2.8 三角関数の微分係数

関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ である.

実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ である.

関数 f の定義域の実数 a について，$h \to 0$ のとき $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が収束するならば，関数 f は a において微分可能であるといい，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という.

実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ である.

実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ である.

これらを考えるために正弦関数・余弦関数の公式を復習する.

実数 a, b について,

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}, \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}.$$

正弦関数の加法定理より,

$$\sin a = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する.

$$\begin{array}{rl} & \sin a = \sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} + \cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \\ - & \sin b = \sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2} - \cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2} \\ \hline \end{array}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

実数 a, b について，

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\ , \qquad b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\ .$$

余弦関数の加法定理より，

$$\cos a = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ ,$$

$$\cos b = \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\ .$$

これらの等式の左辺どうし右辺どうし引き算する．

$$\begin{array}{rrcl}
 & \cos a &=& \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\
- & \cos b &=& \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \\
\hline
\end{array}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

正弦関数の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ を考える.

正弦関数の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ を考える．変数 h について，

$$\sin(a+h)-\sin a = 2\cos\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

正弦関数の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ **を考える．変数** h **について，**

$$\sin(a+h)-\sin a = 2\cos\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = 2\cos\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$

$$= 2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\ .$$

正弦関数の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ を考える．変数 h について，

$$\sin(a+h)-\sin a = 2\cos\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = 2\cos\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$
$$= 2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\ .$$

変数 t を $t=\dfrac{h}{2}$ とおく． $h=2t$ なので，

正弦関数の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ を考える．変数 h について，

$$\sin(a+h)-\sin a = 2\cos\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = 2\cos\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$
$$= 2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\ .$$

変数 t を $t=\dfrac{h}{2}$ とおく． $h=2t$ なので，

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \frac{2\cos(a+t)\sin t}{2t}$$
$$= \frac{\cos(a+t)\sin t}{t}\ .$$

正弦関数の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$ を考える．変数 h について，

$$\sin(a+h)-\sin a = 2\cos\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = 2\cos\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$
$$= 2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\ .$$

変数 t を $t=\dfrac{h}{2}$ とおく． $h=2t$ なので，

$$\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \frac{2\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = \frac{2\cos(a+t)\sin t}{2t}$$
$$= \frac{\cos(a+t)\sin t}{t}\ .$$

$h\to 0$ のとき $t=\dfrac{h}{2}\to 0$ なので，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos(a+t)\sin t}{t} = \lim_{t\to 0}\left\{\cos(a+t)\frac{\sin t}{t}\right\}\ .$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\cos(a+t)\,\frac{\sin t}{t}\right\} .$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}=\lim_{t\to 0}\left\{\cos(a+t)\frac{\sin t}{t}\right\}\ .$$

余弦関数 $\cos x$ は連続なので $\lim_{t\to 0}\cos(a+t)=\cos\left\{\lim_{t\to 0}(a+t)\right\}=\cos a$ ． また

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\ .$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{\cos(a+t)\,\frac{\sin t}{t}\right\} .$$

余弦関数 $\cos x$ は連続なので $\lim_{t\to 0}\cos(a+t) = \cos\left\{\lim_{t\to 0}(a+t)\right\} = \cos a$ ． また $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ ． よって，

$$\lim_{t\to 0}\left\{\cos(a+t)\,\frac{\sin t}{t}\right\} = \lim_{t\to 0}\cos(a+t)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \cos a\cdot 1 = \cos a .$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{t \to 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

余弦関数 $\cos x$ は連続なので $\lim_{t \to 0} \cos(a+t) = \cos\left\{ \lim_{t \to 0} (a+t) \right\} = \cos a$ ． また $\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ． よって,

$$\lim_{t \to 0} \left\{ \cos(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} = \lim_{t \to 0} \cos(a+t) \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = \cos a \cdot 1 = \cos a .$$

実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \cos a$ である.

余弦関数の微分係数 $\displaystyle \lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ を考える.

