

## 2.2 関数の連続性

**例** 実数全体を定義域とする関数  $\varphi(x) = x^2$  について,  $x \rightarrow 3$  のときの極限がどうなるか考える.

**例** 実数全体を定義域とする関数  $\varphi(x) = x^2$  について,  $x \rightarrow 3$  のときの極限がどうなるか考える.  $x$  の値を 3 より大きい範囲で 3 に近づけていく:

$$x = 3.1 \quad \text{のとき} \quad \varphi(x) = 3.1^2 = 9.61 ,$$

$$x = 3.001 \quad \text{のとき} \quad \varphi(x) = 3.001^2 = 9.006001 ,$$

$$x = 3.00001 \quad \text{のとき} \quad \varphi(x) = 3.00001^2 = 9.0000600001 ,$$

$\vdots$  .

**例** 実数全体を定義域とする関数  $\varphi(x) = x^2$  について,  $x \rightarrow 3$  のときの極限がどうなるか考える.  $x$  の値を 3 より大きい範囲で 3 に近づけていく:

$$x = 3.1 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.1^2 = 9.61 ,$$

$$x = 3.001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.001^2 = 9.006001 ,$$

$$x = 3.00001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.00001^2 = 9.0000600001 ,$$

$\vdots$  .

$x$  の値を 3 より小さい範囲で 3 に近づけていく:

$$x = 2.9 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.9^2 = 8.41 ,$$

$$x = 2.999 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.999^2 = 8.994001 ,$$

$$x = 2.99999 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.99999^2 = 8.9999400001 ,$$

$\vdots$  .

**例** 実数全体を定義域とする関数  $\varphi(x) = x^2$  について、 $x \rightarrow 3$  のときの極限がどうなるか考える。  $x$  の値を 3 より大きい範囲で 3 に近づけていく：

$$x = 3.1 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.1^2 = 9.61 ,$$

$$x = 3.001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.001^2 = 9.006001 ,$$

$$x = 3.00001 \text{ のとき } \varphi(x) = 3.00001^2 = 9.0000600001 ,$$

$\vdots$  .

$x$  の値を 3 より小さい範囲で 3 に近づけていく：

$$x = 2.9 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.9^2 = 8.41 ,$$

$$x = 2.999 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.999^2 = 8.994001 ,$$

$$x = 2.99999 \text{ のとき } \varphi(x) = 2.99999^2 = 8.9999400001 ,$$

$\vdots$  .

このように、 $x \rightarrow 3$  のとき  $\varphi(x)$  は 9 に収束する： $\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = 9$  . この極限值 9 は  $\varphi(3)$  の値である： $\varphi(3) = 3^2 = 9$  . よって  $\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = \varphi(3)$  . 終

関数  $f$  と実数  $a$  について、 $f(a)$  の値があるとき、つまり  $a$  が関数  $f$  の定義域に属するとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  であるのが普通である。このようなとき、 $a$  において  $f$  は連続であるという。

関数  $f$  と実数  $a$  について、 $f(a)$  の値があるとき、つまり  $a$  が関数  $f$  の定義域に属すとき、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  であるのが普通である。このようなとき、 $a$  において  $f$  は連続であるという。

**定義** 関数  $f$  の定義域の実数  $a$  において  $f$  が連続であるとは、 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が収束して  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  であることである。

区間  $I$  において関数  $f$  が連続であるとは、 $I$  の各実数において  $f$  が連続であることである。

関数  $f$  が連続であるとは、 $f$  が定義域の各実数において連続であることである。

定理 定数関数は連続である.

例 定数関は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow 3} 7 = 7 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \left( -\frac{9}{4} \right) = -\frac{9}{4} ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \sin 2 = \sin 2 .$$

終



**定理** 冪関数は連続である.

**例** 冪関数  $x^3$  は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = (-2)^3 = -8 .$$

冪関数  $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x} = \sqrt{7} .$$

**定理** 指数関数及び対数関数は連続である.

**例** 指数関数  $2^x$  は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow 5} 2^x = 2^5 = 32 .$$

対数関数  $\log_3 x$  は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow 8} \log_3 x = \log_3 8 .$$

終

**定理** 三角関数及び逆三角関数は連続である.

**例** 正弦関数  $\sin x$  及び余弦関数  $\cos x$  は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sin x = \sin 2 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

逆正弦関数  $\sin^{-1}x$  及び逆正接関数  $\tan^{-1}x$  は連続なので,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sin^{-1}x = \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \tan^{-1}x = \tan^{-1}6 .$$

終

このように，“通常”関数  $f$  は定義域に属す実数  $a$  において連続なので，

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  ; このとき，極限值  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  は結局  $f(x)$  の  $x$  に  $a$  を代入した値  $f(a)$  なので，わざわざ極限值を考える意味がない.

このように，“通常”関数  $f$  は定義域に属す実数  $a$  において連続なので，

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  ; このとき，極限值  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  は結局  $f(x)$  の  $x$  に  $a$  を代入

した値  $f(a)$  なので，わざわざ極限值を考える意味がない．しかし，前節で述

べた関数  $\psi(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$  ( $x \neq 2$ ) では， $x$  に 2 を代入できない，つま

り  $\psi(2)$  の値が無い；このようなときしばしば極限值  $\lim_{x \rightarrow 2} \psi(x)$  を考えること

が有用になる．