3.3 関数の積・商の微分法

次のことが基本になる：関数 φ について、変数 x の増分 Δx に対する $\varphi(x)$ の増分 $\Delta\varphi(x)$ は

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) ;$$

関数 $\varphi(x)$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} .$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x) , \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x) .$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x) , \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x) .$$

変数 x の増分 Δx に対して, $f(x)$ の増分 $\Delta f(x)$ 及び $g(x)$ の増分 $\Delta g(x)$ は

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) , \quad \Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x) ;$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x) , \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x) .$$

変数 x の増分 Δx に対して, $f(x)$ の増分 $\Delta f(x)$ 及び $g(x)$ の増分 $\Delta g(x)$ は

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) , \quad \Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x) ;$$

よって,

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) .$$

関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは微分可能であるとする.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x), \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x).$$

変数 x の増分 Δx に対して, $f(x)$ の増分 $\Delta f(x)$ 及び $g(x)$ の増分 $\Delta g(x)$ は

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x), \quad \Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x);$$

よって,

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x), \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x).$$

関数 $f(x)g(x)$ の導関数

$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \{f(x)g(x)\}}{\Delta x}$$

を考える.

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) \ , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) \ .$$

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $f(x)g(x)$ は $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$ に変化するので,

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $f(x)g(x)$ は $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$ に変化するので, その増分 $\Delta\{f(x)g(x)\}$ は

$$\Delta\{f(x)g(x)\} = f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)$$

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) \quad , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) \quad .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $f(x)g(x)$ は $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$ に変化するので, その増分 $\Delta\{f(x)g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\Delta\{f(x)g(x)\} &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{\Delta f(x) + f(x)\}g(x + \Delta x) - f(x)g(x)\end{aligned}$$

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $f(x)g(x)$ は $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$ に変化するので, その増分 $\Delta\{f(x)g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\Delta\{f(x)g(x)\} &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{\Delta f(x) + f(x)\}g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)\end{aligned}$$

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $f(x)g(x)$ は $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$ に変化するので, その増分 $\Delta\{f(x)g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\Delta\{f(x)g(x)\} &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{\Delta f(x) + f(x)\}g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\{\Delta g(x) + g(x)\} - f(x)g(x)\end{aligned}$$

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $f(x)g(x)$ は $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$ に変化するので, その増分 $\Delta\{f(x)g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\Delta\{f(x)g(x)\} &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{\Delta f(x) + f(x)\}g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\{\Delta g(x) + g(x)\} - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x)\end{aligned}$$

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $f(x)g(x)$ は $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$ に変化するので, その増分 $\Delta\{f(x)g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\Delta\{f(x)g(x)\} &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{\Delta f(x) + f(x)\}g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\{\Delta g(x) + g(x)\} - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x) .\end{aligned}$$

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) \quad , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) \quad .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき、 $f(x)g(x)$ は $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$ に変化するので、その増分 $\Delta\{f(x)g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\Delta\{f(x)g(x)\} &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{\Delta f(x) + f(x)\}g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\{\Delta g(x) + g(x)\} - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x) \quad .\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x)}{\Delta x}$$

$$f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + f(x) , \quad g(x + \Delta x) = \Delta g(x) + g(x) .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $f(x)g(x)$ は $f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)$ に変化するので, その増分 $\Delta\{f(x)g(x)\}$ は

$$\begin{aligned}\Delta\{f(x)g(x)\} &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \{\Delta f(x) + f(x)\}g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x)\{\Delta g(x) + g(x)\} - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x) \\ &= \Delta f(x)g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x) .\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} &= \frac{\Delta f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \Delta g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} .\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} .$$

$$\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする.

$$\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$.

$$\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$. 関数 g は微分可能なので連続であるから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)\right) = g(x)$.

$$\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$. 関数 g は微分可能なので連続であるから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)\right) = g(x)$. $f(x)$ は Δx と無関係である.

