

3.4 いくつかの関数の導関数

正接関数 $\tan x$ ($\cos x \neq 0$) を微分する.

正接関数 $\tan x$ ($\cos x \neq 0$) を微分する. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ として, 微分可能

な関数 $f(x)$ と $g(x)$ について

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} g(x) - f(x) \left\{ \frac{d}{dx} g(x) \right\}}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

であること, 及び微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ と $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ とを用いる.

正接関数 $\tan x$ ($\cos x \neq 0$) を微分する. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ として, 微分可能な関数 $f(x)$ と $g(x)$ について

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} g(x) - f(x) \left\{ \frac{d}{dx} g(x) \right\}}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

であること, 及び微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ と $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ を用いる.

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{d}{dx} \sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \frac{d}{dx} \cos x}{(\cos x)^2}$$

正接関数 $\tan x$ ($\cos x \neq 0$) を微分する. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ として, 微分可能

な関数 $f(x)$ と $g(x)$ について

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} g(x) - f(x) \left\{ \frac{d}{dx} g(x) \right\}}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

であること, 及び微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ と $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ とを用いる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{d}{dx} \sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \frac{d}{dx} \cos x}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

正接関数 $\tan x$ ($\cos x \neq 0$) を微分する. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ として, 微分可能

な関数 $f(x)$ と $g(x)$ について

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} g(x) - f(x) \left\{ \frac{d}{dx} g(x) \right\}}{g(x)^2} \quad (g(x) \neq 0)$$

であること, 及び微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ と $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ を用いる.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \tan x &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{d}{dx} \sin x \cdot \cos x - \sin x \cdot \frac{d}{dx} \cos x}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} . \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

正割関数 $\sec x$ は $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ と定義されたので,

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x .$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

正割関数 $\sec x$ は $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ と定義されたので,

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x .$$

更に, $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ なので,

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x .$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

正割関数 $\sec x$ は $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ と定義されたので,

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x .$$

更に, $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ なので,

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x .$$

定理 正接関数 $\tan x$ の導関数は

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \quad (\cos x \neq 0) .$$

例 区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{\tan x}{x^2}$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

例 区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{\tan x}{x^2}$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx} \frac{\tan x}{x^2} = \frac{\frac{d}{dx} \tan x \cdot x^2 - \tan x \cdot \frac{d}{dx} x^2}{(x^2)^2}$$
$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2}$$

例 区間 $(0, \frac{\pi}{2})$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \frac{\tan x}{x^2}$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx} \frac{\tan x}{x^2} = \frac{\frac{d}{dx} \tan x \cdot x^2 - \tan x \cdot \frac{d}{dx} x^2}{(x^2)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x \cdot x^2 - \tan x \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{x \sec^2 x - 2 \tan x}{x^3} .\end{aligned}$$

終

問3.4.1 区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \tan x$ と定める.
 f の導関数 f' を求めよ.

問3.4.1 区間 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 \tan x$ と定める.
 f の導関数 f' を求めよ.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 \tan x) = \frac{d}{dx}x^3 \cdot \tan x + x^3 \frac{d}{dx} \tan x \\ &= 3x^2 \tan x + x^3 \sec^2 x \\ &= x^2(3 \tan x + x \sec^2 x) . \end{aligned}$$

終

問3.4.2 変数 t の関数 $x = \frac{\tan t}{t^3}$ を微分せよ.

問3.4.2 変数 t の関数 $x = \frac{\tan t}{t^3}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\tan t}{t^3} = \frac{\frac{d}{dt} \tan t \cdot t^3 - \tan t \frac{d}{dt} t^3}{(t^3)^2} \\ &= \frac{\sec^2 t \cdot t^3 - \tan t \cdot 3t^2}{t^6} \\ &= \frac{t \sec^2 t - 3 \tan t}{t^4} .\end{aligned}$$

終

例 冪関数 x^{-3} ($x \neq 0$) を微分する： $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ なので、

$$\frac{d}{dx}x^{-3} = \frac{d}{dx}\frac{1}{x^3} = -\frac{\frac{d}{dx}x^3}{(x^3)^2} = -\frac{3x^2}{x^6} = -3\frac{1}{x^4} = -3x^{-4} .$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)} = -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2}$$

終

整数 n について冪関数 x^n ($x \neq 0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ を考える.

