

3.6 いくつかの関数の導関数

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y = a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x = \frac{dy}{dx}$ を求める.

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y = a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = a^x$ の自然対数を考える:

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a .$$

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y = a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = a^x$ の自然対数を考える:

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a .$$

これを x で微分する:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (x \ln a) . \quad (*)$$

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y = a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx} a^x = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = a^x$ の自然対数を考える:

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a .$$

これを x で微分する:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (x \ln a) . \quad (*)$$

この等式 (*) の左辺は

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} .$$

$$\frac{d}{dx} f(y) = \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y = a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx} a^x = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = a^x$ の自然対数を考える:

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a .$$

これを x で微分する:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (x \ln a) . \quad (*)$$

この等式 (*) の左辺は

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} .$$

$\ln a$ は定数なので, 等式 (*) の右辺は

$$\frac{d}{dx} (x \ln a) = \ln a \cdot \frac{d}{dx} x = \ln a \cdot 1 = \ln a .$$

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 変数 x の指数関数 $y = a^x$ の導関数 $\frac{d}{dx}a^x = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = a^x$ の自然対数を考える:

$$\ln y = \ln a^x = x \ln a .$$

これを x で微分する:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (x \ln a) . \quad (*)$$

この等式 (*) の左辺は

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} .$$

$\ln a$ は定数なので, 等式 (*) の右辺は

$$\frac{d}{dx} (x \ln a) = \ln a \cdot \frac{d}{dx} x = \ln a \cdot 1 = \ln a .$$

よって $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln a$ なので, $\frac{dy}{dx} = y \ln a$; $y = a^x$ なので, $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$.

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a .$$

特に, $a = e$ のとき, $\ln a = \ln e = \log_e e = 1$ なので,

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x .$$

定理 1 以外の正の実数 a を底とする指数関数 a^x の導関数は

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a .$$

特に, 自然対数の底 e に対して, 指数関数 e^x の導関数は

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x .$$

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 3^x \sin x$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 3^x \sin x$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$$\frac{d}{dx} 3^x = 3^x \ln 3 \quad \text{なので,}$$

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 3^x \sin x$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$$\frac{d}{dx} 3^x = 3^x \ln 3 \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} (3^x \sin x) = \frac{d}{dx} 3^x \cdot \sin x + 3^x \cdot \frac{d}{dx} \sin x \\ &= \frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) + f(x) \frac{d}{dx} g(x) \end{aligned}$$

例 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = 3^x \sin x$ と定める. 関数 φ の導関数 φ' を求める.

$$\frac{d}{dx} 3^x = 3^x \ln 3 \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx} \varphi(x) = \frac{d}{dx} (3^x \sin x) = \frac{d}{dx} 3^x \cdot \sin x + 3^x \cdot \frac{d}{dx} \sin x \\ &= 3^x \ln 3 \cdot \sin x + 3^x \cos x \\ &= 3^x (\ln 3 \cdot \sin x + \cos x) .\end{aligned}$$

問3.6.1 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 2^x \cos x$ と定める. 関数

ψ の導関数 ψ' を求めよ.

$$\frac{d}{dx} 2^x = 2^x \ln 2 \quad \text{なので}$$

問3.6.1 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 2^x \cos x$ と定める. 関数

ψ の導関数 ψ' を求めよ.

$$\frac{d}{dx} 2^x = 2^x \ln 2 \quad \text{なので}$$

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= \frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{d}{dx} (2^x \cos x) = \frac{d}{dx} 2^x \cdot \cos x + 2^x \frac{d}{dx} \cos x \\ &= 2^x \ln 2 \cdot \cos x + 2^x (-\sin x) \\ &= 2^x (\ln 2 \cdot \cos x - \sin x) .\end{aligned}$$

例 変数 x の関数 $y = \frac{x^3}{5^x}$ を微分する.

例 変数 x の関数 $y = \frac{x^3}{5^x}$ を微分する.

