4.1 関数の極限

解析学では，正の無限大とよばれる $+\infty$ と負の無限大とよばれる $-\infty$ との 2 個の仮想的な数を用いる．正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記される．

解析学では，正の無限大とよばれる $+\infty$ と負の無限大とよばれる $-\infty$ との 2 個の仮想的な数を用いる．正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記される．

$$\infty \text{ と } -\infty \text{ とは実数ではない．}$$

解析学では，正の無限大とよばれる $+\infty$ と負の無限大とよばれる $-\infty$ との 2 個の仮想的な数を用いる．正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記される．

∞ と $-\infty$ とは実数ではない．

また，

∞ 及び $-\infty$ に対する四則演算は原則的にできない．

解析学では，正の無限大とよばれる $+\infty$ と負の無限大とよばれる $-\infty$ との 2 個の仮想的な数を用いる．正の無限大 $+\infty$ はよく ∞ と略記される．

∞ と $-\infty$ とは実数ではない．

また，

∞ 及び $-\infty$ に対する四則演算は原則的にできない．

大小関係については，∞ はどんな実数よりも大きく，$-\infty$ はどんな実数よりも小さいと約束する．つまり，任意の実数 x に対して $-\infty < x < \infty$ ．

変数 x について，例えば

$$x = 54\ ,\quad x = 645\ ,\quad x = 7645\ ,\quad x = 87564\ ,\quad x = 986754\ ,\quad \cdots$$

のように，x の値を限りなく大きくしていくことを $x \to \infty$ と書き表す．

変数 x について，例えば

$$x = 54\ ,\quad x = 645\ ,\quad x = 7645\ ,\quad x = 87564\ ,\quad x = 986754\ ,\quad \cdots$$

のように，x の値を限りなく大きくしていくことを $x \to \infty$ と書き表す．また，例えば

$$x = -54\ ,\quad x = -645\ ,\quad x = -7564\ ,\quad x = -86745\ ,\quad x = -978456\ ,\quad \cdots$$

のように，$x < 0$ として x の絶対値 $|x|$ を限りなく大きくしていくことを $x \to -\infty$ と書き表す．

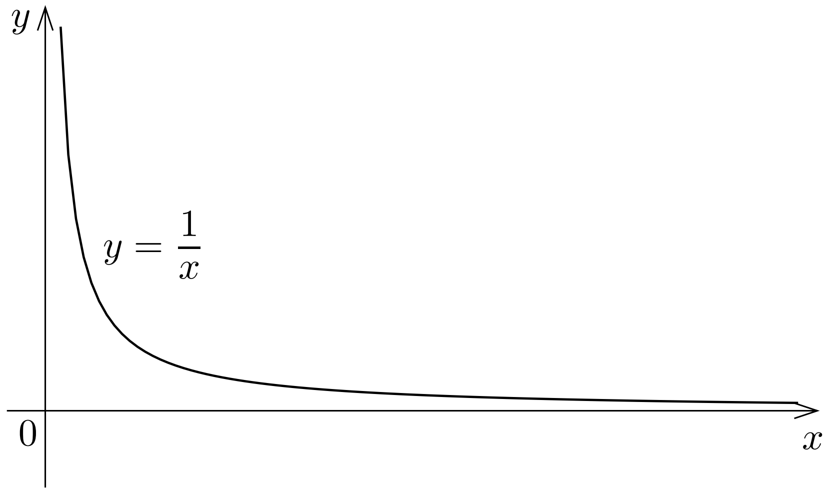
$\boxed{\text{例}}$ 関数 $\dfrac{1}{x}$ について，変数 x の値を大きくしていくと $\dfrac{1}{x}$ の値は例えば次のようになる：

$$\frac{1}{10} = 0.1 \ , \quad \frac{1}{100} = 0.01 \ , \quad \frac{1}{1000} = 0.001 \ , \quad \frac{1}{10000} = 0.0001 \ , \quad \cdots \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 関数 $\dfrac{1}{x}$ について，変数 x の値を大きくしていくと $\dfrac{1}{x}$ の値は例えば次のようになる：

$$\frac{1}{10} = 0.1\ ,\quad \frac{1}{100} = 0.01\ ,\quad \frac{1}{1000} = 0.001\ ,\quad \frac{1}{10000} = 0.0001\ ,\quad \cdots\ .$$

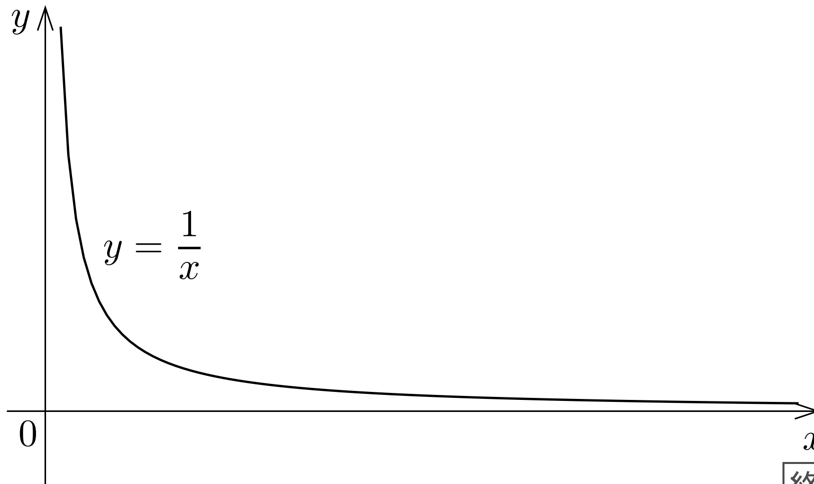
変数 x の値を限りなく大きくしていくと $\dfrac{1}{x}$ の値は 0 に限りなく近づく.



