3.5　合成関数の微分法

次のことが基本になる：変数 x の関数 $y=\psi(x)$ について，x の増分 $\varDelta x$ に対する y の増分 $\varDelta y$ は

$$\varDelta y = \varDelta\psi(x) = \psi(x+\varDelta x)-\psi(x) \ ;$$

関数 y の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x} \ .$$

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t = \varphi(x)$ とおき，変数 y を $y = f(t)$ とおく．x の増分 $\varDelta x$ に対する t の増分を $\varDelta t$ とおき y の増分を $\varDelta y$ とおく．$\varDelta t$ は 0 にならないとする．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく．x の増分 $\varDelta x$ に対する t の増分を $\varDelta t$ とおき y の増分を $\varDelta y$ とおく．$\varDelta t$ は 0 にならないとする．合成関数 $y=f(t)=f\big(\varphi(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ を考える．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく．x の増分 $\varDelta x$ に対する t の増分を $\varDelta t$ とおき y の増分を $\varDelta y$ とおく．$\varDelta t$ は 0 にならないとする．合成関数 $y=f(t)=f\big(\varphi(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$ を考える．$\varphi(x)$ は微分可能なので連続である．

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく．x の増分 $\varDelta x$ に対する t の増分を $\varDelta t$ とおき y の増分を $\varDelta y$ とおく．$\varDelta t$ は 0 にならないとする．合成関数 $y=f(t)=f\big(\varphi(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\varDelta x\to 0}\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}$ を考える．$\varphi(x)$ は微分可能なので連続である．$\varDelta x\to 0$ のとき，$\varphi(x+\varDelta x)\to\varphi(x)$ なので

$$\varDelta t=\varDelta\varphi(x)=\varphi(x+\varDelta x)-\varphi(x)\to 0\ .$$

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく．x の増分 Δx に対する t の増分を Δt とおき y の増分を Δy とおく．Δt は 0 にならないとする．合成関数 $y=f(t)=f\big(\varphi(x)\big)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ を考える．$\varphi(x)$ は微分可能なので連続である．$\Delta x\to 0$ のとき，$\varphi(x+\Delta x)\to\varphi(x)$ なので

$\Delta t=\Delta\varphi(x)=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\to 0$ ．

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{dy}{dt}\ ,\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x}=\frac{dt}{dx}\ .$$

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく．x の増分 $\varDelta x$ に対する t の増分を $\varDelta t$ とおき y の増分を $\varDelta y$ とおく．$\varDelta t$ は 0 にならないとする．合成関数 $y=f(t)=f\bigl(\varphi(x)\bigr)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ を考える．$\varphi(x)$ は微分可能なので連続である．$\varDelta x\to 0$ のとき，$\varphi(x+\varDelta x)\to\varphi(x)$ なので $\varDelta t=\varDelta\varphi(x)=\varphi(x+\varDelta x)-\varphi(x)\to 0$ ．

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}=\frac{dy}{dt}\ ,\qquad \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta t}{\varDelta x}=\frac{dt}{dx}\ .$$

$\varDelta x\to 0$ のとき $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t},\dfrac{\varDelta t}{\varDelta x}$ の極限値があるので，$\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\dfrac{\varDelta t}{\varDelta x}$ と考える．

　微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく．x の増分 $\varDelta x$ に対する t の増分を $\varDelta t$ とおき y の増分を $\varDelta y$ とおく．$\varDelta t$ は 0 にならないとする．合成関数 $y=f(t)=f\bigl(\varphi(x)\bigr)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ を考える．$\varphi(x)$ は微分可能なので連続である．$\varDelta x\to 0$ のとき，$\varphi(x+\varDelta x)\to\varphi(x)$ なので
$\varDelta t=\varDelta\varphi(x)=\varphi(x+\varDelta x)-\varphi(x)\to 0$ ．

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}=\frac{dy}{dt}\ ,\qquad \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta t}{\varDelta x}=\frac{dt}{dx}\ .$$

