

## 2.4 関数の極限の計算

関数  $f$  及び定数  $a$  について、 $a$  を除く  $f$  の定義域の中で  $a$  に限りなく近づくことができ、

$a$  を除く  $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を  $a$  に限りなく近づけると

$f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づく

とき、 $x$  の値を  $a$  に限りなく近づけると  $f(x)$  は  $c$  に収束する、または、

$x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといひ、次のように書き表す：

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow c .$$

関数  $f$  及び定数  $a$  について、 $a$  を除く  $f$  の定義域の中で  $a$  に限りなく近づくことができ、

$a$  を除く  $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を  $a$  に限りなく近づけると  
 $f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づく

とき、 $x$  の値を  $a$  に限りなく近づけると  $f(x)$  は  $c$  に収束する、または、  
 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといひ、次のように書き表す：

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow c .$$

$x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が定数  $c$  に収束するとき、 $c$  を  $f(x)$  の極限（値）といひ、  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  と書き表す： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  .

関数  $f$  及び定数  $a$  について、 $a$  を除く  $f$  の定義域の中で  $a$  に限りなく近づくことができ、

$a$  を除く  $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を  $a$  に限りなく近づけると  $f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づくとき、 $x$  の値を  $a$  に限りなく近づけると  $f(x)$  は  $c$  に収束する、または、 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといひ、次のように書き表す：

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow c .$$

$x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が定数  $c$  に収束するとき、 $c$  を  $f(x)$  の極限（値）といひ、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  と書き表す： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  .  $a$  が  $f$  の定義域に属すときは  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  であることが多い。

関数  $f$  及び定数  $a$  について、 $a$  を除く  $f$  の定義域の中で  $a$  に限りなく近づくことができ、

$a$  を除く  $f$  の定義域の実数を表す変数  $x$  の値を  $a$  に限りなく近づけると  $f$  の値  $f(x)$  が唯一つの定数  $c$  に限りなく近づくとき、 $x$  の値を  $a$  に限りなく近づけると  $f(x)$  は  $c$  に収束する、または、 $x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  は  $c$  に収束するといひ、次のように書き表す：

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow c .$$

$x \rightarrow a$  のとき  $f(x)$  が定数  $c$  に収束するとき、 $c$  を  $f(x)$  の極限（値）といひ、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  と書き表す： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$  .  $a$  が  $f$  の定義域に属すときは  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  であることが多い。  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  であるとき、 $a$  において  $f$  は連続であるという。

前回扱った極限値の計算では、結局は実数  $a$  における関数  $f$  の連続性

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  を用いて計算した。しかしこれだけでは計算できないときがある；むしろこのようなときにこそ極限値を考える意味がある。

前回扱った極限値の計算では、結局は実数  $a$  における関数  $f$  の連続性

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  を用いて計算した。しかしこれだけでは計算できないときがある；むしろこのようなときにこそ極限値を考える意味がある。

次のことに注意すること：

関数の独立変数  $x$  及び定数  $a$  について、 $x \rightarrow a$  のとき  $x \neq a$  .

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 3$  のときの  $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$  の極限を考える.



**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 3$  のときの  $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$  の極限を考える.

$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$  なので,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  を  $\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}$  に変形できな

い. そこで以下のように計算する.

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 3$  のときの  $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$  の極限を考える.

$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$  なので,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  を  $\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}$  に変形できな

い. そこで以下のように計算する.

$x^2 - 9$  を因数分解すると  $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ .  $x \rightarrow 3$  のとき,  $x \neq 3$  つまり  $x - 3 \neq 0$  なので,

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3 .$$

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 3$  のときの  $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$  の極限を考える.

$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 3 - 3 = 0$  なので,  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  を  $\frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)}$  に変形できな

い. そこで以下のように計算する.

