

## 2.8 三角関数の微分係数

関数  $f$  の定義域の実数  $a$  について、 $h \rightarrow 0$  のとき  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が

収束するならば、関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるといい、極限值

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  を  $a$  における  $f$  の微分係数という。

関数  $f$  の定義域の実数  $a$  について、 $h \rightarrow 0$  のとき  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が収束するならば、関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるといい、極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  を  $a$  における  $f$  の微分係数という。

実数  $a$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数は  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$  である。

実数  $a$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数は  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$  である。

関数  $f$  の定義域の実数  $a$  について、 $h \rightarrow 0$  のとき  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  が収束するならば、関数  $f$  は  $a$  において微分可能であるといい、極限值  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  を  $a$  における  $f$  の微分係数という。

実数  $a$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数は  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$  である。

実数  $a$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数は  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$  である。

これらを考えるために正弦関数・余弦関数の公式を復習する。

実数  $a, b$  について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{r} \sin a = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ - \sin b = \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2} \sin\frac{a-b}{2} \end{array}$$

実数  $a, b$  について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \quad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

余弦関数の加法定理より,

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{r} \cos a = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ - \cos b = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\ \hline \cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \end{array}$$

正弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$  を考える.

正弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$  を考える. 変数  $h$  について,

$$\sin(a+h) - \sin a = 2 \cos \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$



正弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$  を考える. 変数  $h$  について,

$$\begin{aligned}\sin(a+h) - \sin a &= 2 \cos \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = 2 \cos \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= 2 \cos \left( a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

正弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$  を考える. 変数  $h$  について,

$$\begin{aligned}\sin(a+h) - \sin a &= 2 \cos \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = 2 \cos \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= 2 \cos \left( a + \frac{h}{2} \right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \frac{h}{2}$  とおく.  $h = 2t$  なので,

正弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$  を考える. 変数  $h$  について,

$$\begin{aligned}\sin(a+h) - \sin a &= 2\cos\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = 2\cos\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2} \\ &= 2\cos\left(a + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \frac{h}{2}$  とおく.  $h = 2t$  なので,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} &= \frac{2\cos\left(a + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \frac{2\cos(a+t)\sin t}{2t} \\ &= \frac{\cos(a+t)\sin t}{t} .\end{aligned}$$

正弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h}$  を考える. 変数  $h$  について,

$$\begin{aligned}\sin(a+h) - \sin a &= 2\cos\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = 2\cos\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2} \\ &= 2\cos\left(a + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \frac{h}{2}$  とおく.  $h = 2t$  なので,

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} &= \frac{2\cos\left(a + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \frac{2\cos(a+t)\sin t}{2t} \\ &= \frac{\cos(a+t)\sin t}{t} .\end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $t = \frac{h}{2} \rightarrow 0$  なので,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(a+t)\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

余弦関数  $\cos x$  は連続なので  $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(a+t)\right\} = \cos a$  . また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

余弦関数  $\cos x$  は連続なので  $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) = \cos \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \cos a$  . また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \text{ . よって,}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \cos a \cdot 1 = \cos a \text{ .}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

余弦関数  $\cos x$  は連続なので  $\lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) = \cos \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \cos a$  . また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 . \text{ よって,}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \cos(a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \cos a \cdot 1 = \cos a .$$

実数  $a$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数は  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a$  である.



余弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$  を考える.

余弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$  を考える. 変数  $h$  について,

$$\cos(a+h) - \cos a = -2 \sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

余弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$  を考える. 変数  $h$  について,

$$\begin{aligned}\cos(a+h) - \cos a &= -2\sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = -2\sin \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= -2\sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

余弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$  を考える. 変数  $h$  について,

$$\begin{aligned}\cos(a+h) - \cos a &= -2\sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = -2\sin \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= -2\sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \frac{h}{2}$  とおく.  $h = 2t$  なので,

余弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$  を考える. 変数  $h$  について,

$$\begin{aligned}\cos(a+h) - \cos a &= -2\sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = -2\sin \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= -2\sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \frac{h}{2}$  とおく.  $h = 2t$  なので,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} &= \frac{-2\sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = -\frac{2\sin(a+t) \sin t}{2t} \\ &= -\frac{\sin(a+t) \sin t}{t} .\end{aligned}$$

余弦関数の微分係数  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h}$  を考える. 変数  $h$  について,

$$\begin{aligned}\cos(a+h) - \cos a &= -2\sin \frac{a+h+a}{2} \sin \frac{a+h-a}{2} = -2\sin \frac{2a+h}{2} \sin \frac{h}{2} \\ &= -2\sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2} .\end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \frac{h}{2}$  とおく.  $h = 2t$  なので,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} &= \frac{-2\sin \left(a + \frac{h}{2}\right) \sin \frac{h}{2}}{h} = -\frac{2\sin(a+t) \sin t}{2t} \\ &= -\frac{\sin(a+t) \sin t}{t} .\end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $t = \frac{h}{2} \rightarrow 0$  なので,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\frac{\sin(a+t) \sin t}{t} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

正弦関数  $\sin x$  は連続なので  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) = \sin\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(a+t)\right\} = \sin a$  . また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 .$$



$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

正弦関数  $\sin x$  は連続なので  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) = \sin \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \sin a$  . また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 . \quad \text{よって}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = -\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -\sin a \cdot 1 = -\sin a .$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

正弦関数  $\sin x$  は連続なので  $\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) = \sin \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (a+t) \right\} = \sin a$  . また

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 . \text{ よって}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = -\lim_{t \rightarrow 0} \sin(a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = -\sin a \cdot 1 = -\sin a .$$

実数  $a$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数は  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin a$  である.

**定理** 任意の実数  $a$  に対して,  $a$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a ,$$

$a$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = -\sin a .$$

例  $\frac{2\pi}{3}$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数を求める.

実数  $a$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数は  $-\sin a$  である.

例  $\frac{2\pi}{3}$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数を求める.

実数  $a$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数は  $-\sin a$  である.

$\frac{2\pi}{3}$  における余弦関数  $\cos x$  の微分係数は

$$-\sin \frac{2\pi}{3} = -\sin \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

終

問  $\frac{5\pi}{6}$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数を求めよ.

実数  $a$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数は  $\cos a$  である.

問  $\frac{5\pi}{6}$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数を求めよ.

実数  $a$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数は  $\cos a$  である.

$\frac{5\pi}{6}$  における正弦関数  $\sin x$  の微分係数は

$$\cos \frac{5\pi}{6} = \cos \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

終

**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \sin 5x$  と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数  $a$  における関数  $f$  の微分係数を調べる.



**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \sin 5x$  と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数  $a$  における関数  $f$  の微分係数を調べる.

$$f(a+h) - f(a) = \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2\cos\frac{5(2a+h)}{2}\sin\frac{5h}{2}$$
$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \sin 5x$  と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数  $a$  における関数  $f$  の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2\cos\frac{5(2a+h)}{2}\sin\frac{5h}{2} \\ &= 2\cos\left(5a + \frac{5h}{2}\right)\sin\frac{5h}{2} . \end{aligned}$$

**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \sin 5x$  と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数  $a$  における関数  $f$  の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2\cos\frac{5(2a+h)}{2}\sin\frac{5h}{2} \\ &= 2\cos\left(5a + \frac{5h}{2}\right)\sin\frac{5h}{2}. \end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \frac{5h}{2}$  とおく.  $h = \frac{2t}{5}$  なので,

**例** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \sin 5x$  と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数  $a$  における関数  $f$  の微分係数を調べる.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2\cos\frac{5(2a+h)}{2}\sin\frac{5h}{2} \\ &= 2\cos\left(5a + \frac{5h}{2}\right)\sin\frac{5h}{2}. \end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \frac{5h}{2}$  とおく.  $h = \frac{2t}{5}$  なので,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{2\cos\left(5a + \frac{5h}{2}\right)\sin\frac{5h}{2}}{h} = \frac{2\cos(5a+t)\sin t}{\frac{2t}{5}} \\ &= 5\cos(5a+t)\frac{\sin t}{t}. \end{aligned}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5\cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5\cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $t = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$  .

