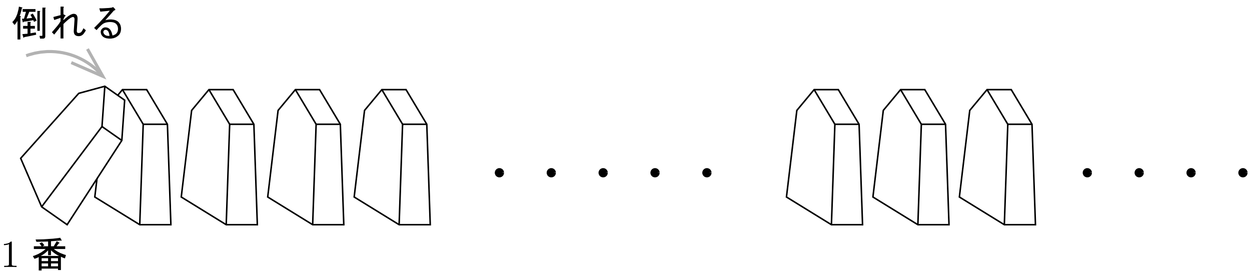
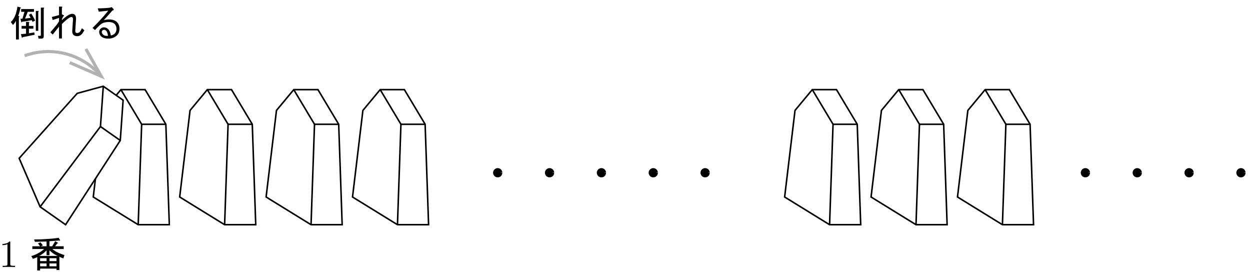
1.6 数学的帰納法

“将棋倒し” という言葉がある. 将棋の駒を適切な間隔で一列に並べる.

