2.7 微分係数

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった.

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった．ここで，変数 t に対して変数 h を $h=t-a$ とおく． $t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった．ここで，変数 t に対して変数 h を $h=t-a$ とおく． $t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき， $h=t-a\to 0$ ， $h\neq 0$ なので，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて， $f(x)=g(y)$ で，定数 a と b とについて，変数 x について $x\to a$ のとき $y\to b$ ， $y\neq b$ とする． $y\to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{y\to b}g(y)$ ．

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった．ここで，変数 t に対して変数 h を $h=t-a$ とおく． $t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき， $h=t-a\to 0$ ， $h\neq 0$ なので，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

よって，関数 f の定義域の実数 a に対して，

$$a\text{ における }f\text{ の微分係数}=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった．ここで，変数 t に対して変数 h を $h=t-a$ とおく． $t=a+h$ なので，

$$\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

$t\to a$ のとき， $h=t-a\to 0$ ， $h\neq 0$ なので，

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

よって，関数 f の定義域の実数 a に対して，

$$a\text{ における }f\text{ の微分係数}=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ .$$

極限値 $\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ より極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の方が計算し易いことが多いので，微分係数を $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ と定義する．

定義　関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，2 における関数 g の微分係数を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，2 における関数 g の微分係数を調べる．

関数 f の定義域の実数 a における微分係数は極限値 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ である．

2 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} =$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，2 における関数 g の微分係数を調べる．

関数 f の定義域の実数 a における微分係数は極限値 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ である．

$$g(2+h) - g(2) = 3(2+h)^2 - 5(2+h) - (3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2) = 12h + 3h^2 - 5h$$

$$= 7h + 3h^2 \ .$$

2 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} =$$

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，2 における関数 g の微分係数を調べる．

関数 f の定義域の実数 a における微分係数は極限値 $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ である．

$$g(2+h) - g(2) = 3(2+h)^2 - 5(2+h) - (3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2) = 12h + 3h^2 - 5h$$

$$= 7h + 3h^2 \ .$$

2 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{7h + 3h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (7 + 3h) = 7 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}2.7.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，5 における関数 f の微分係数を調べよ．

$$f(5+h) - f(5) =$$

5 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\qquad\qquad}{h} = \lim_{h \to 0} (\qquad\qquad) =$$

$\boxed{\text{問}2.7.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，5 における関数 f の微分係数を調べよ．

$$f(5+h) - f(5) = 2(5+h)^2 - 7(5+h) - (2 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5) = 20h + 2h^2 - 7h$$

$$= 2h^2 + 13h \ .$$

5 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\qquad\qquad}{h} = \lim_{h \to 0} (\qquad\qquad) =$$

$\boxed{\text{問}2.7.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，5 における関数 f の微分係数を調べよ．

$$f(5+h) - f(5) = 2(5+h)^2 - 7(5+h) - (2 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5) = 20h + 2h^2 - 7h$$

$$= 2h^2 + 13h \ .$$

5 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 + 13h}{h} = \lim_{h \to 0} (2h + 13) = 13 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3x-5}$ と定める.
微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3x-5}$ と定める.
微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる.

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\lim_{h \to 0} \frac{\psi(4+h) - \psi(4)}{h} =$$

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3x-5}$ と定める.
微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる.

$$\psi(4+h) - \psi(4) = \frac{2}{3(4+h)-5} - \frac{2}{3\cdot 4-5} = \frac{2}{3h+7} - \frac{2}{7} = \frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)}$$
$$= -\frac{6h}{7(3h+7)} \ .$$

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0} \frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h} =$$

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3x-5}$ と定める.
微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる.

$$\psi(4+h) - \psi(4) = \frac{2}{3(4+h)-5} - \frac{2}{3\cdot 4-5} = \frac{2}{3h+7} - \frac{2}{7} = \frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)}$$
$$= -\frac{6h}{7(3h+7)} \ .$$

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0} \frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\dfrac{6h}{7(3h+7)}}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{6}{7(3h+7)}$$

$\boxed{\text{例}}$ $\dfrac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{2}{3x-5}$ と定める.
微分係数の定義に直接従って，4 における関数 ψ の微分係数を調べる.

$$\psi(4+h) - \psi(4) = \frac{2}{3(4+h)-5} - \frac{2}{3\cdot 4-5} = \frac{2}{3h+7} - \frac{2}{7} = \frac{14-2(3h+7)}{7(3h+7)}$$
$$= -\frac{6h}{7(3h+7)} \ .$$