$$\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$. 関数 g は微分可能なので連続であるから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)\right) = g(x)$. $f(x)$ は Δx と無関係である. これらのことより,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right\}$$

$$\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$. 関数 g は微分可能なので連続であるから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)\right) = g(x)$. $f(x)$ は Δx と無関係である. これらのことより,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$. 関数 g は微分可能なので連続であるから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)\right) = g(x)$. $f(x)$ は Δx と無関係である. これらのことより,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) . \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} f(x)$, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$. 関数 g は微分可能なので連続であるから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)\right) = g(x)$. $f(x)$ は Δx と無関係である. これらのことより,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) . \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\{f(x)g(x)\}}{\Delta x} \quad \text{なので}$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) .$$

定理 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して, 関数 $f(x)g(x)$ は微分可能であり,

$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} g(x) + f(x) \left\{ \frac{d}{dx} g(x) \right\} .$$

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 \sin x$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 \sin x$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求める.

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} (x^3 \sin x) =$$

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 \sin x$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求める.

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} (x^3 \sin x) = \frac{d}{dx} x^3 \cdot \sin x + x^3 \frac{d}{dx} \sin x$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 \sin x$ と定める. 関数 g の導関数 g' を求める.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} (x^3 \sin x) = \frac{d}{dx} x^3 \cdot \sin x + x^3 \frac{d}{dx} \sin x \\ &= 3x^2 \sin x + x^3 \cos x . \end{aligned}$$

終

問3.3.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin x \cos x$ と定める. 関数 f の導関数 f' を求めよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin x \cos x) =$$

問3.3.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin x \cos x$ と定める. 関数 f の導関数 f' を求めよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(\sin x \cos x) = \frac{d}{dx} \sin x \cdot \cos x + \sin x \frac{d}{dx} \cos x \\ &= \cos x \cos x + \sin x (-\sin x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x . \end{aligned}$$

終

次のことが基本になる：関数 φ について、変数 x の増分 Δx に対する $\varphi(x)$ の増分 $\Delta\varphi(x)$ は

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) ;$$

関数 $\varphi(x)$ の導関数は

$$\frac{d}{dx}\varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(x)}{\Delta x} .$$

関数 $g(x)$ は微分可能であるとする.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x) .$$

関数 $g(x)$ は微分可能であるとする.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x) .$$

変数 x の増分 Δx に対する $g(x)$ の増分 $\Delta g(x)$ は

$$\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x) ;$$

よって

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g(x) .$$

関数 $g(x)$ は微分可能であるとする.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x) .$$

変数 x の増分 Δx に対する $g(x)$ の増分 $\Delta g(x)$ は

$$\Delta g(x) = g(x + \Delta x) - g(x) ;$$

よって

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g(x) .$$

関数 $\frac{1}{g(x)}$ の導関数

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x}$$

を考える.

$$\frac{d}{dx} \varphi(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g(x) .$$

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g(x) .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $\frac{1}{g(x)}$ は $\frac{1}{g(x + \Delta x)}$ に変化するので, その増

分 $\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}$ は

$$\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\} = \frac{1}{g(x + \Delta x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)}$$

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g(x) .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $\frac{1}{g(x)}$ は $\frac{1}{g(x + \Delta x)}$ に変化するので, その増

分 $\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}$ は

$$\begin{aligned} \Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\} &= \frac{1}{g(x + \Delta x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)} = \frac{g(x) - \{g(x) + \Delta g(x)\}}{g(x + \Delta x)g(x)} \\ &= -\frac{\Delta g(x)}{g(x + \Delta x)g(x)} . \end{aligned}$$

$$g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g(x) .$$

x が $x + \Delta x$ に変化するとき, $\frac{1}{g(x)}$ は $\frac{1}{g(x + \Delta x)}$ に変化するので, その増

分 $\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}$ は

$$\begin{aligned} \Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\} &= \frac{1}{g(x + \Delta x)} - \frac{1}{g(x)} = \frac{g(x) - g(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)g(x)} = \frac{g(x) - \{g(x) + \Delta g(x)\}}{g(x + \Delta x)g(x)} \\ &= -\frac{\Delta g(x)}{g(x + \Delta x)g(x)} . \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta g(x)}{g(x)g(x + \Delta x)}}{\Delta x} = -\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)} .$$

$$\frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = -\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)} .$$

$$\frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = -\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする.