“将棋倒し” という言葉がある．将棋の駒を適切な間隔で一列に並べる．まず，1 番めの駒が倒れるとする．

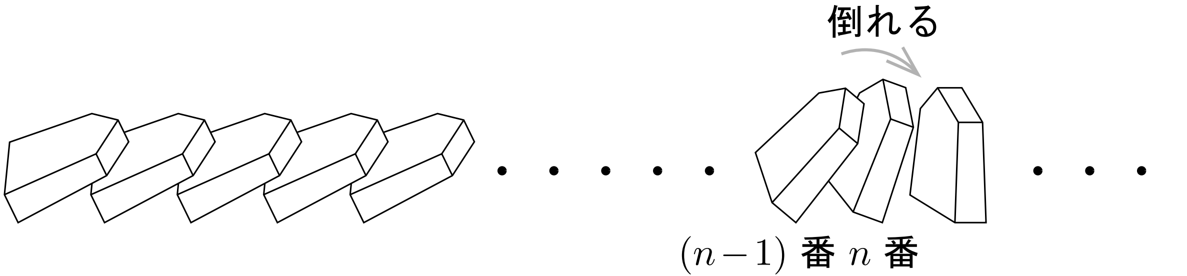


“将棋倒し” という言葉がある．将棋の駒を適切な間隔で一列に並べる．まず，1 番めの駒が倒れるとする．

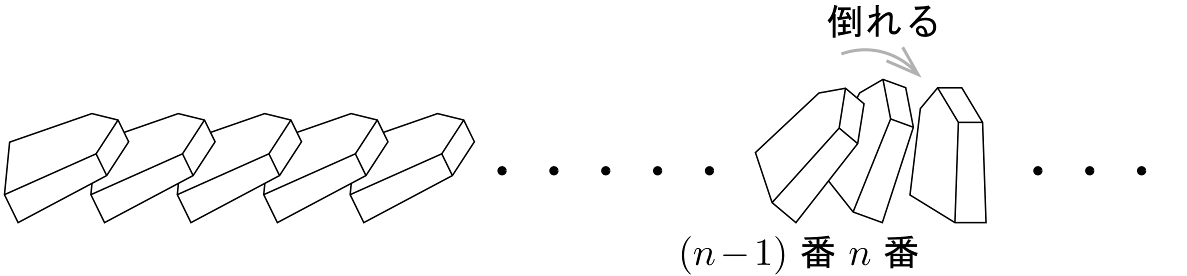


このとき，2 番めの駒が倒れて，3 番めの駒が倒れて，4 番めの駒が倒れて，$\cdots$ と駒が順に倒れていく．

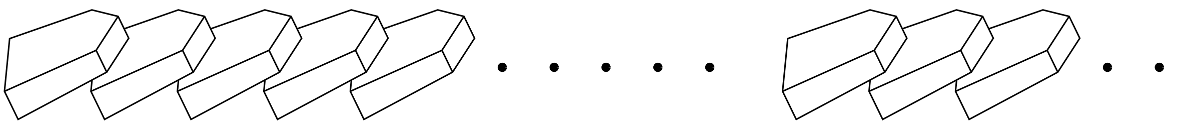
2 以上の自然数 n について，$(n-1)$ 番めの駒が倒れると必ず次の n 番めの駒も倒れるとする．



2 以上の自然数 n について，$(n-1)$ 番めの駒が倒れると必ず次の n 番めの駒も倒れるとする．



このとき，結局総ての駒が倒れる．



つまり，次の **2** つのことが成り立つとき総ての駒が倒れる：

(1)　1 番めの駒が倒れる；

(2)　2 以上の各自然数 n について，$(n-1)$ 番めの駒が倒れると次の n 番めの駒も倒れる．

　数学においてこの将棋倒しに似た論法が使われる．

正の自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，次の **2** つのことが成り立つとする：

(1) $\mathcal{P}(1)$ である；

(2) 2 以上の各自然数 n について，$\mathcal{P}(n-1)$ であるならば $\mathcal{P}(n)$ である.

この **2** つのことから，次のようにして，$\mathcal{P}(2)$ であること，$\mathcal{P}(3)$ であること，$\mathcal{P}(4)$ であること，などが導かれる.

$\mathcal{P}(1)$ である（条件 **(1)**）　$\mathcal{P}(1)$ ならば $\mathcal{P}(2)$ である（条件 **(2)**）

この 2 つから

$\mathcal{P}(2)$ である　　$\mathcal{P}(2)$ ならば $\mathcal{P}(3)$ である（条件 **(2)**）

この 2 つから

$\mathcal{P}(3)$ である　$\mathcal{P}(3)$ ならば $\mathcal{P}(4)$ である（条件 **(2)**）

この 2 つから

$\mathcal{P}(4)$ である

$\mathcal{P}(1)$ である(条件 **(1)**)　$\mathcal{P}(1)$ ならば $\mathcal{P}(2)$ である(条件 **(2)**)

この 2 つから

$\mathcal{P}(2)$ である　$\mathcal{P}(2)$ ならば $\mathcal{P}(3)$ である(条件 **(2)**)

この 2 つから

$\mathcal{P}(3)$ である　$\mathcal{P}(3)$ ならば $\mathcal{P}(4)$ である(条件 **(2)**)

この 2 つから

$\mathcal{P}(4)$ である

以下同様にして，$\mathcal{P}(5)$ であること，$\mathcal{P}(6)$ であること，$\mathcal{P}(7)$ であること，$\mathcal{P}(8)$ であること，などが導かれる.