余弦関数の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ を考える．変数 h について，

$$\cos(a+h)-\cos a=-2\sin\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

余弦関数の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ を考える．変数 h について，

$$\cos(a+h)-\cos a = -2\sin\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = -2\sin\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$

$$= -2\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\ .$$

余弦関数の微分係数 $\lim_{h\to 0}\dfrac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ を考える．変数 h について，

$$\cos(a+h)-\cos a=-2\sin\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2}=-2\sin\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$

$$=-2\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\ .$$

変数 t を $t=\dfrac{h}{2}$ とおく． $h=2t$ なので，

余弦関数の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ を考える．変数 h について，

$$\cos(a+h)-\cos a = -2\sin\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2} = -2\sin\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$

$$= -2\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} \quad .$$

変数 t を $t=\dfrac{h}{2}$ とおく． $h=2t$ なので，

$$\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \frac{-2\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} = -\frac{2\sin(a+t)\sin t}{2t}$$

$$= -\frac{\sin(a+t)\sin t}{t} \quad .$$

余弦関数の微分係数 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$ を考える．変数 h について，

$$\cos(a+h)-\cos a=-2\sin\frac{a+h+a}{2}\sin\frac{a+h-a}{2}=-2\sin\frac{2a+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$
$$=-2\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}\ .$$

変数 t を $t=\dfrac{h}{2}$ とおく． $h=2t$ なので，

$$\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}=\frac{-2\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=-\frac{2\sin(a+t)\sin t}{2t}$$
$$=-\frac{\sin(a+t)\sin t}{t}\ .$$

$h\to 0$ のとき $t=\dfrac{h}{2}\to 0$ なので，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}=\lim_{t\to 0}\left\{-\frac{\sin(a+t)\sin t}{t}\right\}=\lim_{t\to 0}\left\{-\sin(a+t)\frac{\sin t}{t}\right\}\ .$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{-\sin(a+t)\,\frac{\sin t}{t}\right\} .$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{t \to 0} \left\{ -\sin(a+t) \frac{\sin t}{t} \right\} .$$

正弦関数 $\sin x$ は連続なので $\lim_{t \to 0} \sin(a+t) = \sin \left\{ \lim_{t \to 0} (a+t) \right\} = \sin a$ ． また

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 .$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{-\sin(a+t)\frac{\sin t}{t}\right\} .$$

正弦関数 $\sin x$ は連続なので $\lim_{t\to 0}\sin(a+t) = \sin\left\{\lim_{t\to 0}(a+t)\right\} = \sin a$ ． また $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ ． よって

$$\lim_{t\to 0}\left\{-\sin(a+t)\frac{\sin t}{t}\right\} = -\lim_{t\to 0}\sin(a+t)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = -\sin a\cdot 1 = -\sin a .$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \lim_{t\to 0}\left\{-\sin(a+t)\,\frac{\sin t}{t}\right\} .$$

正弦関数 $\sin x$ は連続なので $\lim_{t\to 0}\sin(a+t)=\sin\left\{\lim_{t\to 0}(a+t)\right\}=\sin a$ ． また $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ ． よって

$$\lim_{t\to 0}\left\{-\sin(a+t)\,\frac{\sin t}{t}\right\} = -\lim_{t\to 0}\sin(a+t)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = -\sin a\cdot 1 = -\sin a .$$

実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}=-\sin a$ である.

定理　任意の実数 a に対して，a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \cos a\ ,$$

a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = -\sin a\ .$$

$\boxed{例}$ $\dfrac{2\pi}{3}$ における余弦関数 $\cos x$ の微分係数を求める.

実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $-\sin a$ である.

例 $\dfrac{2\pi}{3}$ における余弦関数 $\cos x$ の微分係数を求める.

実数 a における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は $-\sin a$ である.

$\dfrac{2\pi}{3}$ における余弦関数 $\cos x$ の微分係数は

$$-\sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

終

$\boxed{\text{問}}$ $\dfrac{5\pi}{6}$ における正弦関数 $\sin x$ の微分係数を求めよ.

実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\cos a$ である.

問 $\dfrac{5\pi}{6}$ における正弦関数 $\sin x$ の微分係数を求めよ.

実数 a における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は $\cos a$ である.

$\dfrac{5\pi}{6}$ における正弦関数 $\sin x$ の微分係数は

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べる．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べる．

$$f(a+h) - f(a) = \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2\cos\frac{5(2a+h)}{2}\sin\frac{5h}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べる．

$$
\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2\cos\frac{5(2a+h)}{2}\sin\frac{5h}{2} \\
&= 2\cos\left(5a + \frac{5h}{2}\right)\sin\frac{5h}{2} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べる．

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sin\{5(a+h)\} - \sin 5a = 2\cos\frac{5(2a+h)}{2}\sin\frac{5h}{2} \\ &= 2\cos\left(5a + \frac{5h}{2}\right)\sin\frac{5h}{2} \quad . \end{aligned}$$

変数 x を $x = \dfrac{5h}{2}$ とおく． $h = \dfrac{2x}{5}$ なので，

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\sin 5x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べる．

$$f(a+h)-f(a)=\sin\{5(a+h)\}-\sin 5a = 2\cos\frac{5(2a+h)}{2}\sin\frac{5h}{2}$$
$$=2\cos\left(5a+\frac{5h}{2}\right)\sin\frac{5h}{2}\ .$$