$$\frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = - \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x) .$

$$\frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = - \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$. 関数 g は微分可能なので連続であるから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)\right) = g(x)$.

$$\frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = - \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x + \Delta x)} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$. 関数 g は微分可能なので連続であるから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x + \Delta x)\right) = g(x)$. $g(x)$ は Δx と無関係である.

$$\frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = - \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$. 関数 g は微分可能なので連続であるから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x+\Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x+\Delta x)\right) = g(x)$. $g(x)$ は Δx と無関係である. これらのことより,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ - \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)} \right\}$$

$$\frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = - \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)} .$$

$\Delta x \rightarrow 0$ とする. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx} g(x)$. 関数 g は微分可能なので連続であるから, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x+\Delta x) = g\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x+\Delta x)\right) = g(x)$. $g(x)$ は Δx と無関係である. これらのことより,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ - \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \frac{1}{g(x)g(x+\Delta x)} \right\} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x+\Delta x)} = - \frac{d}{dx} g(x) \cdot \frac{1}{g(x)g(x)} \\ &= - \frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} . \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} .$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} .$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} \quad \text{よ} \quad \text{の} \quad \text{で}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} .$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} = -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} .$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}}{\Delta x} \quad \text{なので}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} .$$

定理 微分可能な関数 $g(x)$ に対して、関数 $\frac{1}{g(x)}$ は $g(x) \neq 0$ のとき微分可能であり、

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0) .$$

定理 微分可能な関数 $g(x)$ に対して、関数 $\frac{1}{g(x)}$ は微分可能であり、

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0).$$

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ を微分する.

定理 微分可能な関数 $g(x)$ に対して、関数 $\frac{1}{g(x)}$ は微分可能であり、

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0).$$

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ を微分する.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx} \left\{ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right\} = \frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{d}{dx} \{ \varphi(x) \psi(x) \} = \frac{d}{dx} \varphi(x) \cdot \psi(x) + \varphi(x) \cdot \frac{d}{dx} \psi(x) \end{aligned}$$

定理 微分可能な関数 $g(x)$ に対して、関数 $\frac{1}{g(x)}$ は微分可能であり、

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0).$$

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ を微分する.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx} \left\{ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right\} = \frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{g(x)} + f(x) \left\{ -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \right\} = \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

定理 微分可能な関数 $g(x)$ に対して、関数 $\frac{1}{g(x)}$ は微分可能であり、

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0).$$

微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ を微分する.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx} \left\{ f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} \right\} = \frac{d}{dx} f(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{g(x)} + f(x) \left\{ -\frac{\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \right\} = \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2}. \end{aligned}$$

定理 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ とに対して, 関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は $g(x) \neq 0$ のとき微分可能であり,

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0) .$$

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{5}{2 \cos x + 3}$ と定める. 各実数 x について, $\sin x \geq -1$ なので, $2 \sin x \geq -2$, $2 \sin x + 3 \geq 1$. $2 \cos x + 3$ の値が 0 であることはない.

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{5}{2 \cos x + 3}$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} \frac{5}{2 \cos x + 3} = 5 \frac{d}{dx} \frac{1}{2 \cos x + 3}$$

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{5}{2 \cos x + 3}$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} \frac{5}{2 \cos x + 3} = 5 \frac{d}{dx} \frac{1}{2 \cos x + 3} \\ &= 5 \frac{-\frac{d}{dx} (2 \cos x + 3)}{(2 \cos x + 3)^2} \qquad \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \frac{-\frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{5}{2 \cos x + 3}$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} \frac{5}{2 \cos x + 3} = 5 \frac{d}{dx} \frac{1}{2 \cos x + 3} \\ &= 5 \frac{-\frac{d}{dx} (2 \cos x + 3)}{(2 \cos x + 3)^2} = 5 \frac{-2(-\sin x)}{(2 \cos x + 3)^2} \\ &= \frac{10 \sin x}{(2 \cos x + 3)^2} .\end{aligned}$$

別の公式を用いても計算できる.