$\mathcal{P}(1)$ である（条件 **(1)**）　$\mathcal{P}(1)$ ならば $\mathcal{P}(2)$ である（条件 **(2)**）

この 2 つから

$\mathcal{P}(2)$ である　　$\mathcal{P}(2)$ ならば $\mathcal{P}(3)$ である（条件 **(2)**）

この 2 つから

$\mathcal{P}(3)$ である　　$\mathcal{P}(3)$ ならば $\mathcal{P}(4)$ である（条件 **(2)**）

この 2 つから

$\mathcal{P}(4)$ である

以下同様にして，$\mathcal{P}(5)$ であること，$\mathcal{P}(6)$ であること，$\mathcal{P}(7)$ であること，$\mathcal{P}(8)$ であること，などが導かれる．結局，任意の正の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ である．

$\mathcal{P}(1)$ である（条件 **(1)**）　$\mathcal{P}(1)$ ならば $\mathcal{P}(2)$ である（条件 **(2)**）

この 2 つから

$\mathcal{P}(2)$ である　　$\mathcal{P}(2)$ ならば $\mathcal{P}(3)$ である（条件 **(2)**）

この 2 つから

$\mathcal{P}(3)$ である　　$\mathcal{P}(3)$ ならば $\mathcal{P}(4)$ である（条件 **(2)**）

この 2 つから

$\mathcal{P}(4)$ である

以下同様にして，$\mathcal{P}(5)$ であること，$\mathcal{P}(6)$ であること，$\mathcal{P}(7)$ であること，$\mathcal{P}(8)$ であること，などが導かれる．結局，任意の正の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ である．

　このような推論法を数学的帰納法という．

法則 （数学的帰納法）　正の自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，次の **2** つのことが成り立つとする：

(1)　$\mathcal{P}(1)$ である；

(2)　2 以上の各自然数 n について，$\mathcal{P}(n-1)$ であると仮定すると $\mathcal{P}(n)$ である．

このとき，任意の正の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ である．

自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，任意の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ であることを示すためには，0 から数学的帰納法を始める.

自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，任意の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ であることを示すためには，0 から数学的帰納法を始める.

法則（数学的帰納法） 自然数 n に関する条件 $\mathcal{P}(n)$ について，次の **2** つのことが成り立つとする：

(1) $\mathcal{P}(0)$ である；

(2) 正の各自然数 n について，$\mathcal{P}(n-1)$ であると仮定すると $\mathcal{P}(n)$ である.

このとき，任意の自然数 n について $\mathcal{P}(n)$ である.

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で，2 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ ．次のことを示す：任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$ ．

例 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で，2 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ ． 次のことを示す：任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$ ．

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

(1) 等式 $a_n = n^2$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^2$ を示す；

(2) 2 以上の各自然数 n について，漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ を用いて，等式 $a_{n-1} = (n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n = n^2$ を導く．

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で，2 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ ．次のことを示す：任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$ ．

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

(1) 等式 $a_n = n^2$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^2$ を示す；

(2) 2 以上の各自然数 n について，漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ を用いて，等式 $a_{n-1} = (n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n = n^2$ を導く.

(1) $a_1 = 1$ なので $a_1 = 1^2$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する： $a_1 = 1$ で，2 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ ．次のことを示す：任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$ ．

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

(1) 等式 $a_n = n^2$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^2$ を示す；

(2) 2 以上の各自然数 n について，漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ を用いて，等式 $a_{n-1} = (n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n = n^2$ を導く．

(1) $a_1 = 1$ なので $a_1 = 1^2$ ．

(2) 2 以上の自然数 n について，$a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ なので，$a_{n-1} = (n-1)^2$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する：$a_1 = 1$ で，2 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ ．次のことを示す：任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$ ．

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

(1) 等式 $a_n = n^2$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^2$ を示す；

(2) 2 以上の各自然数 n について，漸化式 $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ を用いて，等式 $a_{n-1} = (n-1)^2$ を仮定して等式 $a_n = n^2$ を導く.

(1) $a_1 = 1$ なので $a_1 = 1^2$ ．

(2) 2 以上の自然数 n について，$a_n = a_{n-1} + 2n - 1$ なので，$a_{n-1} = (n-1)^2$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 = (n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2 \text{ .}$$

故に，数学的帰納法により，任意の正の自然数 n について $a_n = n^2$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 1.6.1}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する: $a_1 = 1$ で，2 以上の各自然数 n について $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$ ．次のことを示せ：任意の正の自然数 n について $a_n = n^3$ ．

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

(1) 等式 $a_n = n^3$ において $n = 1$ とした等式 $a_1 = 1^3$ を示す；

(2) 2 以上の各自然数 n について，漸化式 $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$ を用いて，等式 $a_{n-1} = (n-1)^3$ を仮定して等式 $a_n = n^3$ を導く.