整数 n について冪関数 x^n ($x \neq 0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ を考える.

$n \geq 1$ のとき, $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$.

整数 n について冪関数 x^n ($x \neq 0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ を考える.

$$n \geq 1 \text{ のとき, } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

$$n = 0 \text{ のとき, } \frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^0 = \frac{d}{dx}1 = 0 , \text{ また } nx^{n-1} = 0 \cdot x^{0-1} = 0 ,$$

$$\text{従って } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

整数 n について冪関数 x^n ($x \neq 0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ を考える.

$$n \geq 1 \text{ のとき, } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

$$n = 0 \text{ のとき, } \frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^0 = \frac{d}{dx}1 = 0 , \text{ また } nx^{n-1} = 0 \cdot x^{0-1} = 0 ,$$

$$\text{従って } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

$n \leq -1$ のとき, 正の整数 m に対して $n = -m$ とする; $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^n &= \frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^m} = -\frac{\frac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} \\ &= -\frac{\frac{d}{dx}g(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

整数 n について冪関数 x^n ($x \neq 0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ を考える。

$$n \geq 1 \text{ のとき, } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

$$n = 0 \text{ のとき, } \frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^0 = \frac{d}{dx}1 = 0 , \text{ また } nx^{n-1} = 0 \cdot x^{0-1} = 0 ,$$

$$\text{従って } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

$n \leq -1$ のとき, 正の整数 m に対して $n = -m$ とする; $\frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^n &= \frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^m} = -\frac{\frac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} \\ &= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1} \\ &= nx^{n-1} . \end{aligned}$$

整数 n について冪関数 x^n ($x \neq 0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^n$ を考える。

$$n \geq 1 \text{ のとき, } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

$$n = 0 \text{ のとき, } \frac{d}{dx}x^n = \frac{d}{dx}x^0 = \frac{d}{dx}1 = 0 , \text{ また } nx^{n-1} = 0 \cdot x^{0-1} = 0 ,$$

$$\text{従って } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

$$n \leq -1 \text{ のとき, 正の整数 } m \text{ に対して } n = -m \text{ とする; } \frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1} ,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}x^n &= \frac{d}{dx}x^{-m} = \frac{d}{dx} \frac{1}{x^m} = -\frac{\frac{d}{dx}x^m}{(x^m)^2} \\ &= -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{m-1-2m} = -mx^{-m-1} \\ &= nx^{n-1} . \end{aligned}$$

$$n \geq 1 \text{ のときも } n = 0 \text{ のときも } n \leq -1 \text{ のときも } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

定理 整数 n を指数とする冪関数 x^n ($x \neq 0$) の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} .$$

例 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3x^5}$ と定める. ψ の導関数 ψ' を求める.

例 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3x^5}$ と定める. ψ の導関数 ψ' を求める.

整数 n に対して $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ($x \neq 0$).

例 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3x^5}$ と定める. ψ の導関数 ψ' を求める.

整数 n に対して $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ($x \neq 0$).

$\psi(x) = \frac{2}{3x^5} = \frac{2}{3}x^{-5}$ なので,

例 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \frac{2}{3x^5}$ と定める. ψ の導関数 ψ' を求める.

整数 n に対して $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ($x \neq 0$).

$\psi(x) = \frac{2}{3x^5} = \frac{2}{3}x^{-5}$ なので,

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\frac{2}{3x^5} = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{3}x^{-5}\right) = \frac{2}{3}\frac{d}{dx}x^{-5} = \frac{2}{3}(-5x^{-6}) \\ &= -\frac{10}{3x^6}.\end{aligned}$$

終

問3.4.3 区間 $(0, \infty)$ を定義域とするの関数 g を $g(x) = \frac{3}{2x^4}$ と定める. g の導関数 g' を求めよ.

問3.4.3 区間 $(0, \infty)$ を定義域とするの関数 g を $g(x) = \frac{3}{2x^4}$ と定める. g の導関数 g' を求めよ.

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \frac{3}{2x^4} = \frac{3}{2} \frac{d}{dx} x^{-4} = \frac{3}{2} \cdot (-4)x^{-5} = -\frac{6}{x^5} .$$

終