$\varDelta x\to 0$ のとき $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t},\dfrac{\varDelta t}{\varDelta x}$ の極限値があるので，$\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\dfrac{\varDelta t}{\varDelta x}$ と考える．

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\frac{\varDelta t}{\varDelta x}\right)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta t}{\varDelta x}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとする．φ と f との合成関数がある．変数 x に対して，変数 t を $t=\varphi(x)$ とおき，変数 y を $y=f(t)$ とおく．x の増分 $\varDelta x$ に対する t の増分を $\varDelta t$ とおき y の増分を $\varDelta y$ とおく．$\varDelta t$ は 0 にならないとする．合成関数 $y=f(t)=f\bigl(\varphi(x)\bigr)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}=\displaystyle\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}$ を考える．$\varphi(x)$ は微分可能なので連続である．$\varDelta x\to 0$ のとき，$\varphi(x+\varDelta x)\to\varphi(x)$ なので
$\varDelta t=\varDelta\varphi(x)=\varphi(x+\varDelta x)-\varphi(x)\to 0$ ．

$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}=\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}=\frac{dy}{dt}\ ,\qquad \lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta t}{\varDelta x}=\frac{dt}{dx}\ .$$

$\varDelta x\to 0$ のとき $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t},\dfrac{\varDelta t}{\varDelta x}$ の極限値があるので，$\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\dfrac{\varDelta t}{\varDelta x}$ と考える．

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\frac{\varDelta t}{\varDelta x}\right)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\cdot\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{\varDelta t}{\varDelta x}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

つまり

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$y = f(t)$ なので， $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx} f(t)$ ， $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt} f(t)$ ，よって

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$y = f(t)$ なので，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(t)$ ，$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}f(t)$ ，よって

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$\varDelta t$ が 0 にならないことを前提にしたが，この前提がなくても上の等式は成り立つ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$y = f(t)$ なので, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}f(t)$, $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}f(t)$, よって

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$\varDelta t$ が 0 にならないことを前提にしたが, この前提がなくても上の等式は成り立つ.

定理 微分可能な関数 φ と f とについて, φ の値域が f の定義域に含まれるとき, 変数 x, t を $t = \varphi(x)$ とおくと,

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\sin(3x+2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t=3x+2$ とおく. $f(x)=\sin(3x+2)=\sin t$ を微分する.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定める．f の導関数 f' を求める．

　変数 t を $t = 3x+2$ とおく． $f(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する．微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できるのは，$\dfrac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が $\sin$ の中身と一致するときである．

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定める．f の導関数 f' を求める．

変数 t を $t = 3x+2$ とおく． $f(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する．微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できるのは，$\dfrac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が $\sin$ の中身と一致するときである．

$$\frac{d}{d\boxed{x}}\sin\boxed{x} = \cos x \ , \qquad \frac{d}{d\boxed{t}}\sin\boxed{t} = \cos t \ .$$

一致　　一致

なので，変数 x の関数 $f(x) = \sin t$ の導関数

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\sin t$$

を計算するには，このままでは微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できない．

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x+2$ とおく. $f(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x+2$ とおく. $f(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する. 公式 $\dfrac{d}{dx}g(t) = \dfrac{d}{dt}g(t) \cdot \dfrac{dt}{dx}$ において $g(t) = \sin t$ とおく:

$$\frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \cdot \frac{dt}{dx}$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x+2$ とおく. $f(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する. 公式 $\dfrac{d}{dx}g(t) = \dfrac{d}{dt}g(t) \cdot \dfrac{dt}{dx}$ において $g(t) = \sin t$ とおく:

$$\frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\sin(3x+2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t=3x+2$ とおく. $f(x)=\sin(3x+2)=\sin t$ を微分する. 公式 $\frac{d}{dx}g(t)=\frac{d}{dt}g(t)\cdot\frac{dt}{dx}$ において $g(t)=\sin t$ とおく：

$$\frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t\cdot\frac{dt}{dx} = \cos t\cdot\frac{dt}{dx} \ .$$

$t=3x+2$ なので, $\cos t=\cos(3x+2)$, $\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(3x+2)=3$, よって,

$$\cos t\cdot\frac{dt}{dx} = \cos(3x+2)\cdot 3 = 3\cos(3x+2) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \sin(3x+2)$ と定める. f の導関数 f' を求める.

