

2.9 対数関数の微分係数

対数関数の微分係数を調べるためにまず定理を一つ準備する. その証明は難しいので省略する.

対数関数の微分係数を調べるためにまず定理を一つ準備する. その証明は難しいので省略する.

定理 0 以外の 0 に近い実数を表す変数 x に対して, $x \rightarrow 0$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ はある正の実数に収束する.

対数関数の微分係数を調べるためにまず定理を一つ準備する. その証明は難しいので省略する.

定理 0 以外の 0 に近い実数を表す変数 x に対して, $x \rightarrow 0$ のとき $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ はある正の実数に収束する.

実際に変数 x の値を 0 に近づけていくときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値を調べる.

x の値	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値
0.01	2.7048138...
0.0001	2.7181459...
0.000001	2.7182805...
0.00000001	2.7182818...

x の値	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の値
-0.01	2.7319990...
-0.0001	2.7184178...
-0.000001	2.7182832...
-0.00000001	2.7182818...

精密に計算すると次のようになる :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の極限値を e と書き表す :

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots .$$

変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の極限値を e と書き表す：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

この定数 e は自然対数の底といわれ、解析学において大変重要な定数である。

変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の極限値を e と書き表す：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

この定数 e は自然対数の底といわれ、解析学において大変重要な定数である。

自然対数の底 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ は実数であるが有理数ではない；つまり無理数である。

変数 x について $x \rightarrow 0$ のときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の極限値を e と書き表す：

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828459045 \dots$$

この定数 e は自然対数の底といわれ、解析学において大変重要な定数である。

自然対数の底 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ は実数であるが有理数ではない；つまり無理数である。自然対数の底 e の値は約 2.72 と覚えよ。

関数 f の定義域の実数 a について、 $h \rightarrow 0$ のとき $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が

収束するならば、関数 f は a において微分可能であるといい、極限值

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という。

関数 f の定義域の実数 a について、 $h \rightarrow 0$ のとき $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が収束するならば、関数 f は a において微分可能であるといい、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という。

実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする。正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h}$ を調べる。

関数 f の定義域の実数 a について、 $h \rightarrow 0$ のとき $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が収束するならば、関数 f は a において微分可能であるといい、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という。

実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする。正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h}$ を調べる。対数の性質より

$$\log_a(b+h) - \log_a b = \log_a \frac{b+h}{b} = \log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right) .$$

関数 f の定義域の実数 a について、 $h \rightarrow 0$ のとき $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が収束するならば、関数 f は a において微分可能であるといい、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ を a における f の微分係数という。

実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする. 正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h}$ を調べる. 対数の性質より

$$\log_a(b+h) - \log_a b = \log_a \frac{b+h}{b} = \log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right).$$

$t = \frac{h}{b}$ とおく. $h = bt$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} &= \frac{\log_a \left(1 + \frac{h}{b}\right)}{h} = \frac{\log_a(1+t)}{bt} = \frac{1}{b} \frac{1}{t} \log_a(1+t) \\ &= \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}. \end{aligned}$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$ で b は正の定数なので, $h \rightarrow 0$ のとき, $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$.

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$ で b は正の定数なので, $h \rightarrow 0$ のとき, $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$. よって,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} .$$

変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ について, $f(x) = g(y)$ で, 定数 a と b について, 変数 x について $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow b$, $y \neq b$ とする. $y \rightarrow b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) .$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$ で b は正の定数なので, $h \rightarrow 0$ のとき, $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$. よって,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$ で b は正の定数なので, $h \rightarrow 0$ のとき, $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$. よって,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

ここで $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e > 0$ なので,

$$\frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{b} \log_a \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \log_a e = \frac{\log_a e}{b} .$$

$$\frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

$t = \frac{h}{b}$ で b は正の定数なので, $h \rightarrow 0$ のとき, $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$. よって,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{b} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} .$$

ここで $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e > 0$ なので,

$$\frac{1}{b} \lim_{t \rightarrow 0} \log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{b} \log_a \left\{ \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \right\} = \frac{1}{b} \log_a e = \frac{\log_a e}{b} .$$

故に, 対数関数 $\log_a x$ の b における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} .$$

自然対数の底 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\dots$ について, $e > 0$ かつ $e \neq 1$ なので, 正の各実数 x に対して定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を考えることができる.