$\frac{d}{dx} 5^x = 5^x \ln 5$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{x^3}{5^x} = \frac{\frac{d}{dx} x^3 \cdot 5^x - x^3 \frac{d}{dx} 5^x}{(5^x)^2}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) - f(x) \frac{d}{dx} g(x)}{g(x)^2}$$

例 変数 x の関数 $y = \frac{x^3}{5^x}$ を微分する.

$\frac{d}{dx} 5^x = 5^x \ln 5$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{x^3}{5^x} = \frac{\frac{d}{dx} x^3 \cdot 5^x - x^3 \frac{d}{dx} 5^x}{(5^x)^2} = \frac{3x^2 5^x - x^3 5^x \ln 5}{(5^x)^2} \\ &= \frac{3x^2 - x^3 \ln 5}{5^x} . \end{aligned}$$

終

問3.6.2 変数 x の関数 $y = \frac{\sin x}{3^x}$ を微分せよ.

問3.6.2 変数 x の関数 $y = \frac{\sin x}{3^x}$ を微分せよ.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{3^x} = \frac{\frac{d}{dx} \sin x \cdot 3^x - \sin x \cdot \frac{d}{dx} 3^x}{(3^x)^2} = \frac{\cos x \cdot 3^x - \sin x \cdot 3^x \ln 3}{(3^x)^2} \\ &= \frac{\cos x - \ln 3 \cdot \sin x}{3^x} .\end{aligned}$$

終

例 変数 x の関数 $y = e^{2x-3}$ を微分する.

例 変数 x の関数 $y = e^{2x-3}$ を微分する.

変数 t を $t = 2x - 3$ とおく. $y = e^{2x-3} = e^t$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}e^t = \frac{d}{dt}e^t \cdot \frac{dt}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}f(t) = \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

例 変数 x の関数 $y = e^{2x-3}$ を微分する.

変数 t を $t = 2x - 3$ とおく. $y = e^{2x-3} = e^t$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}e^t = \frac{d}{dt}e^t \cdot \frac{dt}{dx} = e^t \cdot \frac{d}{dx}(2x - 3) = e^{2x-3} \cdot 2 \\ &= 2e^{2x-3} .\end{aligned}$$

終

問3.6.3 変数 u の関数 $v = e^{5-3u}$ を微分せよ.

問3.6.3 変数 u の関数 $v = e^{5-3u}$ を微分せよ.

変数 t を $t = 5 - 3u$ とおく.

$$\begin{aligned}\frac{dv}{du} &= \frac{d}{du} e^{5-3u} = \frac{d}{du} e^t = \frac{d}{dt} e^t \cdot \frac{dt}{du} = e^t \cdot \frac{d}{du} (5 - 3u) = e^{5-3u} \cdot (-3) \\ &= -3e^{5-3u} .\end{aligned}$$

終

定数 p に対して, 変数 x の冪関数 $y = x^p$ ($x > 0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^p = \frac{dy}{dx}$ を求める.

定数 p に対して, 変数 x の冪関数 $y = x^p$ ($x > 0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^p = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = x^p$ の自然対数をとると,

$$\ln y = \ln x^p = p \ln x .$$

定数 p に対して, 変数 x の冪関数 $y = x^p$ ($x > 0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^p = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = x^p$ の自然対数をとると,

$$\ln y = \ln x^p = p \ln x .$$

この等式の両辺を x で微分する :

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (p \ln x) . \quad (*)$$

$$\frac{d}{dx}x^p = \frac{dy}{dx}$$

定数 p に対して, 変数 x の冪関数 $y = x^p$ ($x > 0$) の導関数を求める. $y = x^p$ の自然対数をとると,

$$\ln y = \ln x^p = p \ln x .$$

この等式の両辺を x で微分する :

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (p \ln x) . \quad (*)$$

この等式 (*) の左辺は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln y &= \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} . \\ \frac{d}{dx} f(y) &= \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}x^p = \frac{dy}{dx}$$