変数 t を $t = 3x+2$ とおく. $f(x) = \sin(3x+2) = \sin t$ を微分する. 公式 $\dfrac{d}{dx}g(t) = \dfrac{d}{dt}g(t) \cdot \dfrac{dt}{dx}$ において $g(t) = \sin t$ とおく:

$$\frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$t = 3x+2$ なので, $\cos t = \cos(3x+2)$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x+2) = 3$, よって,

$$\cos t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos(3x+2) \cdot 3 = 3\cos(3x+2) \ .$$

故に

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\sin t = \cos t \cdot \frac{dt}{dx} = 3\cos(3x+2) \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $y=\cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t=\dfrac{4x+5}{3}$ とおく. $y=\cos\dfrac{4x+5}{3}=\cos t$ なので

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \dfrac{4x+5}{3}$ とおく. $y = \cos\dfrac{4x+5}{3} = \cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos t = \frac{d}{dt}\cos t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \dfrac{4x+5}{3}$ とおく. $y = \cos\dfrac{4x+5}{3} = \cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos t = \frac{d}{dt}\cos t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin t \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = \dfrac{4x+5}{3}$ なので, $\sin t = \sin\dfrac{4x+5}{3}$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}\dfrac{4x+5}{3} = \dfrac{4}{3}$, よって,

$$-\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = -\sin\frac{4x+5}{3} \cdot \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\sin\frac{4x+5}{3} .$$

例 変数 x の関数 $y=\cos\dfrac{4x+5}{3}$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t=\dfrac{4x+5}{3}$ とおく. $y=\cos\dfrac{4x+5}{3}=\cos t$ なので

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos t=\frac{d}{dt}\cos t\cdot\frac{dt}{dx}=-\sin t\cdot\frac{dt}{dx}\ .$$

$t=\dfrac{4x+5}{3}$ なので, $\sin t=\sin\dfrac{4x+5}{3}$, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}\dfrac{4x+5}{3}=\dfrac{4}{3}$, よって,

$$-\sin t\cdot\frac{dt}{dx}=-\sin\frac{4x+5}{3}\cdot\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}\sin\frac{4x+5}{3}\ .$$

故に

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos t=-\sin t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{4}{3}\sin\frac{4x+5}{3}\ .$$

終

問3.5.1 $\dfrac{7x-5}{3}$ が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数 x の全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \tan\dfrac{7x-5}{3}$ と定める． f の導関数 f' を求めよ．

変数 t を $t =$ 　　　　　　とおく． $f(x) = \tan\dfrac{7x-5}{3} =$ 　　　　．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\qquad = \frac{d}{dt}\qquad \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \qquad \cdot \frac{d}{dx}$$

$\boxed{問3.5.1}$ $\dfrac{7x-5}{3}$ が $\dfrac{\pi}{2}$ の奇数倍でない実数 x の全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\tan\dfrac{7x-5}{3}$ と定める． f の導関数 f' を求めよ．

変数 t を $t=\dfrac{7x-5}{3}$ とおく． $f(x)=\tan\dfrac{7x-5}{3}=\tan t$ ．

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\tan t = \frac{d}{dt}\tan t \cdot \frac{dt}{dx} \\
&= \sec^2 t \cdot \frac{d}{dx}\frac{7x-5}{3} = \sec^2\frac{7x-5}{3}\cdot\frac{7}{3} \\
&= \frac{7}{3}\sec^2\frac{7x-5}{3} \; .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．各実数 x について， $x^2 - 5x + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ なので，
$g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ の値がある．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

例 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく． $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める.

