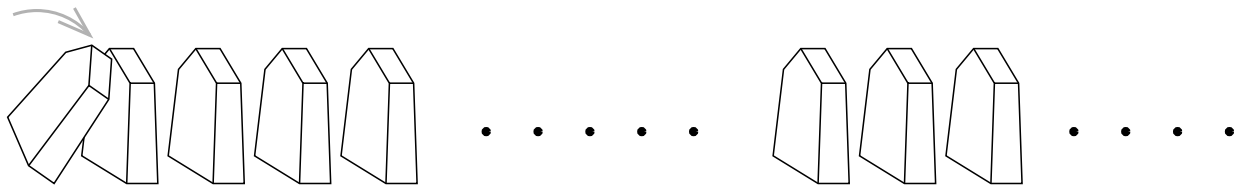


1.6 数学的帰納法

“将棋倒し”という言葉がある。将棋の駒を適切な間隔で一列に並べる。

“将棋倒し”という言葉がある。将棋の駒を適切な間隔で一列に並べる。まず、1番めの駒が倒れるとする。

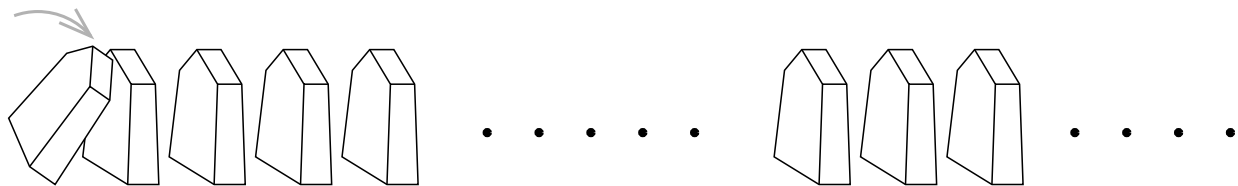
倒れる



1番

“将棋倒し”という言葉がある。将棋の駒を適切な間隔で一列に並べる。まず、1番めの駒が倒れるとする。

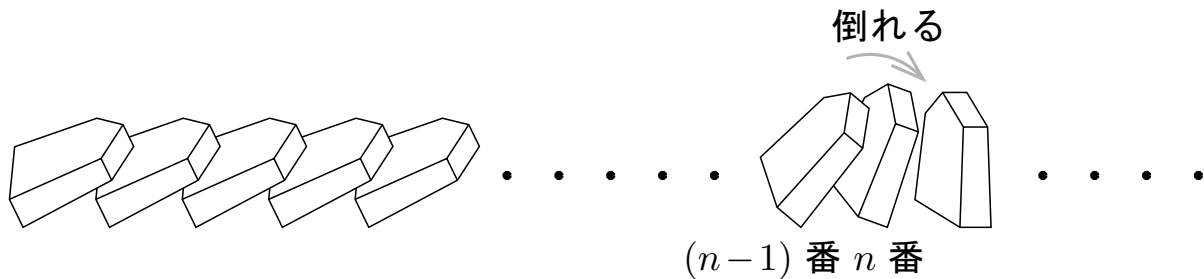
倒れる



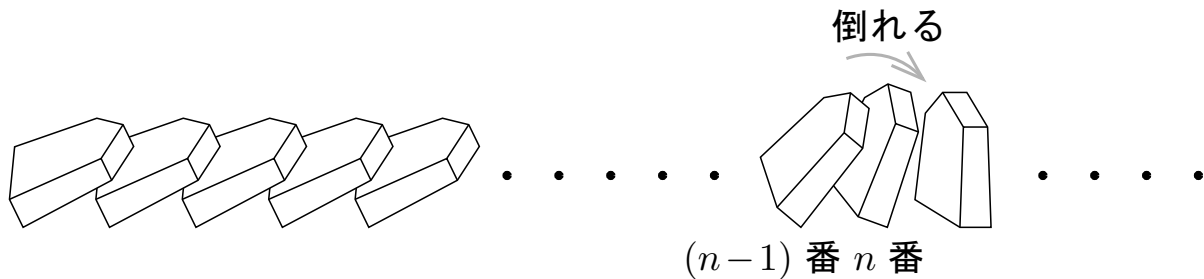
1番

このとき、2番めの駒が倒れて、3番めの駒が倒れて、4番めの駒が倒れて、…と駒が順に倒れていく。

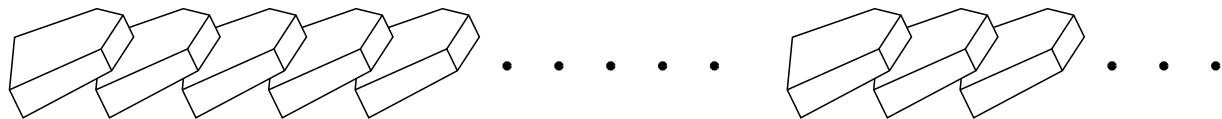
2以上の自然数 n について、 $(n-1)$ 番めの駒が倒れると必ず次の n 番めの駒も倒れるとする。



2以上の自然数 n について、 $(n-1)$ 番めの駒が倒れると必ず次の n 番めの駒も倒れるとする。



このとき、結局総ての駒が倒れる。



つまり、次の2つのことが成り立つとき総ての駒が倒れる：

(1) 1番めの駒が倒れる；

(2) 2以上の各自然数 n について、 $(n-1)$ 番めの駒が倒れると次の n 番めの駒も倒れる。

数学においてこの将棋倒しに似た論法が使われる。

正の自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について、次の2つのことが成り立つとする：

(1) $\mathcal{P}(1)$ である；

(2) 2以上の各自然数 n について、 $\mathcal{P}(n-1)$ であるならば $\mathcal{P}(n)$ である.

この2つのことから、次のようにして、 $\mathcal{P}(2)$ であること、 $\mathcal{P}(3)$ であること、 $\mathcal{P}(4)$ であること、などが導かれる.

$P(1)$ である (条件 (1)) $P(1)$ ならば $P(2)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(2)$ である

$P(2)$ ならば $P(3)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(3)$ である

$P(3)$ ならば $P(4)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(4)$ である

$P(1)$ である (条件 (1)) $P(1)$ ならば $P(2)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(2)$ である