$x^2 - 9$  を因数分解すると  $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$ .  $x \rightarrow 3$  のとき,  $x \neq 3$  つまり  $x - 3 \neq 0$  なので,

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3} = x + 3 .$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6 .$$

**終**

このように、変数  $x$  の整式  $A(x)$ ,  $B(x)$  及び定数  $a$  について  $A(a) = B(a) = 0$  であるとき、因数定理より、整式  $x - a$  が  $A(x)$ ,  $B(x)$  の因数である；

このように、変数  $x$  の整式  $A(x)$ ,  $B(x)$  及び定数  $a$  について

$A(a) = B(a) = 0$  であるとき、因数定理より、整式  $x - a$  が  $A(x)$ ,  $B(x)$  の  
因数である；極限值  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{A(x)}{B(x)}$  を求めるために、分数式  $\frac{A(x)}{B(x)}$  を  $x - a$  で約  
分することが多い。

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 1$  のときの  $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$  の極限を調べる.

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 1$  のときの  $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$  の極限を調べる.

$x \rightarrow 1$  のとき,  $x \neq 1$  より  $x - 1 \neq 0$  なので,

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{x + 4}{x - 3} .$$

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 1$  のときの  $\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$  の極限を調べる.

$x \rightarrow 1$  のとき,  $x \neq 1$  より  $x - 1 \neq 0$  なので,

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x - 3)} = \frac{x + 4}{x - 3} .$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 4}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 4)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x - 3)} = \frac{1 + 4}{1 - 3} = \frac{5}{-2} \\ &= -\frac{5}{2} . \end{aligned}$$

**終**



問2.4.1 変数  $u$  について  $u \rightarrow -2$  のときの  $\frac{u^2 - u - 6}{u + 2}$  の極限を調べよ.

$u \neq -2$  のとき

$$\frac{u^2 - u - 6}{u + 2} = \frac{(\quad)(\quad)}{u + 2} = \quad .$$

よって

$$\lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^2 - u - 6}{u + 2} = \lim_{u \rightarrow -2} (\quad) = \quad = \quad .$$

**問2.4.1** 変数  $u$  について  $u \rightarrow -2$  のときの  $\frac{u^2 - u - 6}{u + 2}$  の極限を調べよ.

$u \neq -2$  のとき

$$\frac{u^2 - u - 6}{u + 2} = \frac{(u + 2)(u - 3)}{u + 2} = u - 3 .$$

よって

$$\lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^2 - u - 6}{u + 2} = \lim_{u \rightarrow -2} (u - 3) = -2 - 3 = -5 .$$

終

問2.4.2 変数  $x$  について  $x \rightarrow 3$  のときの  $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6}$  の極限を調べよ.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\quad}{\quad} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (\quad)}{\lim_{x \rightarrow 3} (\quad)} = \\ &= \quad . \end{aligned}$$

問2.4.2 変数  $x$  について  $x \rightarrow 3$  のときの  $\frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6}$  の極限を調べよ.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x + 1)(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1}{x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)} = \frac{7}{1} \\ &= 7 .\end{aligned}$$

終

**問2.4.3** 変数  $t$  について  $t \rightarrow 1$  のときの  $\frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 2t + 3}$  の極限を調べよ.

$\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 2t + 3) = 2 \neq 0$  なので,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 2t + 3} = \frac{\quad}{\quad} = \quad = \quad .$$

**問2.4.3** 変数  $t$  について  $t \rightarrow 1$  のときの  $\frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 2t + 3}$  の極限を調べよ.