$\boxed{\text{例}}$ 関数 $\dfrac{1}{x}$ について，変数 x の値を大きくしていくと $\dfrac{1}{x}$ の値は例えば次のようになる：

$$\frac{1}{10} = 0.1\ , \quad \frac{1}{100} = 0.01\ , \quad \frac{1}{1000} = 0.001\ , \quad \frac{1}{10000} = 0.0001\ , \quad \cdots\ .$$

変数 x の値を限りなく大きくしていくと $\dfrac{1}{x}$ の値は 0 に限りなく近づく．このことを，$x \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{x}$ は 0 に収束するといい，$x \to \infty$ のとき $\dfrac{1}{x}$ が限りなく近づく定数 0 を $\dfrac{1}{x}$ の極限値という．



$\boxed{\text{終}}$

一般的に述べる．変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．

一般的に述べる．変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c \ .$$

一般的に述べる．変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

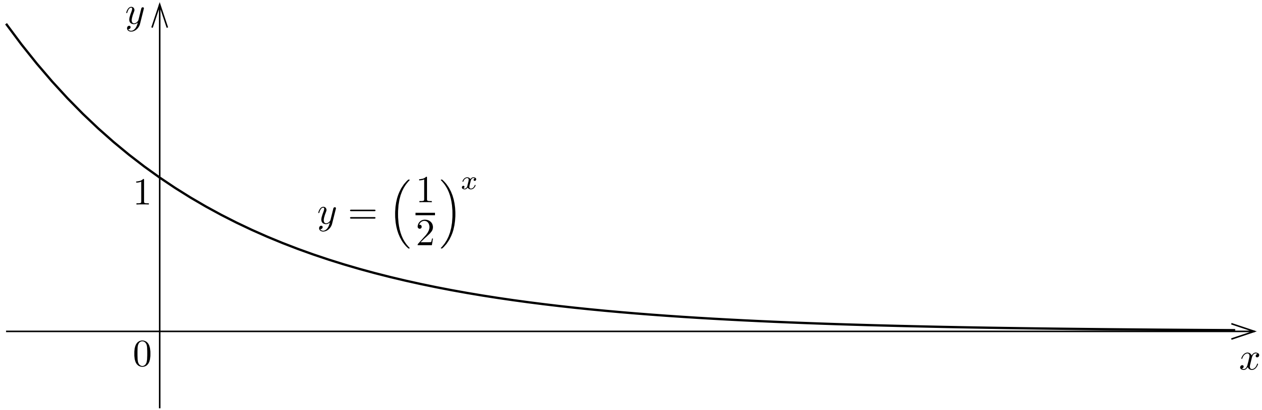
$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c\ .$$

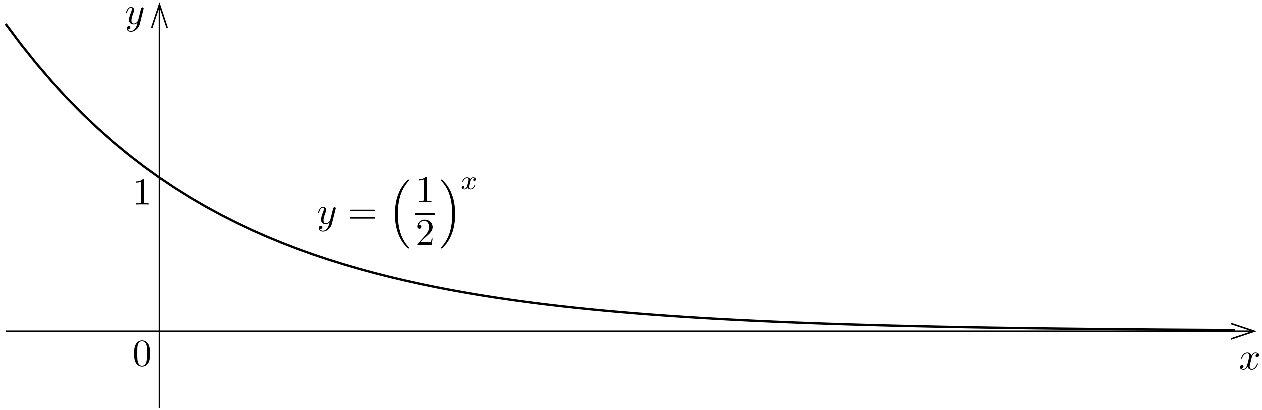
関数 $f(x)$ について，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は発散するという．

$\boxed{\text{例}}$



変数 x の値を限りなく大きくしていくと指数関数 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の値は　に限りなく近づく.