自然対数の底 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\dots$ について, $e > 0$ かつ $e \neq 1$ なので, 正の各実数 x に対して定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を考えることができる. 定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を自然対数といい, $\ln x$ と書き表す:

$$\ln x = \log_e x .$$

自然対数の底 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\dots$ について、 $e > 0$ かつ $e \neq 1$ なので、正の各実数 x に対して定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を考えることができる。定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を自然対数といい、 $\ln x$ と書き表す：

$$\ln x = \log_e x .$$

正の実数 b に対して、自然対数の対数関数 $\ln x = \log_e x$ の b における微分係数は、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(b+h) - \ln b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(b+h) - \log_e b}{h} = \frac{\log_e e}{b} = \frac{1}{b} .$$

自然対数の底 $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 2.718281828\dots$ について、 $e > 0$ かつ $e \neq 1$ なので、正の各実数 x に対して定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を考えることができる。定数 e を底とする対数 $\log_e x$ を自然対数といい、 $\ln x$ と書き表す：

$$\ln x = \log_e x .$$

正の実数 b に対して、自然対数の対数関数 $\ln x = \log_e x$ の b における微分係数は、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(b+h) - \ln b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e(b+h) - \log_e b}{h} = \frac{\log_e e}{b} = \frac{1}{b} .$$

このように、自然対数の対数関数の微分係数は簡単な式で表される。

定理 実数 a について $a > 0$, $a \neq 1$ とする. 正の実数 b に対して, a を底とする対数関数 $\log_a x$ の b における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(b+h) - \log_a b}{h} = \frac{\log_a e}{b} .$$

特に, 自然対数の底 e を底とする対数関数 $\ln x = \log_e x$ の b における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(b+h) - \ln b}{h} = \frac{1}{b} .$$

例 5 における対数関数 $\log_3 x$ の微分係数を求める.

正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\frac{\log_a e}{b}$ である.

例 5 における対数関数 $\log_3 x$ の微分係数を求める.

正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\frac{\log_a e}{b}$ である.

5 における対数関数 $\log_3 x$ の微分係数は $\frac{\log_3 e}{5}$ である.

終

問 7 における対数関数 $\log_5 x$ の微分係数を求めよ.

正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\frac{\log_a e}{b}$ である.

問 7 における対数関数 $\log_5 x$ の微分係数を求めよ.

正の実数 b における対数関数 $\log_a x$ の微分係数は $\frac{\log_a e}{b}$ である.

7 における対数関数 $\log_5 x$ の微分係数は $\frac{\log_5 e}{7}$ である.

終

数学では対数を考えるときは多くの場合自然対数を考える. そのため, 正の実数 x の自然対数 $\log_e x$ の底を略して $\log x$ と記す.

数学では対数を考えるときは多くの場合自然対数を考える. そのため, 正の実数 x の自然対数 $\log_e x$ の底を略して $\log x$ と記す. つまり, 数学では, 正の実数 x に対して, $\log x$ は自然対数 $\log_e x$ を意味する:

$$\log x = \log_e x = \ln x .$$

数学では対数を考えるときは多くの場合自然対数を考える。そのため、正の実数 x の自然対数 $\log_e x$ の底を略して $\log x$ と記す。つまり、数学では、正の実数 x に対して、 $\log x$ は自然対数 $\log_e x$ を意味する：

$$\log x = \log_e x = \ln x .$$

また、工学では常用対数 $\log_{10} x$ を $\log X$ と略記することがある。なので、 $\log x$ は自然対数 $\log_e x$ を意味するときと常用対数 $\log_{10} x$ を意味するときとがある。