$a_1 = 1$ なので $a_1 =$ ．

2 以上の各自然数 n について，　　$=$ 　　と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1 =$$

$$=$$

$$= \quad .$$

故に，数学的帰納法により，任意の正の自然数 n について $a_n = n^3$ ．

$\boxed{問 1.6.1}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する：$a_1=1$ で，2 以上の各自然数 n について $a_n=a_{n-1}+3n^2-3n+1$ ．次のことを示せ：任意の正の自然数 n について $a_n=n^3$ ．

数学的帰納法によって示すには次のようにする：

(1) 等式 $a_n=n^3$ において $n=1$ とした等式 $a_1=1^3$ を示す；

(2) 2 以上の各自然数 n について，漸化式 $a_n=a_{n-1}+3n^2-3n+1$ を用いて，等式 $a_{n-1}=(n-1)^3$ を仮定して等式 $a_n=n^3$ を導く.

$a_1=1$ なので $a_1=1^3$ ．

2 以上の各自然数 n について，$a_{n-1}=(n-1)^3$ と仮定すると

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+3n^2-3n+1=(n-1)^3+3n^2-3n+1\\&=n^3-3n^2+3n-1+3n^2-3n+1\\&=n^3\ .\end{aligned}$$

故に，数学的帰納法により，任意の正の自然数 n について $a_n=n^3$ ． $\boxed{終}$

$\boxed{問1.6.2}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する：$a_1 = 4$ で，2 以上の任意の自然数 n について $a_n = \dfrac{4a_{n-1}}{a_{n-1}+4}$．次のことを示せ：正の任意の自然数 n について $a_n = \dfrac{4}{n}$．

$a_1 = 4$ なので $a_1 = -$．

2 以上の自然数 n について，$a_{n-1} = \dfrac{4}{n-1}$ と仮定すると

$$a_n = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} = \frac{4}{n}.$$

故に，数学的帰納法により，正の任意の自然数 n について $a_n = \dfrac{4}{n}$．

$\boxed{\text{問}1.6.2}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する: $a_1 = 4$ で，2 以上の任意の自然数 n について $a_n = \dfrac{4a_{n-1}}{a_{n-1}+4}$. 次のことを示せ: 正の任意の自然数 n について $a_n = \dfrac{4}{n}$.

$a_1 = 4$ なので $a_1 = \dfrac{4}{1}$.

2 以上の自然数 n について，$a_{n-1} = \dfrac{4}{n-1}$ と仮定すると

$$a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1}+4} = \frac{4\cdot\dfrac{4}{n-1}}{\dfrac{4}{n-1}+4} = \frac{\dfrac{4}{n-1}}{\dfrac{1}{n-1}+1} = \frac{4}{1+n-1} = \frac{4}{n} .$$

故に，数学的帰納法により，正の任意の自然数 n について $a_n = \dfrac{4}{n}$. 　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{例}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で，正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$ ．

例 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0=4$ で，正の各自然数 n について $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n>3$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n>3$ において $n=0$ とした不等式 $a_0>3$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1}>3$ を仮定して，不等式 $\sqrt{a_{n-1}+6}>3$ を導き， $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ より不等式 $a_n>3$ を導く.

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0=4$ で，正の各自然数 n について $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n>3$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n>3$ において $n=0$ とした不等式 $a_0>3$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1}>3$ を仮定して，不等式 $\sqrt{a_{n-1}+6}>3$ を導き， $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ より不等式 $a_n>3$ を導く.

(1) $a_0=4$ なので $a_0>3$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で，正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n > 3$ において $n=0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して，不等式 $\sqrt{a_{n-1}+6} > 3$ を導き， $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$ ．

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ と仮定する.

例 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0=4$ で，正の各自然数 n について $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n>3$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n>3$ において $n=0$ とした不等式 $a_0>3$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1}>3$ を仮定して，不等式 $\sqrt{a_{n-1}+6}>3$ を導き， $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ より不等式 $a_n>3$ を導く．

(1) $a_0=4$ なので $a_0>3$ ．

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1}>3$ と仮定する．

$$a_{n-1}+6>3+6=9\ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で，正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して，不等式 $\sqrt{a_{n-1}+6} > 3$ を導き， $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$ ．

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 \ ,$$

$$\sqrt{a_{n-1}+6} > \sqrt{9} = 3 \ ,$$

$\boxed{例}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で，正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して，不等式 $\sqrt{a_{n-1}+6} > 3$ を導き， $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く.

