

3.9 第2次導関数

関数 f が微分可能で、更にその導関数 f' が微分可能であるとき、 f は2回微分可能であるという；このとき導関数 f' の導関数を f の第2次導関数といい、 f'' と書き表す。

関数 f が微分可能で、更にその導関数 f' が微分可能であるとき、 f は2回微分可能であるという；このとき導関数 f' の導関数を f の第2次導関数といい、 f'' と書き表す。つまり、 f の第2次導関数の値 $f''(x)$ は、 $f(x)$ を微分した結果 $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ を更にもう一度微分した結果である：

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\} .$$

関数 f が微分可能で、更にその導関数 f' が微分可能であるとき、 f は2回微分可能であるという；このとき導関数 f' の導関数を f の第2次導関数といい、 f'' と書き表す。つまり、 f の第2次導関数の値 $f''(x)$ は、 $f(x)$ を微分した結果 $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ を更にもう一度微分した結果である：

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\} .$$

$f''(x)$ を $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ と書き表す。

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\} .$$

変数 x, y について $y = f(x)$ のとき, $f(x)$ の第 2 次導関数

$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$ を $\frac{d^2 y}{dx^2}$, y'' などとも書き表す;

変数 x, y について $y = f(x)$ のとき, $f(x)$ の第 2 次導関数

$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$ を $\frac{d^2 y}{dx^2}$, y'' などとも書き表す; $\frac{d^2 y}{dx^2}$ は, y を微分した結

果 $\frac{dy}{dx}$ をもう一度微分した結果である:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ と定める. f の第 2 次導関数 f'' を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ と定める. f の第 2 次導関数 f'' を求める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 8x + 3 .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 2$ と定める. f の第 2 次導関数 f'' を求める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 + 3x - 2) = 3x^2 - 8x + 3 .$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 8x + 3) = 6x - 8 .$$

終

問3.9.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2}$ と定める.
 f の第2次導関数 f'' を求めよ.

問3.9.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2}$ と定め

る. f の第2次導関数 f'' を求めよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2} = \frac{3x^2 - 10x + 3}{2} .$$

問3.9.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2}$ と定める.

f の第2次導関数 f'' を求めよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x - 7}{2} = \frac{3x^2 - 10x + 3}{2} .$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \frac{3x^2 - 10x + 3}{2} = \frac{6x - 10}{2} = 3x - 5 .$$

終

例 変数 x の関数 $y = x^3 \ln x$ の第 2 次導関数 $\frac{d^2y}{dx^2}$ を求める.

例 変数 x の関数 $y = x^3 \ln x$ の第 2 次導関数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ を求める.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \ln x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2(3 \ln x + 1) .$$

例 変数 x の関数 $y = x^3 \ln x$ の第 2 次導関数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ を求める.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \ln x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x} = x^2(3 \ln x + 1) .$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \{x^2(3 \ln x + 1)\} \\ &= \frac{d}{dx} x^2 \cdot (3 \ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{d}{dx} (3 \ln x + 1) \\ &= 2x \cdot (3 \ln x + 1) + x^2 \cdot 3 \frac{1}{x} = 2x(3 \ln x + 1) + 3x \\ &= x(6 \ln x + 5) . \end{aligned}$$

終

問3.9.2 変数 t の関数 $x = t^2 e^t$ の第2次導関数 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ を求めよ.

問3.9.2 変数 t の関数 $x = t^2 e^t$ の第2次導関数 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ を求めよ.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^2 e^t) = \frac{d}{dt}t^2 \cdot e^t + t^2 \frac{d}{dt}e^t = 2te^t + t^2 e^t \\ &= e^t(t^2 + 2t) .\end{aligned}$$

問3.9.2 変数 t の関数 $x = t^2 e^t$ の第2次導関数 $\frac{d^2 x}{dt^2}$ を求めよ.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^2 e^t) = \frac{d}{dt}t^2 \cdot e^t + t^2 \frac{d}{dt}e^t = 2te^t + t^2 e^t \\ &= e^t(t^2 + 2t) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\{e^t(t^2 + 2t)\} = \frac{d}{dt}e^t \cdot (t^2 + 2t) + e^t \frac{d}{dt}(t^2 + 2t) \\ &= e^t(t^2 + 2t) + e^t(2t + 2) \\ &= e^t(t^2 + 4t + 2) .\end{aligned}$$

終

例 変数 t の関数 $x = \sin 3t$ の第 2 次導関数 $\frac{d^2x}{dt^2}$ を求める.

例 変数 t の関数 $x = \sin 3t$ の第 2 次導関数 $\frac{d^2x}{dt^2}$ を求める.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \sin 3t = \cos 3t \cdot \frac{d}{dt}(3t) = 3 \cos 3t .$$

例 変数 t の関数 $x = \sin 3t$ の第 2 次導関数 $\frac{d^2x}{dt^2}$ を求める.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \sin 3t = \cos 3t \cdot \frac{d}{dt} (3t) = 3 \cos 3t .$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (3 \cos 3t) = 3(-\sin 3t) \frac{d}{dt} (3t) = -9 \sin 3t .$$

終

問3.9.3 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \cos(2x + 3)$ と定める. g の第2次導関数 g'' を求めよ.

問3.9.3 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \cos(2x + 3)$ と定める. g の第2次導関数 g'' を求めよ.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx} \cos(2x + 3) = -\sin(2x + 3) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 3) \\ &= -2\sin(2x + 3) . \end{aligned}$$

問3.9.3 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = \cos(2x + 3)$ と定める. g の第2次導関数 g'' を求めよ.

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{d}{dx} \cos(2x + 3) = -\sin(2x + 3) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 3) \\ &= -2\sin(2x + 3) .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g''(x) &= \frac{d}{dx} \{-2\sin(2x + 3)\} = -2\cos(2x + 3) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 3) \\ &= -4\cos(2x + 3) .\end{aligned}$$

終