定数 p に対して、変数 x の冪関数 $y = x^p$ ($x > 0$) の導関数を求める。 $y = x^p$ の自然対数をとると、

$$\ln y = \ln x^p = p \ln x .$$

この等式の両辺を x で微分する：

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (p \ln x) . \quad (*)$$

この等式 (*) の左辺は

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} .$$

p は定数なので、等式 (*) の右辺は

$$\frac{d}{dx} (p \ln x) = p \frac{d}{dx} \ln x = p \frac{1}{x} .$$

定数 p に対して, 変数 x の冪関数 $y = x^p$ ($x > 0$) の導関数 $\frac{d}{dx}x^p = \frac{dy}{dx}$ を求める. $y = x^p$ の自然対数をとると,

$$\ln y = \ln x^p = p \ln x .$$

この等式の両辺を x で微分する :

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} (p \ln x) . \quad (*)$$

この等式 (*) の左辺は

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} .$$

p は定数なので, 等式 (*) の右辺は

$$\frac{d}{dx} (p \ln x) = p \frac{d}{dx} \ln x = p \frac{1}{x} .$$

よって $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = p \frac{1}{x}$ なので $\frac{dy}{dx} = p \frac{y}{x}$, $y = x^p$ なので $\frac{d}{dx} x^p = p \frac{x^p}{x} = p x^{p-1}$.

定理 定数 p を指数とする冪関数 x^p ($x > 0$) の導関数は

$$\frac{d}{dx}x^p = px^{p-1} .$$

冪関数の微分公式を並べてみる.

$$\text{定数 } n \text{ が正の整数であるとき } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad ;$$

$$\text{定数 } n \text{ が整数であるとき } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \quad (x \neq 0) \quad ;$$

$$\text{定数 } p \text{ が実数であるとき } \frac{d}{dx}x^p = px^{p-1} \quad (x > 0) \quad .$$

冪関数の指数の範囲が広がると独立変数 x の値の範囲は狭まる.

例 変数 x の関数 $\sqrt[3]{x^2}$ を微分する.

例 変数 x の関数 $\sqrt[3]{x^2}$ を微分する.

$$\frac{d}{dx} \sqrt[3]{x^2} = \frac{d}{dx} x^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} .$$

定数 p に対して $\frac{d}{dx} x^p = px^{p-1}$

終

問3.6.4 変数 x の関数 $\sqrt[5]{x^3}$ を微分せよ.

問3.6.4 変数 x の関数 $\sqrt[5]{x}^3$ を微分せよ.

$$\frac{d}{dx} \sqrt[5]{x}^3 = \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x}^2} .$$

終

例 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{5}{3x}}$ ($x > 0$) を微分する.

例 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{5}{3x}}$ ($x > 0$) を微分する.

$$\sqrt{\frac{5}{3x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{なので,}$$

例 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{5}{3x}}$ ($x > 0$) を微分する.

$$\sqrt{\frac{5}{3x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{なので,}$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{5}{3x}} = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{5}{3}} x^{-\frac{1}{2}} \right) = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{d}{dx} x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{定数 } p \text{ に対して } \frac{d}{dx} x^p = px^{p-1}$$

例 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{5}{3x}}$ ($x > 0$) を微分する.

$$\sqrt{\frac{5}{3x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{5}{3}} x^{-\frac{1}{2}} \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{5}{3x}} &= \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{5}{3}} x^{-\frac{1}{2}} \right) = \sqrt{\frac{5}{3}} \frac{d}{dx} x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{3}} \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{x} \sqrt{\frac{5}{12x}}. \end{aligned}$$

終

問3.6.5 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x}}$ ($x > 0$) を微分せよ.

問3.6.5 変数 x の関数 $\sqrt{\frac{6}{5x}}$ ($x > 0$) を微分せよ.

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{6}{5x}} = \sqrt{\frac{6}{5}} \frac{d}{dx} x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{6}{5}} \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{x} \sqrt{\frac{3}{10x}} .$$

終

例 変数 y の関数 $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5}$ を微分する.

例 変数 y の関数 $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5}$ を微分する.

変数 t を $t = y^2 - 3y + 5$ とおく. $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5} = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ なので,

例 変数 y の関数 $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5}$ を微分する.