$P(2)$ ならば $P(3)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(3)$ である

$P(3)$ ならば $P(4)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(4)$ である

以下同様にして、 $P(5)$ であること、 $P(6)$ であること、 $P(7)$ であること、 $P(8)$ であること、などが導かれる。

$P(1)$ である (条件 (1)) $P(1)$ ならば $P(2)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(2)$ である

$P(2)$ ならば $P(3)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(3)$ である

$P(3)$ ならば $P(4)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(4)$ である

以下同様にして、 $P(5)$ であること、 $P(6)$ であること、 $P(7)$ であること、 $P(8)$ であること、などが導かれる。結局、任意の正の自然数 n について $P(n)$ である。

$P(1)$ である (条件 (1)) $P(1)$ ならば $P(2)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(2)$ である

$P(2)$ ならば $P(3)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(3)$ である

$P(3)$ ならば $P(4)$ である (条件 (2))

この2つから

$P(4)$ である

以下同様にして、 $P(5)$ であること、 $P(6)$ であること、 $P(7)$ であること、 $P(8)$ であること、などが導かれる。結局、任意の正の自然数 n について $P(n)$ である。

このような推論法を数学的帰納法という。

法則（数学的帰納法） 正の自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について、次の2つのことが成り立つとする：

(1) $\mathcal{P}(1)$ である；

(2) 2以上の各自然数 n について、 $\mathcal{P}(n-1)$ であると仮定すると $\mathcal{P}(n)$ である。

このとき、任意の正の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ である。

自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について, 任意の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ であることを示すためには, 0 から数学的帰納法を始める.