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5\cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $t = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$  . 余弦関数  $\cos x$  は連続なので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(5a+t)\right\} = \cos(5a) .$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5\cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $t = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$  . 余弦関数  $\cos x$  は連続なので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0} (5a+t)\right\} = \cos(5a) .$$

また  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  .



$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5\cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $t = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$  . 余弦関数  $\cos x$  は連続なので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(5a+t)\right\} = \cos(5a) .$$

また  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  . 実数  $a$  における  $f$  の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ 5\cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} \\ &= 5 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \end{aligned}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 5\cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $t = \frac{5h}{2} \rightarrow 0$  . 余弦関数  $\cos x$  は連続なので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) = \cos\left\{\lim_{t \rightarrow 0}(5a+t)\right\} = \cos(5a) .$$

また  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  . 実数  $a$  における  $f$  の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ 5\cos(5a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} \\ &= 5 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos(5a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= 5\cos(5a) \cdot 1 \\ &= 5\cos 5a . \end{aligned}$$

終

**問2.8** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \cos 3x$  と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数  $a$  における関数  $f$  の微分係数を調べよ.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \cos\{ \quad \quad \quad \} - \cos \quad \quad \quad = -2\sin \frac{\quad \quad \quad}{2} \sin \frac{\quad \quad \quad}{2} \\ &= -2\sin\left( \quad \quad \quad \right) \sin \quad \quad \quad . \end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \quad \quad \quad$  とおく.  $h = \quad \quad \quad$  なので,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{-2\sin\left( \quad \quad \quad \right) \sin \quad \quad \quad}{h} = -\frac{2\sin(\quad \quad \quad) \sin \quad \quad \quad}{h} \\ &= \sin(\quad \quad \quad) \frac{\sin \quad \quad \quad}{h} . \end{aligned}$$

**問2.8** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \cos 3x$  と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数  $a$  における関数  $f$  の微分係数を調べよ.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \cos\{3(a+h)\} - \cos 3a = -2\sin\frac{3(2a+h)}{2}\sin\frac{3h}{2} \\ &= -2\sin\left(3a + \frac{3h}{2}\right)\sin\frac{3h}{2}. \end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t =$             とおく.  $h =$             なので,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{-2\sin\left(\quad\right)\sin}{h} = -\frac{2\sin(\quad)\sin}{h} \\ &= \sin(\quad)\frac{\sin}{h}. \end{aligned}$$

**問2.8** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \cos 3x$  と定める. 微分係数の定義に直接従って, 実数  $a$  における関数  $f$  の微分係数を調べよ.

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \cos\{3(a+h)\} - \cos 3a = -2\sin\frac{3(2a+h)}{2}\sin\frac{3h}{2} \\ &= -2\sin\left(3a + \frac{3h}{2}\right)\sin\frac{3h}{2}. \end{aligned}$$

変数  $t$  を  $t = \frac{3h}{2}$  とおく.  $h = \frac{2t}{3}$  なので,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{-2\sin\left(3a + \frac{3h}{2}\right)\sin\frac{3h}{2}}{h} = -\frac{2\sin(3a+t)\sin t}{\frac{2t}{3}} \\ &= -3\sin(3a+t)\frac{\sin t}{t}. \end{aligned}$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -3\sin(3a+t) \frac{\sin t}{t} .$$

$h \rightarrow 0$  のとき  $t = \frac{3h}{2} \rightarrow 0$  . 正弦関数  $\sin x$  は連続なので

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sin(3a+t) = \sin \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (3a+t) \right\} = \sin(3a) .$$

また  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  .  $a$  における  $f$  の微分係数は

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ -3\sin(3a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} \\ &= -3 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sin(3a+t) \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \\ &= -3\sin(3a) \cdot 1 \\ &= -3\sin 3a . \end{aligned}$$

終