2.2 関数の連続性

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = x^2$ について, $x \to 3$ のときの極限がどうなるか考える.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = x^2$ について，$x \to 3$ のときの極限がどうなるか考える．x の値を 3 より大きい範囲で 3 に近づけていく：

$$x = 3.1 \quad \text{のとき} \quad \varphi(x) = 3.1^2 = 9.61 \ ,$$
$$x = 3.001 \quad \text{のとき} \quad \varphi(x) = 3.001^2 = 9.006001 \ ,$$
$$x = 3.00001 \quad \text{のとき} \quad \varphi(x) = 3.00001^2 = 9.0000600001 \ ,$$
$$\vdots \ .$$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = x^2$ について，$x \to 3$ のときの極限がどうなるか考える．x の値を 3 より大きい範囲で 3 に近づけていく：

$$x = 3.1 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.1^2 = 9.61 \text{ ,}$$
$$x = 3.001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.001^2 = 9.006001 \text{ ,}$$
$$x = 3.00001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.00001^2 = 9.0000600001 \text{ ,}$$
$$\vdots \quad .$$

x の値を 3 より小さい範囲で 3 に近づけていく：

$$x = 2.9 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.9^2 = 8.41 \text{ ,}$$
$$x = 2.999 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.999^2 = 8.994001 \text{ ,}$$
$$x = 2.99999 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.99999^2 = 8.9999400001 \text{ ,}$$
$$\vdots \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x)=x^2$ について，$x\to 3$ のときの極限がどうなるか考える．x の値を 3 より大きい範囲で 3 に近づけていく：

$$
\begin{aligned}
x=3.1 \ \text{のとき} \quad & \varphi(x)=3.1^2=9.61\ , \\
x=3.001 \ \text{のとき} \quad & \varphi(x)=3.001^2=9.006001\ , \\
x=3.00001 \ \text{のとき} \quad & \varphi(x)=3.00001^2=9.0000600001\ , \\
& \vdots\ .
\end{aligned}
$$

x の値を 3 より小さい範囲で 3 に近づけていく：

$$
\begin{aligned}
x=2.9 \ \text{のとき} \quad & \varphi(x)=2.9^2=8.41\ , \\
x=2.999 \ \text{のとき} \quad & \varphi(x)=2.999^2=8.994001\ , \\
x=2.99999 \ \text{のとき} \quad & \varphi(x)=2.99999^2=8.9999400001\ , \\
& \vdots\ .
\end{aligned}
$$

このように，$x\to 3$ のとき $\varphi(x)$ は 9 に収束する：$\displaystyle\lim_{x\to 3}\varphi(x)=9$ ．この極限値 9 は $\varphi(3)$ の値である：$\varphi(3)=3^2=9$ ．よって $\displaystyle\lim_{x\to 3}\varphi(x)=\varphi(3)$ ． $\boxed{\text{終}}$

関数 f と実数 a とについて，$f(a)$ の値があるとき，つまり a が関数 f の定義域に属すとき，$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ であるのが普通である．このようなとき，a において f は連続であるという．

関数 f と実数 a とについて，$f(a)$ の値があるとき，つまり a が関数 f の定義域に属すとき，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ であるのが普通である．このようなとき，a において f は連続であるという．

定義　関数 f の定義域の実数 a において f が連続であるとは，$x \to a$ のとき $f(x)$ が収束して $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ であることである．

区間 I において関数 f が連続であるとは，I の各実数において f が連続であることである．

関数 f が連続であるとは，f が定義域の各実数において連続であることである．

定理　定数関数は連続である.

例 定数関は連続なので,

$$\lim_{x \to 3} 7 = 7 \ ,$$

$$\lim_{x \to -5} \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{9}{4} \ ,$$

$$\lim_{x \to \frac{5}{3}} \sin 2 = \sin 2 \ .$$

終

定理　冪関数は連続である.

例 冪関数 x^3 は連続なので,

$$\lim_{x \to -2} x^3 = (-2)^3 = -8 \ .$$

冪関数 $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ は連続なので,

$$\lim_{x \to 7} \sqrt{x} = \sqrt{7} \ .$$

定理　指数関数及び対数関数は連続である.

例 指数関数 2^x は連続なので,

$$\lim_{x\to5}2^x = 2^5 = 32 \ .$$

対数関数 $\log_3 x$ は連続なので,

$$\lim_{x\to8}\log_3 x = \log_3 8 \ .$$

終

定理　三角関数及び逆三角関数は連続である.

例 正弦関数 $\sin x$ 及び余弦関数 $\cos : x$ は連続なので,

$$\lim_{x \to 2} \sin x = \sin 2 \ ,$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \cos x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

逆正弦関数 $\sin^{-1} x$ 及び逆正接関数 $\tan^{-1} x$ は連続なので,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \sin^{-1} x = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \ ,$$

$$\lim_{x \to 6} \tan^{-1} x = \tan^{-1} 6 \ .$$

終

このように，“通常”関数 f は定義域に属す実数 a において連続なので，$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ；このとき，極限値 $\lim_{x \to a} f(x)$ は結局 $f(x)$ の x に a を代入した値 $f(a)$ なので，わざわざ極限値を考える意味がない.

このように，“通常”関数 f は定義域に属す実数 a において連続なので，$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ；このとき，極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ は結局 $f(x)$ の x に a を代入した値 $f(a)$ なので，わざわざ極限値を考える意味がない．しかし，前節で述べた関数 $\psi(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ （ $x \neq 2$ ）では，x に 2 を代入できない，つまり $\psi(2)$ の値が無い；このようなときしばしば極限値 $\lim_{x\to 2} \psi(x)$ を考えることが有用になる．