変数 t を $t = y^2 - 3y + 5$ とおく. $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5} = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ なので,

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy} t^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{dy}$$
$$\frac{d}{dy} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dy}$$

例 変数 y の関数 $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5}$ を微分する.

変数 t を $t = y^2 - 3y + 5$ とおく. $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5} = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ なので,

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy} t^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dy} (y^2 - 3y + 5) =$$

定数 p に対して $\frac{d}{dx} x^p = px^{p-1}$

例 変数 y の関数 $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5}$ を微分する.

変数 t を $t = y^2 - 3y + 5$ とおく. $z = \sqrt{y^2 - 3y + 5} = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ なので,

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy} t^{\frac{1}{2}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dy} (y^2 - 3y + 5) = \frac{1}{2\sqrt{t}} (2y - 3)$$

$$= \frac{2y - 3}{2\sqrt{y^2 - 3y + 5}} .$$

終

問3.6.6 変数 y の関数 $z = \sqrt{3y^2 - 5y + 4}$ を微分せよ.

問3.6.6 変数 y の関数 $z = \sqrt{3y^2 - 5y + 4}$ を微分せよ.

変数 t を $t = 3y^2 - 5y + 4$ とおく. $z = \sqrt{3y^2 - 5y + 4} = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ なので,

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dy} (3y^2 - 5y + 4) = \frac{1}{2\sqrt{t}} (6y - 5)$$

$$= \frac{6y - 5}{2\sqrt{3y^2 - 5y + 4}} .$$

終

例 区間 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7
における f の微分係数を求める.

例 区間 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7
における f の微分係数を求める.

変数 t を $t = 5x + 1$ とおく. $f(x) = \sqrt{5x+1}^3 = \sqrt{t}^3 = t^{\frac{3}{2}}$ なので,

例 区間 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7
における f の微分係数を求める.

変数 t を $t = 5x + 1$ とおく. $f(x) = \sqrt{5x+1}^3 = \sqrt{t}^3 = t^{\frac{3}{2}}$ なので, f
の導関数 f' は

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx}$$
$$\frac{d}{dx} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

例 区間 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7
における f の微分係数を求める.

変数 t を $t = 5x + 1$ とおく. $f(x) = \sqrt{5x+1}^3 = \sqrt{t}^3 = t^{\frac{3}{2}}$ なので, f
の導関数 f' は

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} (5x + 1)$$

$$\text{定数 } p \text{ に対して } \frac{d}{dx} x^p = px^{p-1}$$

例 区間 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7
における f の微分係数を求める.

変数 t を $t = 5x + 1$ とおく. $f(x) = \sqrt{5x+1}^3 = \sqrt{t}^3 = t^{\frac{3}{2}}$ なので, f
の導関数 f' は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} (5x + 1) = \frac{3}{2} \sqrt{t} \cdot 5 \\ &= \frac{15}{2} \sqrt{5x+1} . \end{aligned}$$

例 区間 $\left[-\frac{5}{4}, \infty\right)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \sqrt{5x+1}^3$ と定める. 7 における f の微分係数を求める.

変数 t を $t = 5x + 1$ とおく. $f(x) = \sqrt{5x+1}^3 = \sqrt{t}^3 = t^{\frac{3}{2}}$ なので, f の導関数 f' は

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} (5x+1) = \frac{3}{2} \sqrt{t} \cdot 5 \\ &= \frac{15}{2} \sqrt{5x+1} . \end{aligned}$$

7 における f の微分係数は

$$f'(7) = \frac{15}{2} \sqrt{5 \cdot 7 + 1} = \frac{15}{2} \sqrt{36} = \frac{15}{2} \cdot 6 = 45 .$$

終

問3.6.7 区間 $\left[\frac{5}{6}, \infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{6x-5}^3$ と定める.

9 における g の微分係数を求めよ.

変数 t を $t =$ とおく.

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{6x-5}^3 =$$

9 における g の微分係数は

$$g'(9) = \quad .$$

問3.6.7 区間 $\left[\frac{5}{6}, \infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{6x-5}^3$ と定める.

9 における g の微分係数を求めよ.