$\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 2t + 3) = 2 \neq 0$  なので,

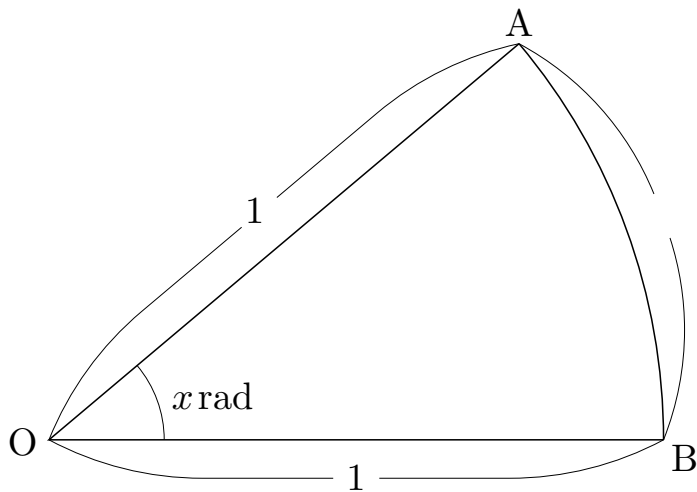
$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 3t + 2}{t^2 - 2t + 3} = \frac{\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 3t + 2)}{\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 - 2t + 3)} = \frac{0}{2} = 0 .$$

終

変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin x}{x}$  の極限を調べる.

変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin x}{x}$  の極限を調べる.

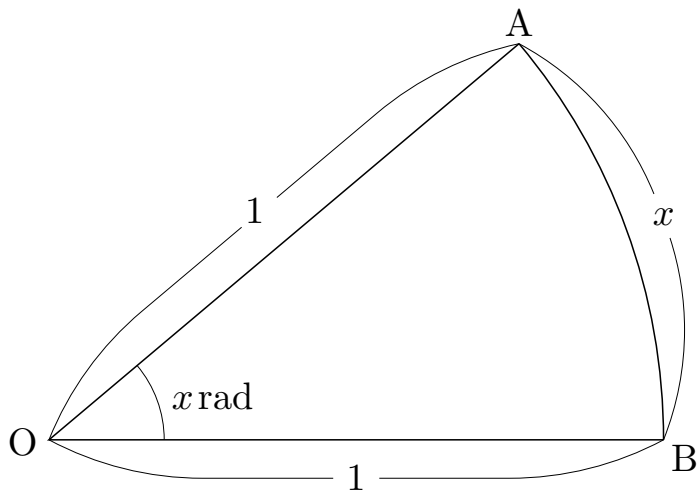
$0 < x < \frac{\pi}{2}$  とする. 右図のように, 点  $O, A, B$  を頂点とする扇形  $OAB$  の半径が  $1$  であり, 中心角  $AOB$  の弧度法による大きさが  $x \text{ rad}$  であるとする. 弧  $AB$  の長さは  $\widehat{AB} =$  .





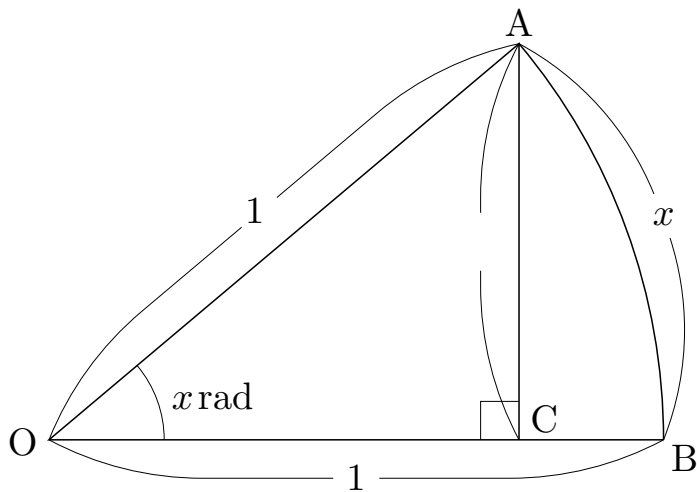
変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin x}{x}$  の極限を調べる.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$  とする. 右図のように, 点  $O, A, B$  を頂点とする扇形  $OAB$  の半径が  $1$  であり, 中心角  $AOB$  の弧度法による大きさが  $x \text{ rad}$  であるとする. 弧  $AB$  の長さは  $\widehat{AB} = x$ .



