^n-1)}{3-1}=\frac{5}{2}(3^n-1)\ .$$

終

$$a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$\boxed{例}$ 正の各自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する.

例 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する.

総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ は初項が $4\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{12}{5}$ であり公比が $\frac{3}{5}$ である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和なので,

$\boxed{\text{例}}$ 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する.

総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ は初項が $4\left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{12}{5}$ であり公比が $\frac{3}{5}$ である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和なので,

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} = 4\cdot\frac{3}{5} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \cdots + 4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の各自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する.

総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ は初項が $4\left(\dfrac{3}{5}\right)^1=\dfrac{12}{5}$ であり公比が $\dfrac{3}{5}$ である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和なので,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}&=4\cdot\frac{3}{5}+4\left(\frac{3}{5}\right)^2+4\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots+4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+4\left(\frac{3}{5}\right)^n\\&=\frac{12}{5}+\frac{12}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^1+\frac{12}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+\frac{12}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}+\frac{12}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ を計算する.

総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^k\right\}$ は初項が $4\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{12}{5}$ であり公比が $\frac{3}{5}$ である等比数列の初項から第 n 項までの n 個の項の総和なので,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left\{4\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\} &= 4\cdot\frac{3}{5}+4\left(\frac{3}{5}\right)^2+4\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots+4\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+4\left(\frac{3}{5}\right)^n \\
&= \frac{12}{5}+\frac{12}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^1+\frac{12}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cdots+\frac{12}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}+\frac{12}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \\
&= \frac{\frac{12}{5}\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}}{1-\frac{3}{5}} \\
&= 6\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n\right\}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問1.5.5}$ 正の各自然数 n に対して総和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\{6\left(\frac{5}{3}\right)^{k}\right\}$ を計算せよ.

問1.5.5 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{6\left(\frac{5}{3}\right)^{k}\right\}$ を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left\{6\left(\frac{5}{3}\right)^{k}\right\} &= 6\cdot\frac{5}{3}+6\left(\frac{5}{3}\right)^{2}+6\left(\frac{5}{3}\right)^{3}+\cdots+6\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}+6\left(\frac{5}{3}\right)^{n} \\
&= 10+10\left(\frac{5}{3}\right)^{1}+10\left(\frac{5}{3}\right)^{2}+\cdots+10\left(\frac{5}{3}\right)^{n-2}+10\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

$\boxed{問1.5.5}$ 正の各自然数 n に対して総和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{6\left(\frac{5}{3}\right)^k\right\}$ を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left\{6\left(\frac{5}{3}\right)^k\right\} &= 6\cdot\frac{5}{3}+6\left(\frac{5}{3}\right)^2+6\left(\frac{5}{3}\right)^3+\cdots+6\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}+6\left(\frac{5}{3}\right)^n \\
&= 10+10\left(\frac{5}{3}\right)^1+10\left(\frac{5}{3}\right)^2+\cdots+10\left(\frac{5}{3}\right)^{n-2}+10\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{10\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n-1\right\}}{\frac{5}{3}-1} \\
&= 15\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^n-1\right\}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 正の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n$ を計算する.

例 正の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n$ を計算する.

総和

$$\begin{aligned}
&2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n \\
&= 2+2\cdot 5^1+2\cdot 5^2+2\cdot 5^3+2\cdot 5^4+\cdots+2\cdot 5^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k)
\end{aligned}$$

は, 第 0 項が 2 であり公比が 5 である等比数列の第 0 項から第 n 項までの個の項の総和である.

$\boxed{\text{例}}$ 正の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n$ を計算する.

総和

$$\begin{aligned}
&2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n \\
&=2+2\cdot 5^1+2\cdot 5^2+2\cdot 5^3+2\cdot 5^4+\cdots+2\cdot 5^n \\
&=\sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k)
\end{aligned}$$

は, 第 0 項が 2 であり公比が 5 である等比数列の第 0 項から第 n 項までの $(n+1)$ 個の項の総和である.

例 正の各自然数 n に対して等比数列の項の総和 $2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n$ を計算する.

総和

$$\begin{aligned} & 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n \\ =\ & 2+2\cdot 5^1+2\cdot 5^2+2\cdot 5^3+2\cdot 5^4+\cdots+2\cdot 5^n \\ =\ & \sum_{k=0}^{n}(2\cdot 5^k) \end{aligned}$$

は，第 0 項が 2 であり公比が 5 である等比数列の第 0 項から第 n 項までの $(n+1)$ 個の項の総和である.

$$\begin{aligned} 2+10+50+250+1250+\cdots+2\cdot 5^n &= \frac{2(5^{n+1}-1)}{5-1} \\ &= \frac{1}{2}(5^{n+1}-1)\ . \end{aligned}$$

終

$\boxed{問 1.5.6}$ 正の各自然数 n に対して総和 $4 + 12 + 36 + 108 + 324 + \cdots + 4 \cdot 3^n$ を計算せよ.

$\boxed{問1.5.6}$ 正の各自然数 n に対して総和 $4+12+36+108+324+\cdots+4\cdot 3^n$ を計算せよ.

$$
\begin{aligned}
4+12+36+108+324+\cdots+4\cdot 3^n &= \frac{4(3^{n+1}-1)}{3-1} \\
&= 2(3^{n+1}-1) \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$