

2.7 微分係数

関数 f の定義域の実数 a に対して、極限值 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ があるならば、それを a における f の微分係数といった。

関数 f の定義域の実数 a に対して、極限值 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ があるならば、それを a における f の微分係数といった。ここで、変数 t に対して変数 h を $h = t - a$ とおく。 $t = a + h$ なので、

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

関数 f の定義域の実数 a に対して、極限值 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ があるならば、それを a における f の微分係数といった。ここで、変数 t に対して変数 h を $h = t - a$ とおく。 $t = a + h$ なので、

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

$t \rightarrow a$ のとき、 $h = t - a \rightarrow 0$, $h \neq 0$ なので、

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ について、 $f(x) = g(y)$ で、定数 a と b について、変数 x について $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow b$, $y \neq b$ とする。 $y \rightarrow b$ のとき $g(y)$ が収束するならば、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) .$$

関数 f の定義域の実数 a に対して，極限值 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ があるならば，それを a における f の微分係数といった．ここで，変数 t に対して変数 h を $h = t - a$ とおく． $t = a + h$ なので，

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

$t \rightarrow a$ のとき， $h = t - a \rightarrow 0$ ， $h \neq 0$ なので，

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

よって，関数 f の定義域の実数 a に対して，

$$a \text{ における } f \text{ の微分係数} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

関数 f の定義域の実数 a に対して、極限值 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ があるならば、それを a における f の微分係数といった。ここで、変数 t に対して変数 h を $h = t - a$ とおく。 $t = a + h$ なので、

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

$t \rightarrow a$ のとき、 $h = t - a \rightarrow 0$, $h \neq 0$ なので、

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

よって、関数 f の定義域の実数 a に対して、

$$a \text{ における } f \text{ の微分係数} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} .$$

極限值 $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ より極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ の方が計算し易いこ

とが多いので、微分係数を $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$ と定義する。

定義 関数 f の定義域の実数 a について, $h \rightarrow 0$ のとき $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が収束するならば, 関数 f は a において微分可能であるといい, 極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 2 における関数 g の微分係数を調べる.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 2 における関数 g の微分係数を調べる.

2 における関数 g の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$ である.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 2 における関数 g の微分係数を調べる.

2 における関数 g の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$ である.

$$\begin{aligned} g(2+h) - g(2) &= 3(2+h)^2 - 5(2+h) - (3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2) = 12h + 3h^2 - 5h \\ &= 7h + 3h^2, \end{aligned}$$

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 3x^2 - 5x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 2 における関数 g の微分係数を調べる.

2 における関数 g の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$ である.

$$\begin{aligned} g(2+h) - g(2) &= 3(2+h)^2 - 5(2+h) - (3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2) = 12h + 3h^2 - 5h \\ &= 7h + 3h^2, \end{aligned}$$

よって, 2 における関数 g の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h + 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (7 + 3h) = 7.$$

終

問2.7.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 5 における関数 f の微分係数を調べよ.

5 における関数 f の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$ である.

問2.7.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 5 における関数 f の微分係数を調べよ.

5 における関数 f の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$ である.

$$\begin{aligned} f(5+h) - f(5) &= &= \\ &= & , \end{aligned}$$

5 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (\quad) = \quad .$$

問2.7.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 2x^2 - 7x$ と定める. 微分係数の定義に直接従って, 5 における関数 f の微分係数を調べよ.

5 における関数 f の微分係数は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$ である.

$$\begin{aligned} f(5+h) - f(5) &= 2(5+h)^2 - 7(5+h) - (2 \cdot 5^2 - 7 \cdot 5) = 20h + 2h^2 - 7h \\ &= 2h^2 + 13h, \end{aligned}$$

5 における関数 f の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 13h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 13) = 13.$$

終

例 $\frac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3x-5}$ と定める.
微分係数の定義に直接従って, 4 における関数 ψ の微分係数を調べる.

例 $\frac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3x-5}$ と定める.

微分係数の定義に直接従って, 4 における関数 ψ の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned}\psi(4+h) - \psi(4) &= \frac{2}{3(4+h)-5} - \frac{2}{3 \cdot 4 - 5} = \frac{2}{3h+7} - \frac{2}{7} = \frac{14 - 2(3h+7)}{7(3h+7)} \\ &= -\frac{6h}{7(3h+7)}.\end{aligned}$$

例 $\frac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3x-5}$ と定める.

微分係数の定義に直接従って, 4 における関数 ψ の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned}\psi(4+h) - \psi(4) &= \frac{2}{3(4+h)-5} - \frac{2}{3 \cdot 4 - 5} = \frac{2}{3h+7} - \frac{2}{7} = \frac{14 - 2(3h+7)}{7(3h+7)} \\ &= -\frac{6h}{7(3h+7)}.\end{aligned}$$

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(4+h) - \psi(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{6h}{7(3h+7)}}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6}{7(3h+7)}$$

例 $\frac{5}{3}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3x-5}$ と定める.