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{5}{2 \cos x + 3}$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} \frac{5}{2 \cos x + 3}$$

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{5}{2 \cos x + 3}$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} \frac{5}{2 \cos x + 3} \\ &= \frac{\frac{d}{dx} 5 \cdot (2 \cos x + 3) - 5 \frac{d}{dx} (2 \cos x + 3)}{(2 \cos x + 3)^2} \\ &= \frac{0 - 5 \cdot 2(-\sin x)}{(2 \cos x + 3)^2} \quad \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{10 \sin x}{(2 \cos x + 3)^2} .\end{aligned}$$

終

問3.3.2 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3 \sin x + 4}$ と定める. 関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ.

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx} \frac{2}{3 \sin x + 4} =$$

問3.3.2 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3 \sin x + 4}$ と定める. 関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ.

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{2}{3 \sin x + 4} = -\frac{2 \frac{d}{dx} (3 \sin x + 4)}{(3 \sin x + 4)^2} = -\frac{2 \cdot 3 \frac{d}{dx} \sin x}{(3 \sin x + 4)^2} \\ &= -\frac{6 \cos x}{(3 \sin x + 4)^2} .\end{aligned}$$

終

例 変数 t の関数 $x = \frac{\sin t}{t^3}$ を微分する.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{t^3}$$

例 変数 t の関数 $x = \frac{\sin t}{t^3}$ を微分する.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{t^3} = \frac{\frac{d}{dt} \sin t \cdot t^3 - \sin t \cdot \frac{d}{dt} t^3}{(t^3)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2}$$

例 変数 t の関数 $x = \frac{\sin t}{t^3}$ を微分する.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{t^3} = \frac{\frac{d}{dt} \sin t \cdot t^3 - \sin t \cdot \frac{d}{dt} t^3}{(t^3)^2} = \frac{\cos t \cdot t^3 - \sin t \cdot 3t^2}{t^6}$$

例 変数 t の関数 $x = \frac{\sin t}{t^3}$ を微分する.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\sin t}{t^3} = \frac{\frac{d}{dt} \sin t \cdot t^3 - \sin t \cdot \frac{d}{dt} t^3}{(t^3)^2} = \frac{\cos t \cdot t^3 - \sin t \cdot 3t^2}{t^6} \\ &= \frac{t \cos t - 3 \sin t}{t^4} .\end{aligned}$$

終

問3.3.3 変数 u の関数 $v = \frac{\cos u}{u^4}$ を微分せよ.

$$\frac{dv}{du} = \frac{d}{du} \frac{\cos u}{u^4} =$$

問3.3.3 変数 u の関数 $v = \frac{\cos u}{u^4}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{d}{du} \frac{\cos u}{u^4} = \frac{\frac{d}{du} \cos u \cdot u^4 - \cos u \cdot \frac{d}{du} u^4}{(u^4)^2} \\ &= \frac{-\sin u \cdot u^4 - \cos u \cdot 4u^3}{u^8} \\ &= -\frac{u \sin u + 4 \cos u}{u^5} .\end{aligned}$$

終

例 変数 u の関数 $\frac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

例 変数 u の関数 $\frac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

$$\frac{d}{du} \frac{4u-5}{u^2+3} = \frac{\frac{d}{du}(4u-5) \cdot (u^2+3) - (4u-5) \frac{d}{du}(u^2+3)}{(u^2+3)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2}$$

例 変数 u の関数 $\frac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \frac{4u-5}{u^2+3} &= \frac{\frac{d}{du}(4u-5) \cdot (u^2+3) - (4u-5) \frac{d}{du}(u^2+3)}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{4(u^2+3) - (4u-5) \cdot 2u}{(u^2+3)^2}\end{aligned}$$

例 変数 u の関数 $\frac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \frac{4u-5}{u^2+3} &= \frac{\frac{d}{du}(4u-5) \cdot (u^2+3) - (4u-5) \frac{d}{du}(u^2+3)}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{4(u^2+3) - (4u-5) \cdot 2u}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{4u^2 + 12 - 8u^2 + 10u}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{-4u^2 + 10u + 12}{(u^2+3)^2}\end{aligned}$$

例 変数 u の関数 $\frac{4u-5}{u^2+3}$ を微分する.