例

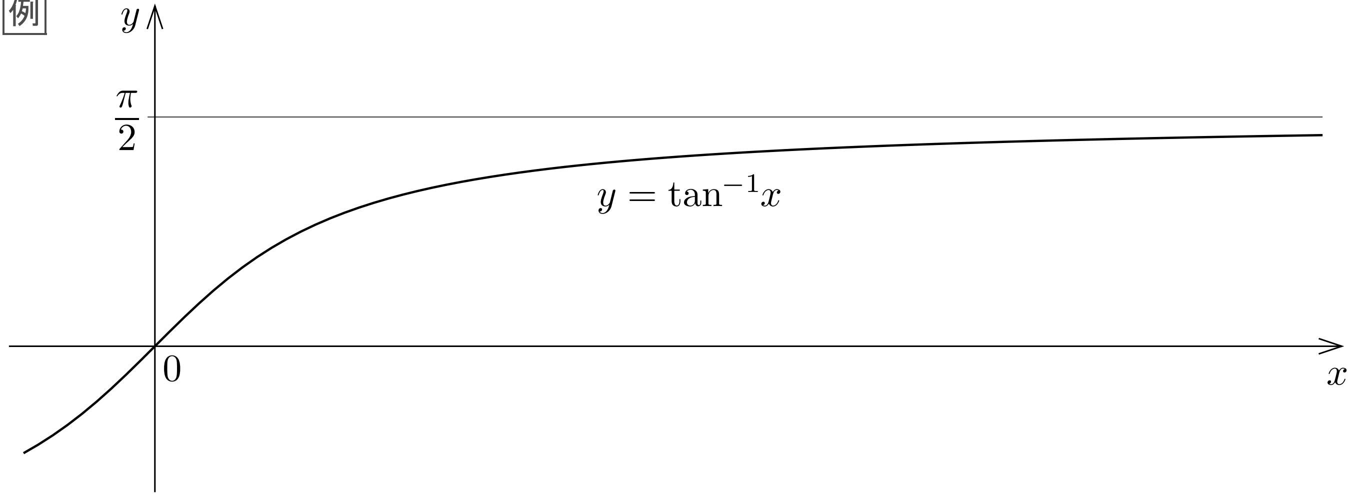


変数 x の値を限りなく大きくしていくと指数関数 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の値は 0 に限りなく近づく．つまり，指数関数 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ は $x\to\infty$ のとき 0 に収束する：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x=0\ .$$

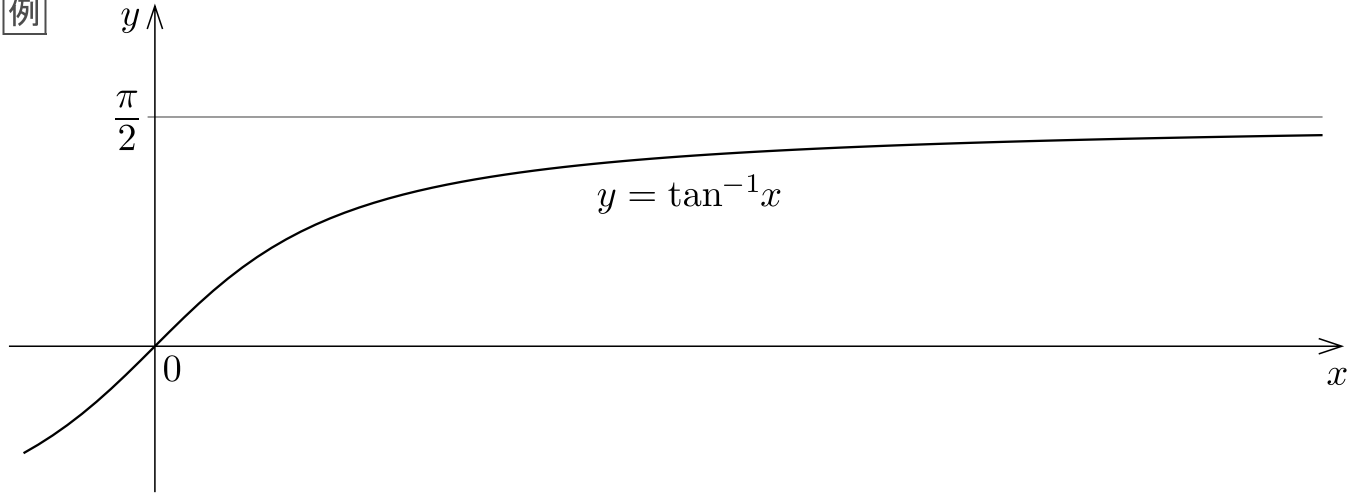
終

例



変数 x の値を限りなく大きくしていくと逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の値は　　　に限りなく近づく.