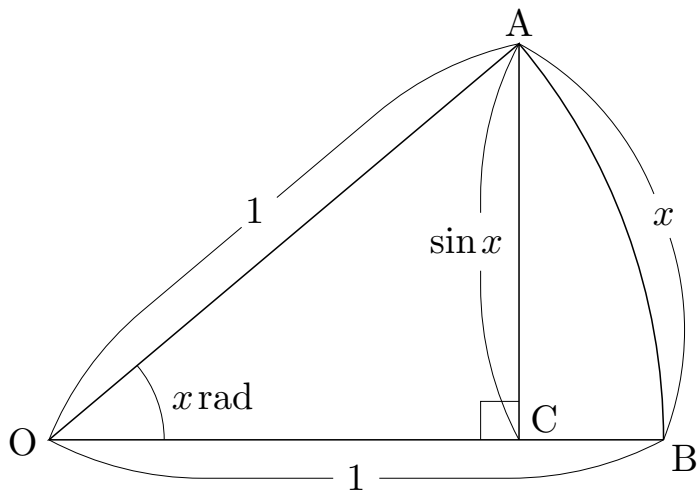
変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin x}{x}$  の極限を調べる.

$0 < x < \frac{\pi}{2}$  とする. 右図のように, 点  $O, A, B$  を頂点とする扇形  $OAB$  の半径が  $1$  であり, 中心角  $AOB$  の弧度法による大きさが  $x \text{ rad}$  であるとする. 弧  $AB$  の長さは  $\widehat{AB} = x$ . 点  $C$  は線分  $OB$  に属し, 直線  $OB$  と直線  $AC$  とは垂直であるとする. 線分  $AC$  の長さは  $\overline{AC} =$  .



変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin x}{x}$  の極限を調べる.

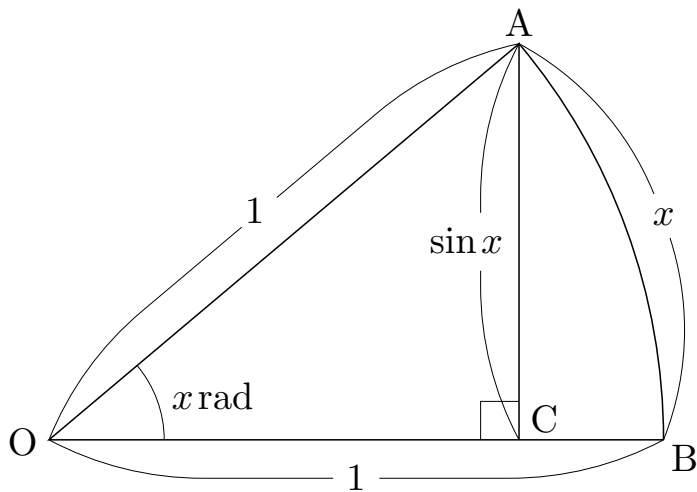
$0 < x < \frac{\pi}{2}$  とする. 右図のように, 点  $O, A, B$  を頂点とする扇形  $OAB$  の半径が  $1$  であり, 中心角  $AOB$  の弧度法による大きさが  $x \text{ rad}$  であるとする. 弧  $AB$  の長さは  $\widehat{AB} = x$ . 点  $C$  は線分  $OB$  に属し, 直線  $OB$  と直線  $AC$  とは垂直であるとする. 線分  $AC$  の長さは  $\overline{AC} = \sin x$ .



変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin x}{x}$  の極限を調べる.