自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について、任意の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ であることを示すためには、0 から数学的帰納法を始める.

法則 (数学的帰納法) 自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について、次の2つのことが成り立つとする:

(1) $\mathcal{P}(0)$ である;

(2) 正の各自然数 n について、 $\mathcal{P}(n-1)$ であると仮定すると $\mathcal{P}(n)$ である.
このとき、任意の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ である.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で、2以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$. 次のことを示す：任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で、2以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$. 次のことを示す：任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$.

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式 $a_n = n^2$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^2$ を示す；
- (2) 2以上の各自然数 n について、漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ を用いて、等式 $a_{n-1} = (n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n = n^2$ を導く.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で、2以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$. 次のことを示す：任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$.

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式 $a_n = n^2$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^2$ を示す；
 - (2) 2以上の各自然数 n について、漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ を用いて、等式 $a_{n-1} = (n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n = n^2$ を導く.
- (1) $a_1 = 1$ なので $a_1 = 1^2$.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で、2以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$. 次のことを示す：任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$.

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式 $a_n = n^2$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^2$ を示す；
- (2) 2以上の各自然数 n について、漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ を用いて、等式 $a_{n-1} = (n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n = n^2$ を導く.

- (1) $a_1 = 1$ なので $a_1 = 1^2$.
- (2) 2以上の自然数 n について、 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ なので、 $a_{n-1} = (n-1)^2$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 .$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で、2以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$. 次のことを示す：任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$.

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式 $a_n = n^2$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^2$ を示す；
- (2) 2以上の各自然数 n について、漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ を用いて、等式 $a_{n-1} = (n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n = n^2$ を導く.

- (1) $a_1 = 1$ なので $a_1 = 1^2$.
- (2) 2以上の自然数 n について、 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ なので、 $a_{n-1} = (n-1)^2$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 .$$

故に、数学的帰納法により、任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$. 終

問1.6.1 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義する: $a_1 = 1$ で, 2 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$. 次のことを示せ: 任意の正の自然数 n について $a_n = n^3$.

数学的帰納法によって示すには次のようにする:

- (1) 等式 $a_n = n^3$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^3$ を示す;
- (2) 2 以上の各自然数 n について, 漸化式 $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$ を用いて, 等式 $a_{n-1} = (n-1)^3$ を仮定して等式 $a_n = n^3$ を導く.

$$a_1 = 1 \text{ なので } a_1 = \quad .$$

2 以上の各自然数 n について, $\quad = \quad$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1 =$$

$=$

$= \quad .$

故に, 数学的帰納法により, 任意の正の自然数 n について $a_n = n^3$.

問1.6.1 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で、2以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$. 次のことを示せ：任意の正の自然数 n について $a_n = n^3$.

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

- (1) 等式 $a_n = n^3$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^3$ を示す；
- (2) 2以上の各自然数 n について、漸化式 $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$ を用いて、等式 $a_{n-1} = (n-1)^3$ を仮定して等式 $a_n = n^3$ を導く.

$$a_1 = 1 \quad \text{なので} \quad a_1 = 1^3 .$$

2以上の各自然数 n について、 $a_{n-1} = (n-1)^3$ と仮定すると

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1 = (n-1)^3 + 3n^2 - 3n + 1 \\ &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 3n^2 - 3n + 1 \\ &= n^3 . \end{aligned}$$

故に、数学的帰納法により、任意の正の自然数 n について $a_n = n^3$.

終

問1.6.2 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 4$ で、2 以上の

任意の自然数 n について $a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1} + 4}$. 次のことを示せ：正の任意の自然

数 n について $a_n = \frac{4}{n}$.

$a_1 = 4$ なので $a_1 = \frac{4}{1}$.

2 以上の自然数 n について、 $a_{n-1} = \frac{4}{n-1}$ と仮定すると

$$a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1} + 4} = \frac{4 \cdot \frac{4}{n-1}}{\frac{4}{n-1} + 4} = \frac{16}{4 + 4(n-1)} = \frac{16}{4n} = \frac{4}{n} .$$

故に、数学的帰納法により、正の任意の自然数 n について $a_n = \frac{4}{n}$.