変数 t を $t = 6x - 5$ とおく.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \sqrt{6x-5}^3 = \frac{d}{dx} t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} (6x-5) = \frac{3}{2} \sqrt{t} \cdot 6 \\ &= 9\sqrt{6x-5} . \end{aligned}$$

9 における g の微分係数は

$$g'(9) = \quad .$$

問3.6.7 区間 $\left[\frac{5}{6}, \infty\right)$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \sqrt{6x-5}^3$ と定める.

9 における g の微分係数を求めよ.

変数 t を $t = 6x - 5$ とおく.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \sqrt{6x-5}^3 = \frac{d}{dx} t^{\frac{3}{2}} = \frac{d}{dt} t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} (6x-5) = \frac{3}{2} \sqrt{t} \cdot 6 \\ &= 9\sqrt{6x-5} . \end{aligned}$$

9 における g の微分係数は

$$g'(9) = 9\sqrt{6 \cdot 9 - 5} = 9\sqrt{49} = 63 .$$

終

変数 x の関数 $\ln|x|$ の導関数を考える.

変数 x の関数 $\ln|x|$ の導関数を考える.

$x > 0$ のとき, $|x| = x$ なので,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} .$$

変数 x の関数 $\ln|x|$ の導関数を考える.

$x > 0$ のとき, $|x| = x$ なので,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} .$$

変数 x について $x < 0$ のとき, $y = -x$ とおくと, $|x| = -x = y > 0$ なので,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln|x| &= \frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{d}{dx} (-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} . \\ \frac{d}{dx} f(y) &= \frac{d}{dy} f(y) \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

変数 x の関数 $\ln|x|$ の導関数を考える.

$x > 0$ のとき, $|x| = x$ なので,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} .$$

変数 x について $x < 0$ のとき, $y = -x$ とおくと, $|x| = -x = y > 0$ なので,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{d}{dx} (-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} .$$

故に, $x > 0$ のときも $x < 0$ のときも $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$.

変数 x の関数 $\ln|x|$ の導関数を考える.

$x > 0$ のとき, $|x| = x$ なので,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x} .$$

変数 x について $x < 0$ のとき, $y = -x$ とおくと, $|x| = -x = y > 0$ なので,

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dy} \ln y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \frac{d}{dx} (-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} .$$

故に, $x > 0$ のときも $x < 0$ のときも $\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$.

定理 関数 $\ln|x|$ ($x \neq 0$) の導関数は

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) .$$

例 変数 y の関数 $z = \ln|y^3 + 2|$ を微分する.

例 変数 y の関数 $z = \ln|y^3 + 2|$ を微分する.

変数 t を $t = y^3 + 2$ とおく. $z = \ln|y^3 + 2| = \ln|t|$ なので,

例 変数 y の関数 $z = \ln|y^3 + 2|$ を微分する.

変数 t を $t = y^3 + 2$ とおく. $z = \ln|y^3 + 2| = \ln|t|$ なので,

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d}{dy} \ln|t| = \frac{d}{dt} \ln|t| \cdot \frac{dt}{dy}$$
$$\frac{d}{dy} f(t) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dy}$$

例 変数 y の関数 $z = \ln|y^3 + 2|$ を微分する.

変数 t を $t = y^3 + 2$ とおく. $z = \ln|y^3 + 2| = \ln|t|$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dy} &= \frac{d}{dy} \ln|t| = \frac{d}{dt} \ln|t| \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dy}(y^3 + 2) = \frac{1}{y^3 + 2} 3y^2 \\ &= \frac{3y^2}{y^3 + 2} .\end{aligned}$$

終

問3.6.8 変数 x の関数 $y = \ln|\cos x|$ を微分せよ.

問3.6.8 変数 x の関数 $y = \ln|\cos x|$ を微分せよ.

変数 t を $t = \cos x$ とおく.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \ln|\cos x| = \frac{d}{dx} \ln|t| = \frac{d}{dt} \ln|t| \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{t} \cdot \frac{d}{dx} \cos x = \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \\ &= -\tan x .\end{aligned}$$

終