例



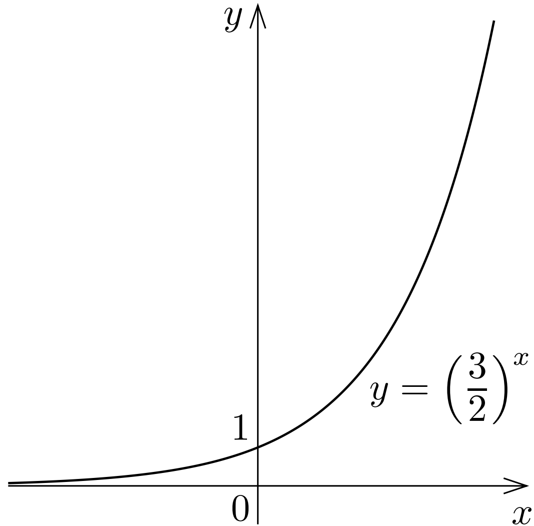
変数 x の値を限りなく大きくしていくと逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の値は $\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づく．つまり，逆正接関数 $\tan^{-1}x$ は $x \to \infty$ のとき $\dfrac{\pi}{2}$ に収束する：$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ ． 終

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき， $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

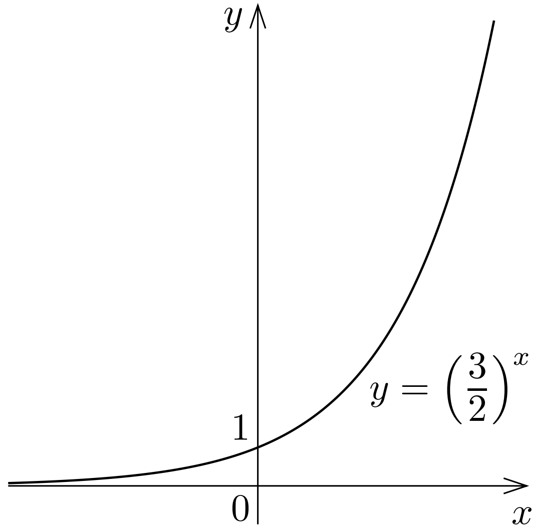
と書き表す．

例



変数 x の値を限りなく大きくしていくと指数関数 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$ の値は限りなく大きくなる.

例

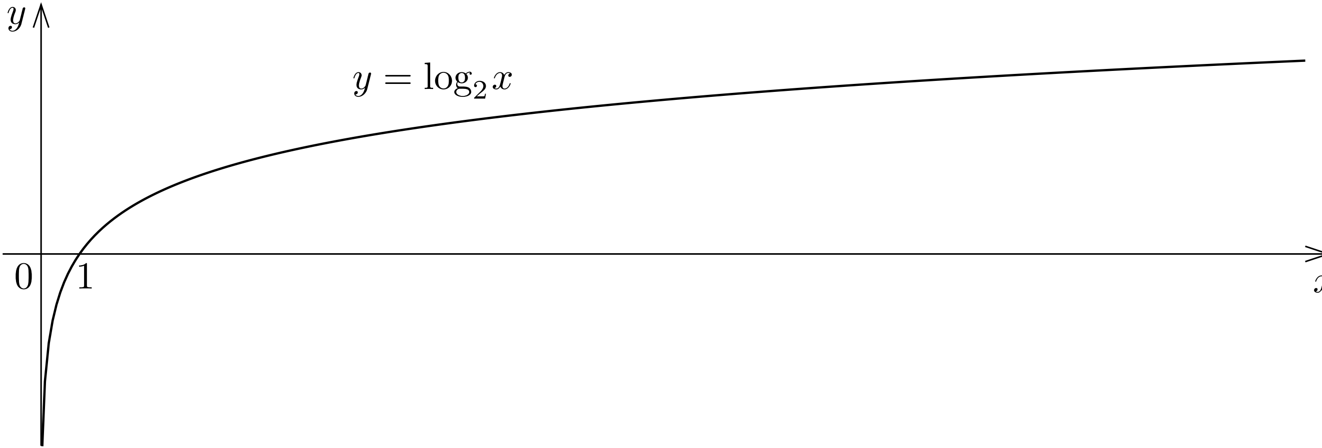


変数 x の値を限りなく大きくしていくと指数関数 $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ の値は限りなく大きくなる. つまり, 指数関数 $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ は $x\to\infty$ のとき ∞ に発散する:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\infty\ .$$