問1.6.2 数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 4$ で、2 以上の

任意の自然数 n について $a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1} + 4}$. 次のことを示せ：正の任意の自然

数 n について $a_n = \frac{4}{n}$.

$a_1 = 4$ なので $a_1 = \frac{4}{1}$.

2 以上の自然数 n について、 $a_{n-1} = \frac{4}{n-1}$ と仮定すると

$$a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1} + 4} = \frac{4 \cdot \frac{4}{n-1}}{\frac{4}{n-1} + 4} = \frac{\frac{4}{n-1}}{\frac{1}{n-1} + 1} = \frac{4}{1 + n - 1} = \frac{4}{n} .$$

故に、数学的帰納法により、正の任意の自然数 n について $a_n = \frac{4}{n}$. □

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で、正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$. 次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で、正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$. 次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して、不等式 $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$ を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で、正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$. 次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して、不等式 $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$ を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で、正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$. 次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して、不等式 $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$ を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$.

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ と仮定する.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で、正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$. 次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して、不等式 $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$ を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$.

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 ,$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で、正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$. 次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して、不等式 $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$ を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$.

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 ,$$

$$\sqrt{a_{n-1} + 6} > \sqrt{9} = 3 ,$$

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で、正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$. 次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して、不等式 $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$ を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$.

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 ,$$

$$\sqrt{a_{n-1} + 6} > \sqrt{9} = 3 ,$$

$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ なので $a_n > 3$.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で、正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$. 次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して、不等式 $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$ を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$.

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 ,$$

$$\sqrt{a_{n-1} + 6} > \sqrt{9} = 3 ,$$

$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ なので $a_n > 3$. つまり、正の各自然数 n について、 $a_{n-1} > 3$ と仮定すると $a_n > 3$.

例 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で、正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$. 次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して、不等式 $\sqrt{a_{n-1} + 6} > 3$ を導き、 $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$.

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 ,$$

$$\sqrt{a_{n-1} + 6} > \sqrt{9} = 3 ,$$

$a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ なので $a_n > 3$. つまり、正の各自然数 n について、 $a_{n-1} > 3$ と仮定すると $a_n > 3$.

故に、数学的帰納法により、任意の自然数 n に対して $a_n > 3$.

終

問1.6.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$ で、正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$. 次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$.

問1.6.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$ で、正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$. 次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 5$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 5$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 5$ を仮定して、不等式 $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$ を導き、 $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ より不等式 $a_n > 5$ を導く.

問1.6.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$ で、正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$. 次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 5$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 5$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 5$ を仮定して、不等式 $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$ を導き、 $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ より不等式 $a_n > 5$ を導く.

(1) $a_0 = 7$ なので $a_0 > 5$.

問1.6.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$ で、正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$. 次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 5$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 5$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 5$ を仮定して、不等式 $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$ を導き、 $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ より不等式 $a_n > 5$ を導く.

(1) $a_0 = 7$ なので $a_0 > 5$.

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 5$ と仮定する.

問1.6.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$ で、正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$. 次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 5$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 5$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 5$ を仮定して、不等式 $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$ を導き、 $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ より不等式 $a_n > 5$ を導く.

(1) $a_0 = 7$ なので $a_0 > 5$.

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 5$ と仮定する.

$$3a_{n-1} > 3 \cdot 5 = 15 ,$$

$$3a_{n-1} + 10 > 15 + 10 = 25 ,$$

$$\sqrt{3a_{n-1} + 10} > \sqrt{25} = 5 ,$$

$a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ なので $a_n > 5$. つまり、正の各自然数 n について、 $a_{n-1} > 5$ と仮定すると $a_n > 5$.