微分係数の定義に直接従って, 4 における関数 ψ の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned}\psi(4+h) - \psi(4) &= \frac{2}{3(4+h)-5} - \frac{2}{3 \cdot 4 - 5} = \frac{2}{3h+7} - \frac{2}{7} = \frac{14 - 2(3h+7)}{7(3h+7)} \\ &= -\frac{6h}{7(3h+7)}.\end{aligned}$$

4 における関数 ψ の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(4+h) - \psi(4)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{6h}{7(3h+7)}}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{6}{7(3h+7)} \\ &= -\frac{6}{7 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} (3h+7)} \\ &= -\frac{6}{49}.\end{aligned}$$

終

問2.7.2 $\frac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{5}{4x-7}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，3 における関数 φ の微分係数を調べよ．

$$\begin{aligned} \varphi(3+h) - \varphi(3) &= & & = & & = \\ & & & & & = \\ & & & & & = \\ & & & & & = \end{aligned}$$

3 における関数 φ の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(3+h) - \varphi(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\quad}{h} = - \lim_{h \rightarrow 0} \quad = - \frac{\lim_{h \rightarrow 0} (\quad)}{\quad} \\ &= - \quad . \end{aligned}$$

問2.7.2 $\frac{7}{4}$ 以外の実数の全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{5}{4x-7}$ と定める．微分係数の定義に直接従って，3 における関数 φ の微分係数を調べよ．

$$\begin{aligned}\varphi(3+h) - \varphi(3) &= \frac{5}{4(3+h)-7} - \frac{5}{4 \cdot 3 - 7} = \frac{5}{4h+5} - 1 = \frac{5 - (4h+5)}{4h+5} \\ &= -\frac{4h}{4h+5} .\end{aligned}$$

3 における関数 φ の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(3+h) - \varphi(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{4h}{4h+5}}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{4h+5} = -\frac{4}{\lim_{h \rightarrow 0} (4h+5)} \\ &= -\frac{4}{5} .\end{aligned}$$

終

関数 f は定義域の実数 a において微分可能であると仮定する. a における f の微分係数を b とおく : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$.

関数 f は定義域の実数 a において微分可能であると仮定する. a における f の微分係数を b とおく : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$. $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ なので,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = b \cdot 0 = 0 .$$

関数 f は定義域の実数 a において微分可能であると仮定する. a における f の微分係数を b とおく : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$. $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ なので,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = b \cdot 0 = 0 .$$

$h \rightarrow 0$ のとき $h \neq 0$ なので $f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h$, 従って

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f(a+h) - f(a)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right\} = 0 .$$

関数 f は定義域の実数 a において微分可能であると仮定する. a における f の微分係数を b とおく : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$. $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ なので,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = b \cdot 0 = 0 .$$

$h \rightarrow 0$ のとき $h \neq 0$ なので $f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h$, 従って

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f(a+h) - f(a)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right\} = 0 .$$

更に, $f(a)$ は変数 h と無関係なので,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a+h) - f(a) + f(a)\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a+h) - f(a)\} + f(a) = 0 + f(a) \\ &= f(a) , \end{aligned}$$

関数 f は定義域の実数 a において微分可能であると仮定する. a における f の微分係数を b とおく : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = b$. $\lim_{h \rightarrow 0} h = 0$ なので,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h = b \cdot 0 = 0 .$$

$h \rightarrow 0$ のとき $h \neq 0$ なので $f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h$, 従って

$$\lim_{h \rightarrow 0} \{f(a+h) - f(a)\} = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+h) - f(a)}{h} h \right\} = 0 .$$

更に, $f(a)$ は変数 h と無関係なので,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a+h) - f(a) + f(a)\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a+h) - f(a)\} + f(a) = 0 + f(a) \\ &= f(a) , \end{aligned}$$

つまり $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$.

定理 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) .$$

定理 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) .$$

関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する. 変数 h, t について $h = t - a$ とする.

定理 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) .$$

関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する. 変数 h, t について $h = t - a$ とする. $t = a + h$ より $f(t) = f(a + h)$ であり, $t \rightarrow a$ のとき $h \rightarrow 0$ なので,

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) .$$

定理 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) .$$

関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する. 変数 h, t について $h = t - a$ とする. $t = a + h$ より $f(t) = f(a + h)$ であり, $t \rightarrow a$ のとき $h \rightarrow 0$ なので,

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) .$$

つまり f は a において連続である.

定理 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) .$$

関数 f が定義域の実数 a において微分可能であると仮定する. 変数 h, t について $h = t - a$ とする. $t = a + h$ より $f(t) = f(a + h)$ であり, $t \rightarrow a$ のとき $h \rightarrow 0$ なので,

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) .$$

つまり f は a において連続である.

定理 関数 f が定義域の実数 a において微分可能であるならば, f は a において連続である.

つまり、関数 f 及び f の定義域の実数 a について、

f が a において微分可能 ならば f は a において連続

である.

つまり、関数 f 及び f の定義域の実数 a について、

f が a において微分可能 ならば f は a において連続

である。しかしこの逆は必ずしも成り立たない：関数 f が a において連続であつても f が a において微分可能でないことがある。