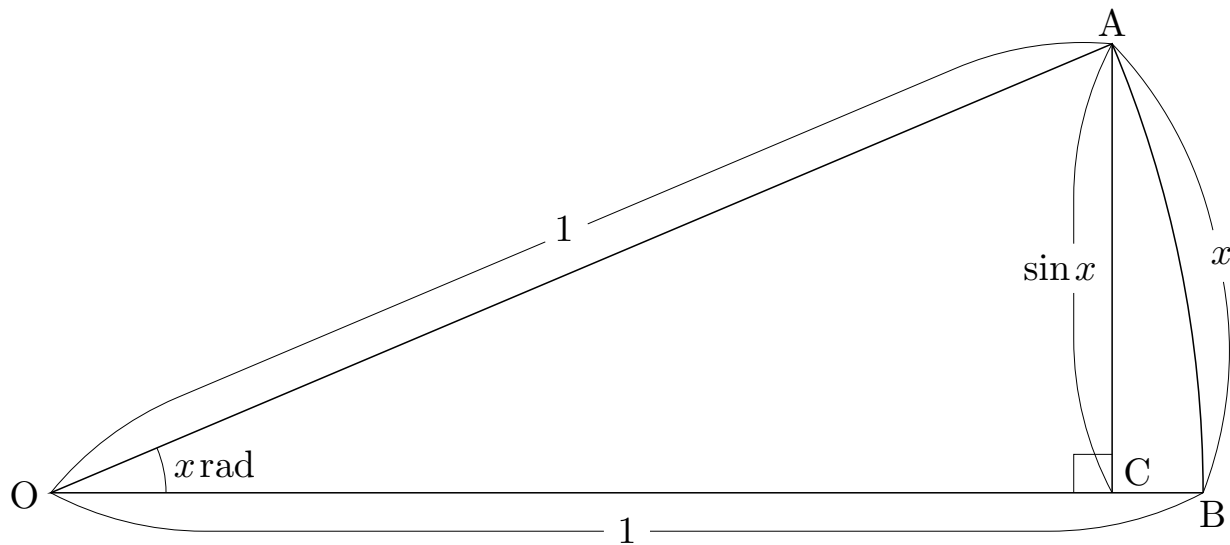
$0 < x < \frac{\pi}{2}$  とする. 右図のように, 点  $O, A, B$  を頂点とする扇形  $OAB$  の半径が  $1$  であり, 中心角  $AOB$  の弧度法による大きさが  $x \text{ rad}$  であるとする. 弧  $AB$  の長さは  $\widehat{AB} = x$ . 点  $C$  は線分  $OB$  に属し, 直線  $OB$  と直線  $AC$  とは垂直であるとする. 線分  $AC$  の長さは  $\overline{AC} = \sin x$ . よって

$$\frac{\overline{AC}}{\widehat{AB}} = \frac{\sin x}{x} .$$



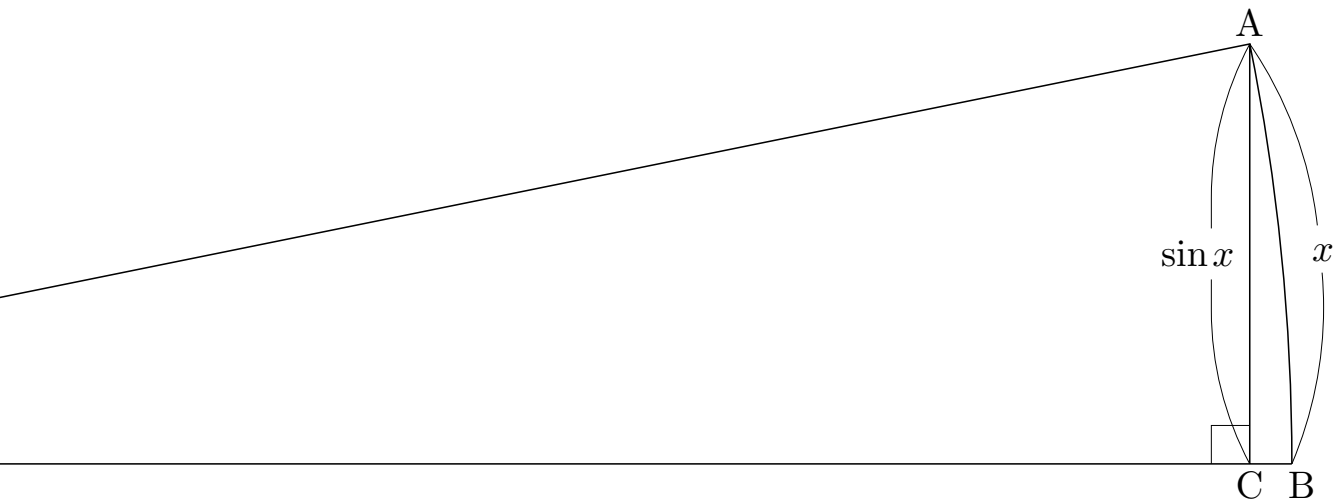
$x = 0.4$  のとき, 以下の図のようになり,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \doteq 0.9735.$$