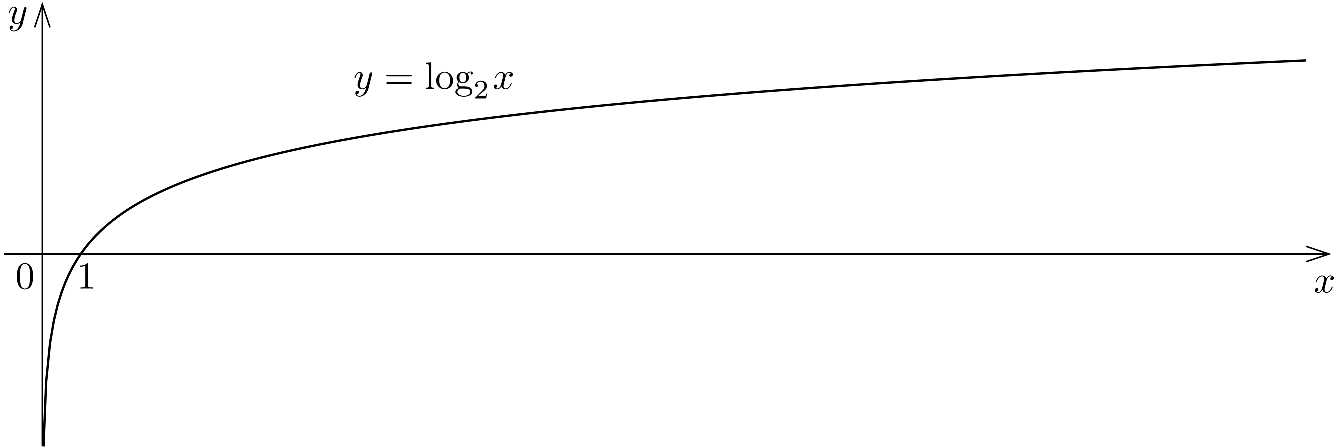
終

例



変数 x の値を限りなく大きくしていくと対数関数 $\log_2 x$ の値は限りなく大きくなる.

$\boxed{例}$



変数 x の値を限りなく大きくしていくと対数関数 $\log_2 x$ の値は限りなく大きくなる．つまり，対数関数 $\log_2 x$ は $x \to \infty$ のとき ∞ に発散する：

$$\lim_{x\to\infty} \log_2 x = \infty \ .$$

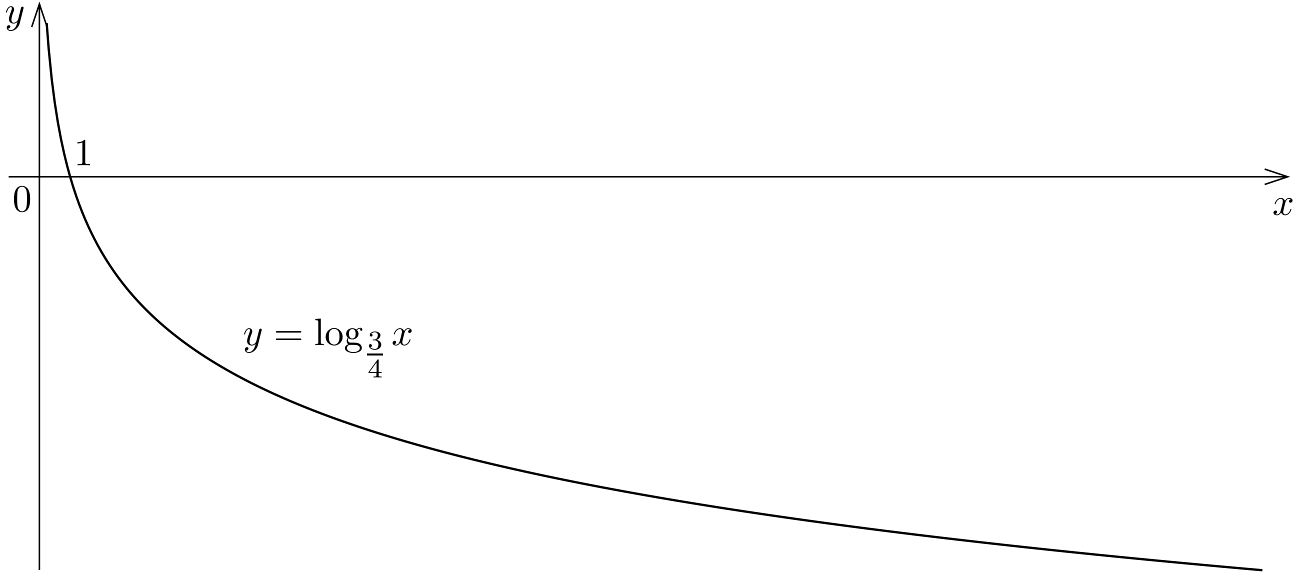
$\boxed{終}$

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，変数 x の値を限りなく大きくしていくと，$f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は $-\infty$ に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