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく． $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく． $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$t = x^2 - 5x + 7$ なので， $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 7}$ ， $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2 - 5x + 7) = 2x - 5$ ，

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく． $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx} g(x) = \frac{d}{dx} \ln t = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$t = x^2 - 5x + 7$ なので， $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 7}$ ， $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2 - 5x + 7) = 2x - 5$ ，

よって

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2 - 5x + 7} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$ と定める．関数 g の導関数 g' を求める．

変数 t を $t = x^2 - 5x + 7$ とおく． $g(x) = \ln(x^2 - 5x + 7) = \ln t$ なので

$$g'(x) = \frac{d}{dx}g(x) = \frac{d}{dx}\ln t = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t = x^2 - 5x + 7$ なので， $\dfrac{1}{t} = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 7}$ ， $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^2 - 5x + 7) = 2x - 5$ ，

よって

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2 - 5x + 7} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} .$$

故に

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\ln t = \frac{1}{t} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 7} .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問3.5.2}$ 変数 x の関数 $y = \ln(3x^2 - 7x + 5)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

変数 t を $t =$ とおく. $y = \ln(3x^2 - 7x + 5) =$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \qquad = \frac{d}{dt} \qquad \cdot \frac{dt}{dx} = \qquad \cdot \frac{d}{dx}(\qquad\qquad\qquad)$$

$\boxed{問 3.5.2}$ 変数 x の関数 $y = \ln(3x^2 - 7x + 5)$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

変数 t を $t = 3x^2 - 7x + 5$ とおく. $y = \ln(3x^2 - 7x + 5) = \ln t$ なので,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}\ln t = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - 7x + 5) \\
&= \frac{1}{3x^2 - 7x + 5} \cdot (6x - 7) \\
&= \frac{6x - 7}{3x^2 - 7x + 5} .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \cos x$ とおく. $y = (\cos x)^4 = t^4$ なので,

例 変数 x の関数 $y = \cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t = \cos x$ とおく. $y = (\cos x)^4 = t^4$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} t^4 = \frac{d}{dt} t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $y=\cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t=\cos x$ とおく. $y=(\cos x)^4=t^4$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}t^4 = \frac{d}{dt}t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} .$$

$t=\cos x$ なので, $t^3=(\cos x)^3=\cos^3 x$, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$, よって

$$4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4\sin x\cos^3 x .$$

例 変数 x の関数 $y=\cos^4 x$ の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求める.

変数 t を $t=\cos x$ とおく. $y=(\cos x)^4=t^4$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}t^4 = \frac{d}{dt}t^4 \cdot \frac{dt}{dx} = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} \ .$$

$t=\cos x$ なので, $t^3=(\cos x)^3=\cos^3 x$, $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{d}{dx}\cos x=-\sin x$, よって

$$4t^3 \cdot \frac{dt}{dy} = 4\cos^3 x \cdot (-\sin x) = -4\sin x \cos^3 x \ .$$

故に

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}t^4 = 4t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = -4\sin x \cos^3 x \ .$$

終

$\boxed{\text{問}3.5.3}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \sin^3 x$ と定める. 関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ.

変数 t を $t =$ とおく. $\psi(x) = (\sin x)^3 =$ なので,

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx} \quad = \frac{d}{dt} \quad \cdot \frac{dt}{dx} = \quad \cdot \frac{d}{dx}$$

$\boxed{\text{問}3.5.3}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \sin^3 x$ と定める．関数 ψ の導関数 ψ' を求めよ．

変数 t を $t = \sin x$ とおく． $\psi(x) = (\sin x)^3 = t^3$ なので，

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \frac{d}{dx}t^3 = \frac{d}{dt}t^3 \cdot \frac{dt}{dx} = 3t^2 \cdot \frac{d}{dx}\sin x = 3(\sin x)^2 \cos x$$

$$= 3\sin^2 x \cos x \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

関数 f の定義域の要素 a における f の微分係数は, f の導関数 f' の a に対する値 $f'(a)$ であった.