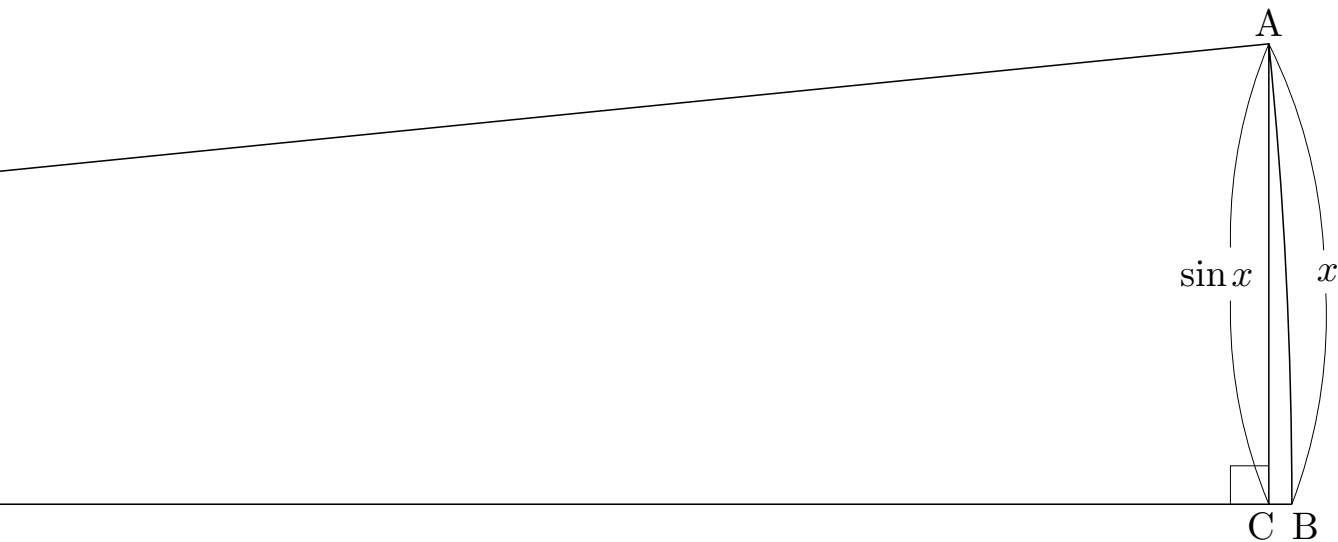
$x = 0.2$  のとき, A, B, C の部分を拡大すると以下の図のようになり,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \doteq 0.9933.$$