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi(4+h)-\psi(4)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{6h}{7(3h+7)}}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{6}{7(3h+7)}$$
$$= -\frac{6}{7\cdot\lim\limits_{h\to 0}(3h+7)}$$
$$= -\frac{6}{49} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}2.7.2}$ $\dfrac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{4x-7}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，3 における関数 φ の微分係数を調べよ．

$$\varphi(3+h) - \varphi(3) =$$

3 における関数 φ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(3+h)-\varphi(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\qquad\qquad}{h} = -\lim_{h\to 0} \qquad\qquad = -\frac{\qquad\qquad}{\lim_{h\to 0}(\qquad\qquad)}$$

$$= - \qquad .$$

$\boxed{\text{問}2.7.2}$ $\dfrac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{4x-7}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，3 における関数 φ の微分係数を調べよ．

$$\varphi(3+h) - \varphi(3) = \frac{5}{4(3+h)-7} - \frac{5}{4\cdot 3-7} = \frac{5}{4h+5} - 1 = \frac{5-(4h+5)}{4h+5}$$

$$= -\frac{4h}{4h+5}\ .$$

3 における関数 φ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(3+h)-\varphi(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{h} = -\lim_{h\to 0}\qquad\qquad = -\frac{\qquad\qquad}{\lim_{h\to 0}(\qquad\qquad)}$$

$$= -\qquad .$$

$\boxed{\text{問}2.7.2}$ $\dfrac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{5}{4x-7}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，3 における関数 φ の微分係数を調べよ．

$$\varphi(3+h) - \varphi(3) = \frac{5}{4(3+h)-7} - \frac{5}{4\cdot 3-7} = \frac{5}{4h+5} - 1 = \frac{5-(4h+5)}{4h+5}$$
$$= -\frac{4h}{4h+5}\ .$$

3 における関数 φ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(3+h)-\varphi(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\dfrac{4h}{4h+5}}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{4}{4h+5} = -\frac{4}{\lim\limits_{h\to 0}(4h+5)}$$
$$= -\frac{4}{5}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

関数 f は定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．a における f の微分係数を b とおく： $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$ ．

関数 f は定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．a における f の微分係数を b とおく： $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$ ． $\displaystyle\lim_{h\to 0}h=0$ なので，

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=b\cdot 0=0\ .$$

関数 f は定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．a における f の微分係数を b とおく： $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$ ． $\displaystyle\lim_{h\to 0}h=0$ なので，

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=b\cdot 0=0\ .$$

$h\to 0$ のとき $h\neq 0$ なので $f(a+h)-f(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}h$ ，従って

$$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=0\ .$$

関数 f は定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．a における f の微分係数を b とおく： $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$ ． $\displaystyle\lim_{h\to 0}h=0$ なので，

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=b\cdot 0=0\ .$$

$h\to 0$ のとき $h\neq 0$ なので $f(a+h)-f(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}h$ ，従って

$$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=0\ .$$

更に，$f(a)$ は変数 h と無関係なので，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}f(a+h)&=\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)+f(a)\}\\&=\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}+f(a)=0+f(a)\\&=f(a)\ ,\end{aligned}$$

関数 f は定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．a における f の微分係数を b とおく： $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=b$ ． $\displaystyle\lim_{h\to 0}h=0$ なので，

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h=b\cdot 0=0\ .$$

$h\to 0$ のとき $h\neq 0$ なので $f(a+h)-f(a)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}h$ ，従って

$$\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}h\right\}=0\ .$$

更に，$f(a)$ は変数 h と無関係なので，

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}f(a+h)&=\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)+f(a)\}\\&=\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}+f(a)=0+f(a)\\&=f(a)\ ,\end{aligned}$$

つまり $\displaystyle\lim_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ ．

定理　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \ .$$

定理　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \ .$$

　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．変数 h, t について $h = t - a$ とする．

定理　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば

$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．変数 h, t について $h = t - a$ とする． $t = a + h$ より $f(t) = f(a+h)$ であり， $t \to a$ のとき $h \to 0$ なので，

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \ .$$

定理　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば

$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．変数 h, t について $h = t - a$ とする． $t = a + h$ より $f(t) = f(a+h)$ であり， $t \to a$ のとき $h \to 0$ なので，

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \ .$$

つまり f は a において連続である．

定理　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば
$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する．変数 h, t について $h = t - a$ とする． $t = a + h$ より $f(t) = f(a+h)$ であり， $t \to a$ のとき $h \to 0$ なので，

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a) \ .$$

つまり f は a において連続である．

定理　関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば， f は a において連続である．

つまり，関数 f 及び f の定義域の実数 a について，

f が a において微分可能 ならば f は a において連続

である．

つまり，関数 f 及び f の定義域の実数 a について，

f が a において微分可能　ならば　f は a において連続

である．しかしこの逆は必ずしも成り立たない：関数 f が a において連続であっても f が a において微分可能でないことがある．