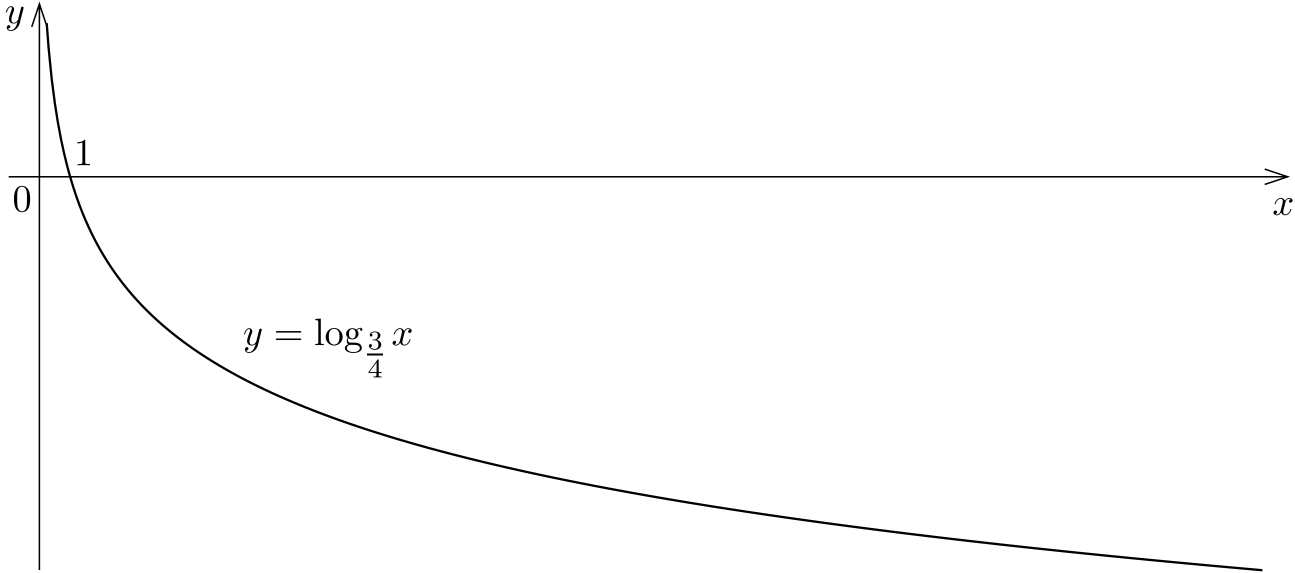
と書き表す.

例



　変数 x の値を限りなく大きくしていくと対数関数 $\log_{\frac{3}{4}} x$ の値は負で絶対値は限りなく大きくなる.

例

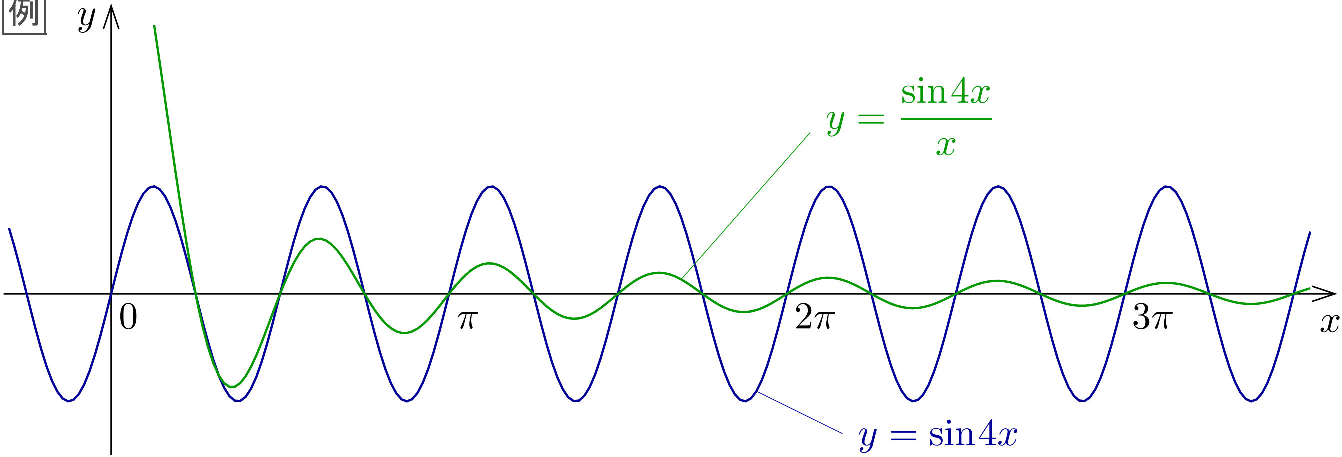


　変数 x の値を限りなく大きくしていくと対数関数 $\log_{\frac{3}{4}} x$ の値は負で絶対値は限りなく大きくなる．つまり，対数関数 $\log_{\frac{3}{4}} x$ は $x \to \infty$ のとき $-\infty$ に発散する： $\lim_{x\to\infty} \log_{\frac{3}{4}} x = -\infty$ ．

終

変数 x の関数 $f(x)$ について， $x \to \infty$ のとき， $f(x)$ が収束しないし ∞ にも $-\infty$ にも発散しないこともある．

例



関数 $\sin 4x$ は，$x \to \infty$ のとき，収束しないし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin 4x = \infty$ でも $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sin 4x = -\infty$ でもない．また，関数 $\dfrac{\sin 4x}{x}$ は，$x \to \infty$ のとき 0 に収束する．

終

関数の極限について次のように分類される：

$$\begin{cases} \text{収束する} = \text{唯一つの実数に限りなく近づく} = \text{極限値がある} \\ \text{収束しない} = \text{極限値が無い} = \text{発散する} \begin{cases} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外} \end{cases} \end{cases}.$$