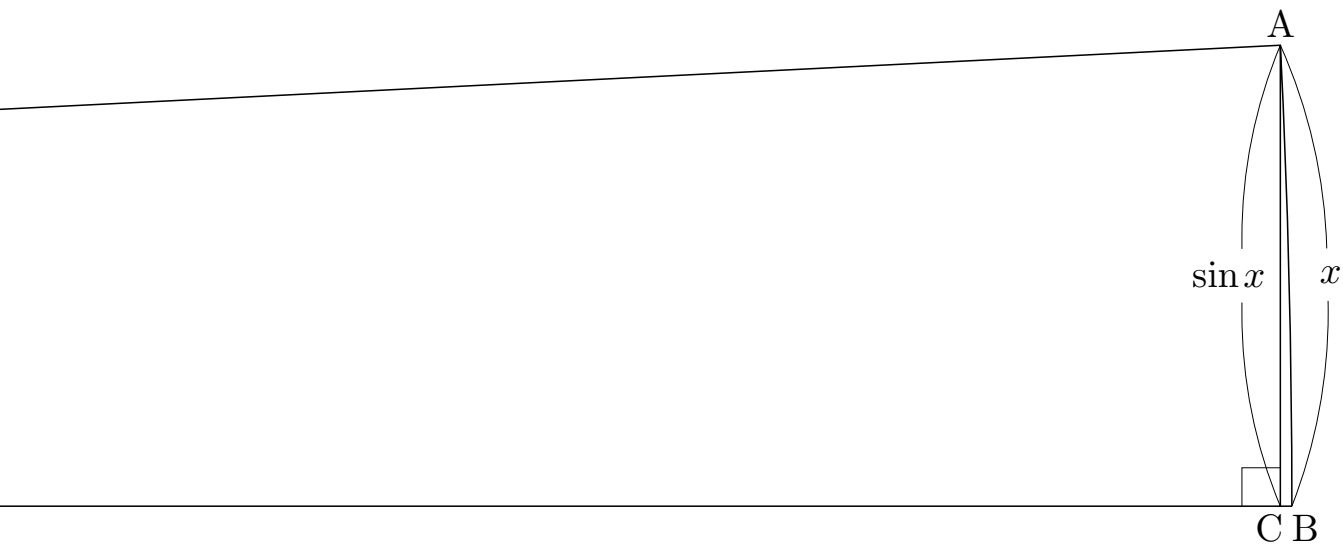
$x = 0.1$  のとき, A, B, C の部分を拡大すると以下の図のようになり,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \doteq 0.9983.$$



$x = 0.05$  のとき, A, B, C の部分を拡大すると以下の図のようになり,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \doteq 0.9996.$$





このように、変数  $x$  の値を 0 に限りなく近づけると、 $\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$  の値は 1 に限りなく近づく。

このように、変数  $x$  の値を  $0$  に限りなく近づけると、 $\frac{\sin x}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$  の値は  $1$  に限りなく近づく。このようにして次の定理が成り立つ。

**定理** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のとき  $\frac{\sin x}{x}$  は  $1$  に収束する：

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin 3x}{x}$  の極限を調べる.

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin 3x}{x}$  の極限を調べる.

変数  $y$  を  $y = 3x$  とおく.  $x = \frac{y}{3}$  なので,

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{y}{3}} = 3 \cdot \frac{\sin y}{y} .$$

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin 3x}{x}$  の極限を調べる.

変数  $y$  を  $y = 3x$  とおく.  $x = \frac{y}{3}$  なので,

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{y}{3}} = 3 \cdot \frac{\sin y}{y} .$$

$x \rightarrow 0$  のとき,  $y = 3x \rightarrow 0$  ,  $y \neq 0$  .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( 3 \cdot \frac{\sin y}{y} \right) .$$

変数  $x$  の関数  $f(x)$  と変数  $y$  の関数  $g(y)$  について,  $f(x) = g(y)$  で, 定数  $a$  と  $b$  について, 変数  $x$  について  $x \rightarrow a$  のとき  $y \rightarrow b$  ,  $y \neq b$  とする.  $y \rightarrow b$  のとき  $g(y)$  が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) .$$

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin 3x}{x}$  の極限を調べる.