例 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める.

変数 t を $t=\dfrac{5x+8\pi}{3}$ とおく. $\psi(x)=\cos\dfrac{5x+8\pi}{3}=\cos t$ なので,

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x) = \cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める.

変数 t を $t = \dfrac{5x+8\pi}{3}$ とおく. $\psi(x) = \cos\dfrac{5x+8\pi}{3} = \cos t$ なので,

$$
\begin{aligned}
\psi'(x) &= \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\cos t = \frac{d}{dt}\cos t \cdot \frac{dt}{dx} \\
&= -\sin t \cdot \frac{d}{dx}\frac{5x+8\pi}{3} = -\sin\frac{5x+8\pi}{3} \cdot \frac{5}{3} \\
&= -\frac{5}{3}\sin\frac{5x+8\pi}{3} \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 $\psi(x) = \cos\dfrac{5x+8\pi}{3}$ の π における微分係数を求める.

変数 t を $t = \dfrac{5x+8\pi}{3}$ とおく. $\psi(x) = \cos\dfrac{5x+8\pi}{3} = \cos t$ なので,

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\cos t = \frac{d}{dt}\cos t \cdot \frac{dt}{dx} \\
&= -\sin t \cdot \frac{d}{dx}\frac{5x+8\pi}{3} = -\sin\frac{5x+8\pi}{3} \cdot \frac{5}{3} \\
&= -\frac{5}{3}\sin\frac{5x+8\pi}{3} .
\end{aligned}$$

π における $\psi(x)$ の微分係数は

$$\begin{aligned}
\psi'(\pi) &= -\frac{5}{3}\sin\frac{5\pi+8\pi}{3} = -\frac{5}{3}\sin\frac{13\pi}{3} \\
&= -\frac{5}{3}\sin\left(\frac{13\pi}{3} - 4\pi\right) = -\frac{5}{3}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= -\frac{5\sqrt{3}}{6} .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}3.5.4}$ 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = \sin\dfrac{7x+8\pi}{3}$ の $\dfrac{\pi}{2}$ における微分係数を求めよ.

変数 t を $t =$ とおく.

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\sin\frac{7x+8\pi}{3} =$$

$\dfrac{\pi}{2}$ における φ の微分係数は

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$\boxed{問3.5.4}$ 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x)=\sin\dfrac{7x+8\pi}{3}$ の $\dfrac{\pi}{2}$ における微分係数を求めよ.

変数 t を $t=\dfrac{7x+8\pi}{3}$ とおく.

$$\varphi'(x)=\frac{d}{dx}\sin\frac{7x+8\pi}{3}=\frac{d}{dx}\sin t=\frac{d}{dt}\sin t\cdot\frac{dt}{dx}=\cos t\cdot\frac{d}{dx}\frac{7x+8\pi}{3}$$
$$=\frac{7}{3}\cos\frac{7x+8\pi}{3}\ .$$

$\dfrac{\pi}{2}$ における φ の微分係数は

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$$

$\boxed{問 3.5.4}$ 実数全体を定義域とする関数 $\varphi(x) = \sin\dfrac{7x+8\pi}{3}$ の $\dfrac{\pi}{2}$ における微分係数を求めよ.

変数 t を $t = \dfrac{7x+8\pi}{3}$ とおく.

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}\sin\frac{7x+8\pi}{3} = \frac{d}{dx}\sin t = \frac{d}{dt}\sin t \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot \frac{d}{dx}\frac{7x+8\pi}{3}$$
$$= \frac{7}{3}\cos\frac{7x+8\pi}{3} \ .$$

$\dfrac{\pi}{2}$ における φ の微分係数は

$$\varphi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7}{3}\cos\frac{7\cdot\frac{\pi}{2}+8\pi}{3} = \frac{7}{3}\cos\frac{23\pi}{6} = \frac{7}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{3}\cos\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{7\sqrt{3}}{6} \ .$$

$\boxed{終}$