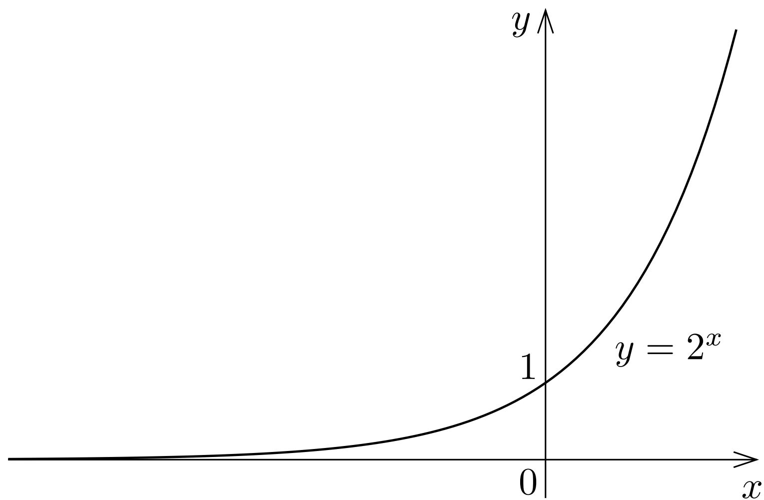
$\boxed{\text{例}}$ 関数 2^x について，変数 x の値を負にしてその絶対値を大きくしていくと 2^x の値は例えば次のようになる：

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5\ , \quad 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0.125\ , \quad 2^{-10} = \frac{1}{1024} \fallingdotseq 0.0009766\ , \quad \cdots$$

$\boxed{\text{例}}$ 関数 2^x について，変数 x の値を負にしてその絶対値を大きくしていくと 2^x の値は例えば次のようになる：

$$2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5 \ , \quad 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0.125 \ , \quad 2^{-10} = \frac{1}{1024} \fallingdotseq 0.0009766 \ , \quad \cdots$$

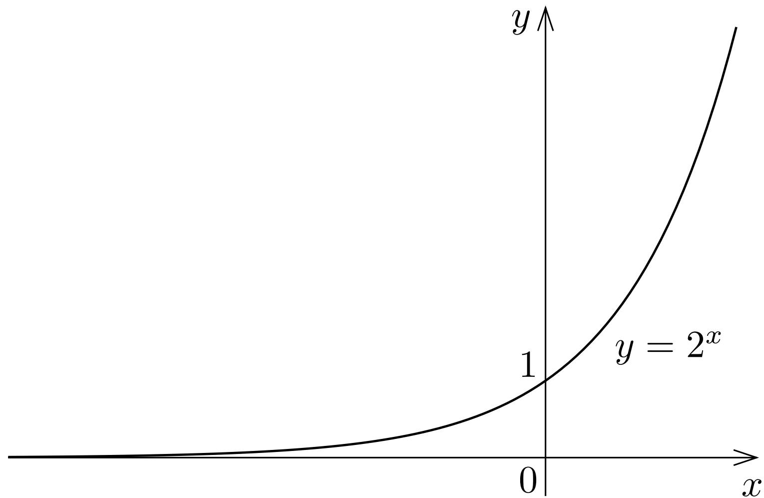
変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと関数 2^x の値は 0 に限りなく近づく.



例 関数 2^x について，変数 x の値を負にしてその絶対値を大きくしていくと 2^x の値は例えば次のようになる：

$$2^{-1}=\frac{1}{2}=0.5\ ,\quad 2^{-3}=\frac{1}{8}=0.125\ ,\quad 2^{-10}=\frac{1}{1024}\fallingdotseq 0.0009766\ ,\quad \cdots$$

変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと関数 2^x の値は 0 に限りなく近づく．このことを，$x\to-\infty$ のとき 2^x は 0 に収束するといい，$x\to-\infty$ のとき 2^x が限りなく近づく定数 0 を 2^x の極限値という．

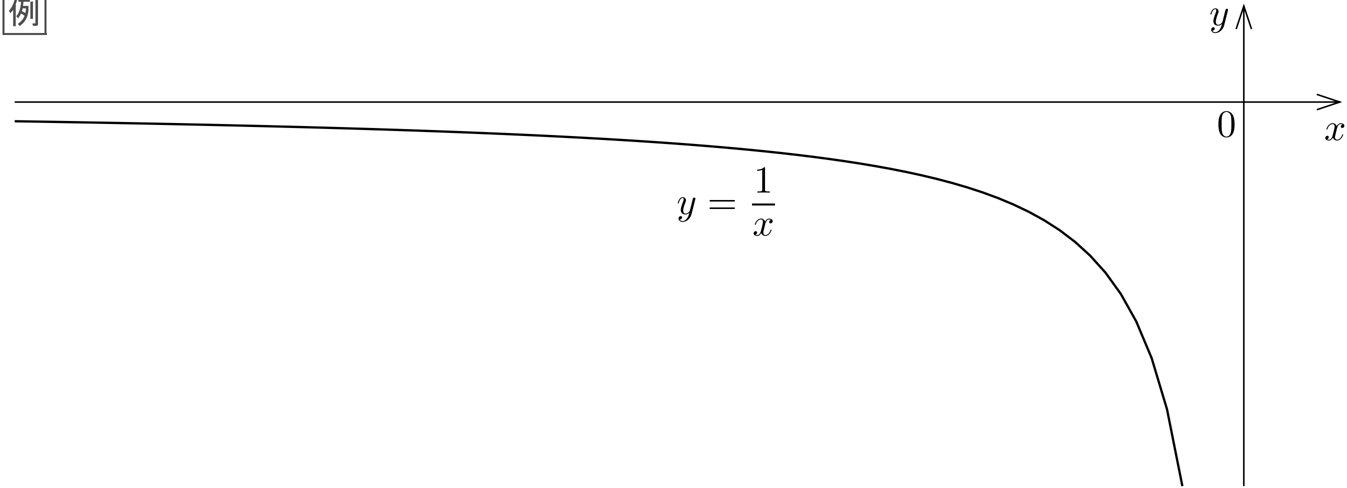


終

一般的に，変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づくならば，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という；この極限（値）を $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ と書き表す：