変数  $y$  を  $y = 3x$  とおく.  $x = \frac{y}{3}$  なので,

$$\frac{\sin 3x}{x} = \frac{\sin y}{\frac{y}{3}} = 3 \cdot \frac{\sin y}{y} .$$

$x \rightarrow 0$  のとき,  $y = 3x \rightarrow 0$ ,  $y \neq 0$ .  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$  なので,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( 3 \cdot \frac{\sin y}{y} \right) = 3 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 3 \cdot 1 = 3 .$$

**終**

問2.4.4 変数  $t$  について  $t \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin \frac{t}{4}}{t}$  の極限を調べよ.

変数  $x$  を  $x =$       とおく.  $t =$       .  $t \rightarrow 0$  のとき  $x \rightarrow 0$  なので、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{4}}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \quad \cdot 1 = \quad .$$

問2.4.4 変数  $t$  について  $t \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\sin \frac{t}{4}}{t}$  の極限を調べよ.

変数  $x$  を  $x = \frac{t}{4}$  とおく.  $t = 4x$ .  $t \rightarrow 0$  のとき  $x \rightarrow 0$  なので、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{4}}{t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} .$$

終



**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\tan 5x}{x}$  の極限を調べる.

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\tan 5x}{x}$  の極限を調べる.

変数  $y$  を  $y = 5x$  とおく.  $x = \frac{y}{5}$ .

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\tan 5x}{x}$  の極限を調べる.

変数  $y$  を  $y = 5x$  とおく.  $x = \frac{y}{5}$  .

$$\frac{\tan 5x}{x} = \frac{\tan y}{\frac{y}{5}} = 5 \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y} = 5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y} .$$

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\tan 5x}{x}$  の極限を調べる.

変数  $y$  を  $y = 5x$  とおく.  $x = \frac{y}{5}$  .

$$\frac{\tan 5x}{x} = \frac{\tan y}{\frac{y}{5}} = 5 \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y} = 5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y} .$$

$x \rightarrow 0$  のとき  $y = 5x \rightarrow 0$  .  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$  . 関数  $\cos x$  は連続なので

$$\lim_{y \rightarrow 0} \cos y = \cos 0 = 1 .$$

**例** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\tan 5x}{x}$  の極限を調べる.

変数  $y$  を  $y = 5x$  とおく.  $x = \frac{y}{5}$ .

$$\frac{\tan 5x}{x} = \frac{\tan y}{\frac{y}{5}} = 5 \cdot \frac{\sin y}{\cos y} = 5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y} = 5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y}.$$

$x \rightarrow 0$  のとき  $y = 5x \rightarrow 0$ .  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ . 関数  $\cos x$  は連続なので

$\lim_{y \rightarrow 0} \cos y = \cos 0 = 1$ . よって

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( 5 \cdot \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\cos y} \right) = 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \\ &= 5. \end{aligned}$$

終

**問2.4.5** 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\tan \frac{x}{3}}{x}$  の極限を調べよ.

変数  $y$  を  $y =$       とおく.  $x =$       .

$$\frac{\tan \frac{x}{3}}{x} = \frac{\tan y}{x} = \frac{1}{x} \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin y}{y} \frac{1}{\frac{x}{y}} .$$

$x \rightarrow 0$  のとき  $y \rightarrow 0$  .  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$  なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{x}{3}}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sin y}{y} \frac{1}{\frac{x}{y}} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} \\ &= 1 \cdot 3 = 3 . \end{aligned}$$

問2.4.5 変数  $x$  について  $x \rightarrow 0$  のときの  $\frac{\tan \frac{x}{3}}{x}$  の極限を調べよ.

変数  $y$  を  $y = \frac{x}{3}$  とおく.  $x = 3y$  .

$$\frac{\tan \frac{x}{3}}{x} = \frac{\tan y}{3y} = \frac{1}{3y} \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{1}{3} \frac{\sin y}{y} \frac{1}{\cos y} .$$

$x \rightarrow 0$  のとき  $y \rightarrow 0$  .  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$  なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{x}{3}}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{1}{3} \frac{\sin y}{y} \frac{1}{\cos y} \right) = \frac{1}{3} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \cos y} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \\ &= \frac{1}{3} . \end{aligned}$$

終