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$ ．

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ と仮定する.

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 \ ,$$

$$\sqrt{a_{n-1}+6} > \sqrt{9} = 3 \ ,$$

$a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ なので $a_n > 3$ ．

$\boxed{例}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する：$a_0=4$ で，正の各自然数 n について $a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n>3$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n>3$ において $n=0$ とした不等式 $a_0>3$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1}>3$ を仮定して，不等式 $\sqrt{a_{n-1}+6}>3$ を導き，$a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ より不等式 $a_n>3$ を導く．

(1) $a_0=4$ なので $a_0>3$ ．

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1}>3$ と仮定する．

$$a_{n-1}+6>3+6=9\ ,$$

$$\sqrt{a_{n-1}+6}>\sqrt{9}=3\ ,$$

$a_n=\sqrt{a_{n-1}+6}$ なので $a_n>3$ ．つまり，正の各自然数 n について，$a_{n-1}>3$ と仮定すると $a_n>3$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 4$ で，正の各自然数 n について $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ ．次のことを示す：任意の自然数 n について $a_n > 3$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n > 3$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 3$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1} > 3$ を仮定して，不等式 $\sqrt{a_{n-1}+6} > 3$ を導き， $a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ より不等式 $a_n > 3$ を導く．

(1) $a_0 = 4$ なので $a_0 > 3$ ．

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 3$ と仮定する．

$$a_{n-1} + 6 > 3 + 6 = 9 \ ,$$

$$\sqrt{a_{n-1}+6} > \sqrt{9} = 3 \ ,$$

$a_n = \sqrt{a_{n-1}+6}$ なので $a_n > 3$ ．つまり，正の各自然数 n について，$a_{n-1} > 3$ と仮定すると $a_n > 3$ ．

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して $a_n > 3$ ． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 1.6.3}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$ で，正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ ．次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$ ．

$\boxed{\text{問}1.6.3}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する：$a_0 = 7$ で，正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1}+10}$ ．次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n > 5$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 5$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1} > 5$ を仮定して，不等式 $\sqrt{3a_{n-1}+10} > 5$ を導き，$a_n = \sqrt{3a_{n-1}+10}$ より不等式 $a_n > 5$ を導く．

$\boxed{問 1.6.3}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する：$a_0 = 7$ で，正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1}+10}$ ．次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n > 5$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 5$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1} > 5$ を仮定して，不等式 $\sqrt{3a_{n-1}+10} > 5$ を導き，$a_n = \sqrt{3a_{n-1}+10}$ より不等式 $a_n > 5$ を導く.

(1) $a_0 = 7$ なので $a_0 > 5$ ．

$\boxed{問1.6.3}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0 = 7$ で，正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1}+10}$ ．次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$ ． 数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n > 5$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 5$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1} > 5$ を仮定して，不等式 $\sqrt{3a_{n-1}+10} > 5$ を導き， $a_n = \sqrt{3a_{n-1}+10}$ より不等式 $a_n > 5$ を導く.

(1) $a_0 = 7$ なので $a_0 > 5$ ．

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 5$ と仮定する.

$\boxed{問 1.6.3}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する：$a_0 = 7$ で，正の各自然数 n に対して $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ ．次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n > 5$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n > 5$ において $n = 0$ とした不等式 $a_0 > 5$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1} > 5$ を仮定して，不等式 $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > 5$ を導き，$a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ より不等式 $a_n > 5$ を導く．

(1) $a_0 = 7$ なので $a_0 > 5$ ．

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1} > 5$ と仮定する．

$$3a_{n-1} > 3 \cdot 5 = 15 \ ,$$

$$3a_{n-1} + 10 > 15 + 10 = 25 \ ,$$

$$\sqrt{3a_{n-1} + 10} > \sqrt{25} = 5 \ ,$$

$a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ なので $a_n > 5$ ．つまり，正の各自然数 n について，$a_{n-1} > 5$ と仮定すると $a_n > 5$ ．

$\boxed{問1.6.3}$ 数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ を次のように帰納的に定義する： $a_0=7$ で，正の各自然数 n に対して $a_n=\sqrt{3a_{n-1}+10}$ ．次のことを示せ：任意の自然数 n に対して $a_n>5$ ．数学的帰納法によって証明するには次のようにする：

(1) 不等式 $a_n>5$ において $n=0$ とした不等式 $a_0>5$ を示す；

(2) 正の各自然数 n について，不等式 $a_{n-1}>5$ を仮定して，不等式 $\sqrt{3a_{n-1}+10}>5$ を導き， $a_n=\sqrt{3a_{n-1}+10}$ より不等式 $a_n>5$ を導く.