問1.6.3 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$ で、正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$. 次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$. 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

- (1) 不等式 $a_n > 5$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 5$ を示す；
- (2) 正の各自然数 n について、不等式 $a_{n-1} > 5$ を仮定して、不等式 $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$ を導き、 $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ より不等式 $a_n > 5$ を導く.

(1) $a_0 = 7$ なので $a_0 > 5$.

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 5$ と仮定する.

$$3a_{n-1} > 3 \cdot 5 = 15 ,$$

$$3a_{n-1} + 10 > 15 + 10 = 25 ,$$

$$\sqrt{3a_{n-1} + 10} > \sqrt{25} = 5 ,$$

$a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ なので $a_n > 5$. つまり、正の各自然数 n について、 $a_{n-1} > 5$ と仮定すると $a_n > 5$.

故に、数学的帰納法により、任意の自然数 n に対して $a_n > 5$.

終

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公差 d の等差数列であるとする. 正の自然数 n について $a_n = a_{n-1} + d$. 次のことを数学的帰納法により証明する:

任意の自然数 n について $a_n = a_0 + dn$.

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公差 d の等差数列であるとする. 正の自然数 n について $a_n = a_{n-1} + d$. 次のことを数学的帰納法により証明する:

任意の自然数 n について $a_n = a_0 + dn$.

$d \cdot 0 = 0$ なので $a_0 = a_0 + d \cdot 0$.

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公差 d の等差数列であるとする. 正の自然数 n について $a_n = a_{n-1} + d$. 次のことを数学的帰納法により証明する:

任意の自然数 n について $a_n = a_0 + dn$.

$d \cdot 0 = 0$ なので $a_0 = a_0 + d \cdot 0$.

正の各自然数 n について, $a_n = a_{n-1} + d$ なので, $a_{n-1} = a_0 + d(n-1)$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + d = a_0 + d(n-1) + d = a_0 + dn.$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公差 d の等差数列であるとする. 正の自然数 n について $a_n = a_{n-1} + d$. 次のことを数学的帰納法により証明する:

任意の自然数 n について $a_n = a_0 + dn$.

$d \cdot 0 = 0$ なので $a_0 = a_0 + d \cdot 0$.

正の各自然数 n について, $a_n = a_{n-1} + d$ なので, $a_{n-1} = a_0 + d(n-1)$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + d = a_0 + d(n-1) + d = a_0 + dn.$$

故に, 数学的帰納法により, 任意の自然数 n について $a_n = a_0 + dn$.

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公比 r の等比数列であるとする. 正の自然数 n について $a_n = a_{n-1}r$. 次のことを数学的帰納法により証明する:

任意の自然数 n について $a_n = a_0 r^n$.

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公比 r の等比数列であるとする. 正の自然数 n について $a_n = a_{n-1}r$. 次のことを数学的帰納法により証明する:

任意の自然数 n について $a_n = a_0 r^n$.

$r^0 = 1$ なので $a_0 = a_0 r^0$.

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公比 r の等比数列であるとする. 正の自然数 n について $a_n = a_{n-1}r$. 次のことを数学的帰納法により証明する:

任意の自然数 n について $a_n = a_0 r^n$.

$r^0 = 1$ なので $a_0 = a_0 r^0$.

正の各自然数 n について, $a_n = a_{n-1}r$ なので, $a_{n-1} = a_0 r^{n-1}$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1}r = a_0 r^{n-1} \cdot r = a_0 r^n.$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が公比 r の等比数列であるとする. 正の自然数 n について $a_n = a_{n-1}r$. 次のことを数学的帰納法により証明する:

任意の自然数 n について $a_n = a_0 r^n$.

$r^0 = 1$ なので $a_0 = a_0 r^0$.

正の各自然数 n について, $a_n = a_{n-1}r$ なので, $a_{n-1} = a_0 r^{n-1}$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1}r = a_0 r^{n-1} \cdot r = a_0 r^n.$$

故に, 数学的帰納法により, 任意の自然数 n について $a_n = a_0 r^n$.

なお、数学的帰納法は帰納法ではなくて演繹法である.