$$\begin{aligned}\frac{d}{du} \frac{4u-5}{u^2+3} &= \frac{\frac{d}{du}(4u-5) \cdot (u^2+3) - (4u-5) \frac{d}{du}(u^2+3)}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{4(u^2+3) - (4u-5) \cdot 2u}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{4u^2 + 12 - 8u^2 + 10u}{(u^2+3)^2} \\ &= \frac{-4u^2 + 10u + 12}{(u^2+3)^2} \\ &= -\frac{4u^2 - 10u - 12}{(u^2+3)^2} .\end{aligned}$$

終

問3.3.4 変数 x の関数 $y = \frac{5x - 3}{x^2 - 4}$ を微分せよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{5x - 3}{x^2 - 4} =$$

問3.3.4 変数 x の関数 $y = \frac{5x-3}{x^2-4}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{5x-3}{x^2-4} = \frac{\frac{d}{dx}(5x-3) \cdot (x^2-4) - (5x-3) \frac{d}{dx}(x^2-4)}{(x^2-4)^2} \\ &= \frac{5(x^2-4) - (5x-3) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} \\ &= -\frac{5x^2-6x+20}{(x^2-4)^2} .\end{aligned}$$

終

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は、 f の導関数 f' の a における値 $f'(a)$ である.

例 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \ln x$ と定める.
自然対数の底 e に対して, e^3 における f の微分係数を求める.

例 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \ln x$ と定める.
自然対数の底 e に対して, e^3 における f の微分係数を求める.

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は, f の導関数 f' の a における値 $f'(a)$ である.

例 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \ln x$ と定める.
自然対数の底 e に対して, e^3 における f の微分係数を求める.

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は, f の導関数 f' の a における値 $f'(a)$ である.

f の導関数 f' は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = \frac{d}{dx} x^2 \cdot \ln x + x^2 \frac{d}{dx} \ln x$$
$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

例 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \ln x$ と定める.
自然対数の底 e に対して, e^3 における f の微分係数を求める.

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は, f の導関数 f' の a における値 $f'(a)$ である.

f の導関数 f' は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = \frac{d}{dx} x^2 \cdot \ln x + x^2 \frac{d}{dx} \ln x = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \\ &= x(1 + 2 \ln x) . \end{aligned}$$

例 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^2 \ln x$ と定める。
自然対数の底 e に対して、 e^3 における f の微分係数を求める。

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は、 f の導関数 f' の a における値 $f'(a)$ である。

f の導関数 f' は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = \frac{d}{dx} x^2 \cdot \ln x + x^2 \frac{d}{dx} \ln x = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} \\ &= x(1 + 2 \ln x) . \end{aligned}$$

e^3 における f の微分係数は、

$$\begin{aligned} f'(e^3) &= e^3(1 + 2 \ln e^3) = e^3(1 + 2 \cdot 3) = 7e^3 . \\ \ln e^3 &= \log_e e^3 = 3 \end{aligned}$$

終

問3.3.5 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \ln x$ と定める. 自然対数の底 e に対して, e^4 における f の微分係数を求めよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 \ln x) =$$

e^4 における f の微分係数は,

$$f'(e^4) =$$

問3.3.5 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \ln x$ と定める. 自然対数の底 e に対して, e^4 における f の微分係数を求めよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 \ln x) = \frac{d}{dx} x^3 \cdot \ln x + x^3 \frac{d}{dx} \ln x = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} \\ &= x^2(1 + 3 \ln x) . \end{aligned}$$

e^4 における f の微分係数は,

$$f'(e^4) = \quad .$$

問3.3.5 正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \ln x$ と定める. 自然対数の底 e に対して, e^4 における f の微分係数を求めよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 \ln x) = \frac{d}{dx} x^3 \cdot \ln x + x^3 \frac{d}{dx} \ln x = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} \\ &= x^2(1 + 3 \ln x) . \end{aligned}$$

e^4 における f の微分係数は,

$$f'(e^4) = (e^4)^2(1 + 3 \ln e^4) = e^8(1 + 3 \cdot 4) = 13e^8 .$$

終