変数 x を $x=\dfrac{5h}{2}$ とおく． $h=\dfrac{2x}{5}$ なので，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{2\cos\left(5a+\frac{5h}{2}\right)\sin\frac{5h}{2}}{h}=\frac{2\cos(5a+x)\sin x}{\frac{2x}{5}}$$
$$=5\cos(5a+x)\frac{\sin x}{x}\ .$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 5\cos(5a+x)\,\frac{\sin x}{x} \quad .$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 5\cos(5a+x)\frac{\sin x}{x} \quad .$$

$h \to 0$ のとき $x = \dfrac{5h}{2} \to 0$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 5\cos(5a+x)\frac{\sin x}{x} \quad .$$

$h \to 0$ のとき $x = \dfrac{5h}{2} \to 0$. 余弦関数 $\cos x$ は連続なので

$$\lim_{x\to 0}\cos(5a+x) = \cos\left\{\lim_{x\to 0}(5a+x)\right\} = \cos(5a) \quad .$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 5\cos(5a+x)\,\frac{\sin x}{x} \quad .$$

$h \to 0$ のとき $x = \dfrac{5h}{2} \to 0$. 余弦関数 $\cos x$ は連続なので

$$\lim_{x\to 0}\cos(5a+x) = \cos\left\{\lim_{x\to 0}(5a+x)\right\} = \cos(5a) \quad .$$

また $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 5\cos(5a+x)\,\frac{\sin x}{x} \ .$$

$h \to 0$ のとき $x = \dfrac{5h}{2} \to 0$ ． 余弦関数 $\cos x$ は連続なので

$$\lim_{x\to 0}\cos(5a+x) = \cos\left\{\lim_{x\to 0}(5a+x)\right\} = \cos(5a) \ .$$

また $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ． 実数 a における f の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{x\to 0}\left\{5\cos(5a+x)\,\frac{\sin x}{x}\right\}\\ &= 5\left\{\lim_{x\to 0}\cos(5a+x)\right\}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\\ &= 5\cos(5a)\cdot 1\\ &= 5\cos 5a \ .\end{aligned}$$

$\boxed{問2.8}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\cos 3x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べよ．

$$f(a+h)-f(a) = \cos\{\qquad\qquad\qquad\} - \cos\qquad = -2\sin\frac{\qquad\qquad\qquad}{2}\sin\frac{\qquad}{2}$$

$$= -2\sin\left(\qquad\qquad\qquad\right)\sin\qquad\quad .$$

変数 x を $x=\qquad$ とおく． $h=\qquad$ なので，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-2\sin\left(\qquad\qquad\qquad\right)\sin\qquad}{h} = -\frac{2\sin(\qquad\qquad)\sin\qquad}{\qquad}$$

$$= \qquad\sin(\qquad\qquad)\frac{\sin\qquad}{\qquad}\quad .$$

$\boxed{問2.8}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \cos 3x$ と定める．微分係数の定義に直接従って，実数 a における関数 f の微分係数を調べる．

$$
\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= \cos\{3(a+h)\} - \cos 3a = -2\sin\frac{3(2a+h)}{2}\sin\frac{3h}{2} \\
&= -2\sin\left(3a + \frac{3h}{2}\right)\sin\frac{3h}{2}\ .
\end{aligned}
$$

変数 x を $x = \dfrac{3h}{2}$ とおく． $h = \dfrac{2x}{3}$ なので，

$$
\begin{aligned}
\frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{-2\sin\left(3a + \frac{3h}{2}\right)\sin\frac{3h}{2}}{h} = -\frac{2\sin(3a+x)\sin x}{\frac{2x}{3}} \\
&= -3\sin(3a+x)\frac{\sin x}{x}\ .
\end{aligned}
$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -3\sin(3a+x)\,\frac{\sin x}{x} \ .$$

$h \to 0$ のとき $x = \dfrac{3h}{2} \to 0$ ． 正弦関数 $\sin x$ は連続なので

$$\lim_{x\to 0}\sin(3a+x) = \sin\left\{\lim_{x\to 0}(3a+x)\right\} = \sin(3a) \ .$$

また $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ． a における f の微分係数は

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{x\to 0}\left\{-3\sin(3a+x)\,\frac{\sin x}{x}\right\}\\ &= -3\left\{\lim_{x\to 0}\sin(3a+x)\right\}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\\ &= -3\sin(3a)\cdot 1\\ &= -3\sin 3a \ .\end{aligned}$$

終