(1) $a_0=7$ なので $a_0>5$ ．

(2) 正の自然数 n について $a_{n-1}>5$ と仮定する.

$$3a_{n-1}>3\cdot 5=15\ ,$$

$$3a_{n-1}+10>15+10=25\ ,$$

$$\sqrt{3a_{n-1}+10}>\sqrt{25}=5\ ,$$

$a_n=\sqrt{3a_{n-1}+10}$ なので $a_n>5$ ．つまり，正の各自然数 n について，$a_{n-1}>5$ と仮定すると $a_n>5$ ．

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して $a_n>5$ ． $\boxed{終}$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公差 d の等差数列であるとする．正の自然数 n について $a_n = a_{n-1} + d$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

$$\text{任意の自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 + dn \ .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公差 d の等差数列であるとする．正の自然数 n について $a_n = a_{n-1} + d$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

$$\text{任意の自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 + dn \text{ ．}$$

$d \cdot 0 = 0$ なので $a_0 = a_0 + d \cdot 0$ ．

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公差 d の等差数列であるとする．正の自然数 n について $a_n = a_{n-1} + d$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

$$任意の自然数\ n\ について\quad a_n = a_0 + dn\ .$$

$d \cdot 0 = 0$ なので $a_0 = a_0 + d \cdot 0$ ．

正の各自然数 n について， $a_n = a_{n-1} + d$ なので， $a_{n-1} = a_0 + d(n-1)$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1} + d = a_0 + d(n-1) + d = a_0 + dn\ .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公差 d の等差数列であるとする．正の自然数 n について $a_n = a_{n-1} + d$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

$$\text{任意の自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 + dn \ .$$

$d \cdot 0 = 0$ なので $a_0 = a_0 + d \cdot 0$ ．

正の各自然数 n について，$a_n = a_{n-1} + d$ なので，$a_{n-1} = a_0 + d(n-1)$ と仮定すると

$$a_n \ = \ a_{n-1} + d \ = \ a_0 + d(n-1) + d \ = \ a_0 + dn \ .$$

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 n について $a_n = a_0 + dn$ ．

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公比 r の等比数列であるとする．正の自然数 n について $a_n = a_{n-1}r$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

$$\text{任意の自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 r^n \ .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公比 r の等比数列であるとする．正の自然数 n について $a_n = a_{n-1}r$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

$$\text{任意の自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 r^n \ .$$

$r^0 = 1$ なので $a_0 = a_0 r^0$ ．

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公比 r の等比数列であるとする．正の自然数 n について $a_n = a_{n-1}r$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

$$\text{任意の自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 r^n \ .$$

$r^0 = 1$ なので $a_0 = a_0 r^0$ ．

正の各自然数 n について，$a_n = a_{n-1}r$ なので，$a_{n-1} = a_0 r^{n-1}$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1}r = a_0 r^{n-1} \cdot r = a_0 r^n \ .$$

第 0 項から始まる数列 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ が公比 r の等比数列であるとする．正の自然数 n について $a_n = a_{n-1}r$ ．次のことを数学的帰納法により証明する：

$$\text{任意の自然数 } n \text{ について} \quad a_n = a_0 r^n \ .$$

$r^0 = 1$ なので $a_0 = a_0 r^0$ ．

正の各自然数 n について，$a_n = a_{n-1}r$ なので，$a_{n-1} = a_0 r^{n-1}$ と仮定すると

$$a_n = a_{n-1}r = a_0 r^{n-1} \cdot r = a_0 r^n \ .$$

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 n について $a_n = a_0 r^n$ ．

なお，数学的帰納法は帰納法ではなくて演繹法である.