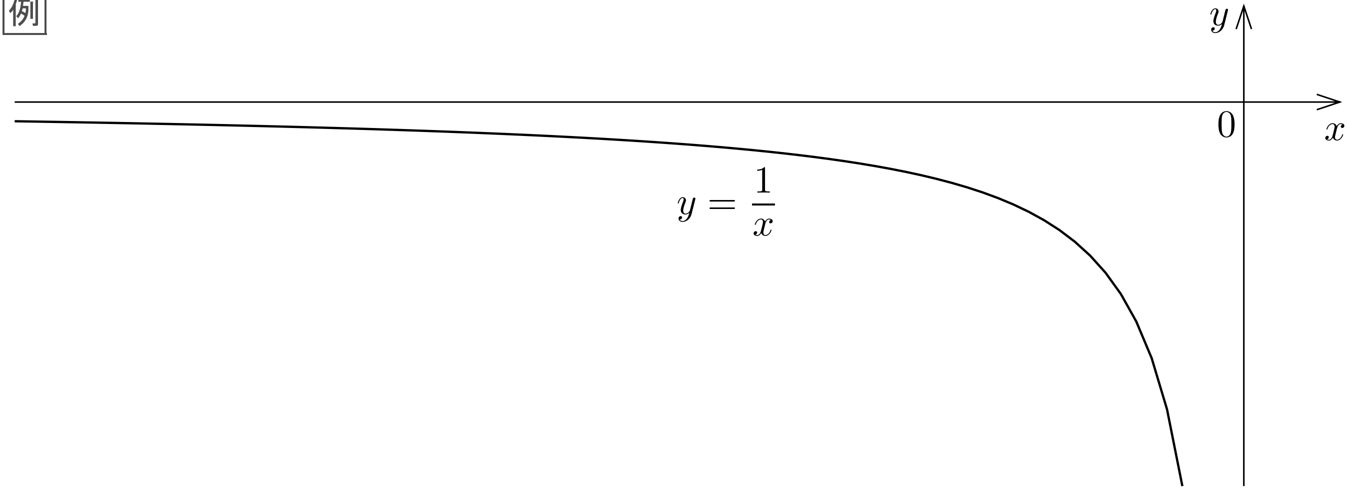
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \ .$$

例



変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと反比例 $\dfrac{1}{x}$ の値は　　に限りなく近づく.

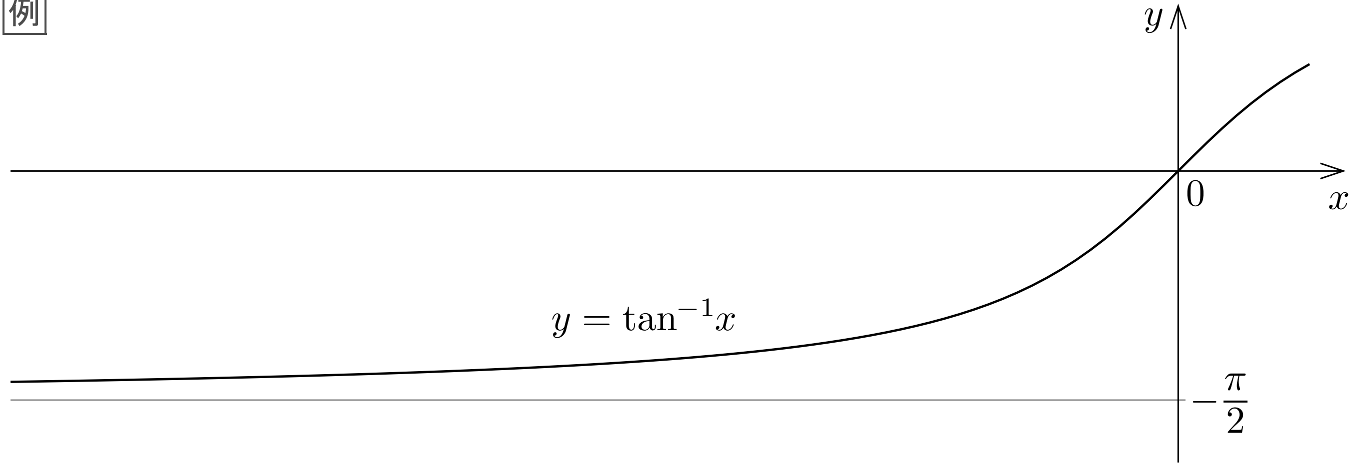
例



変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと反比例 $\dfrac{1}{x}$ の値は 0 に限りなく近づく．つまり，反比例 $\dfrac{1}{x}$ は $x \to -\infty$ のとき 0 に収束する： $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ．

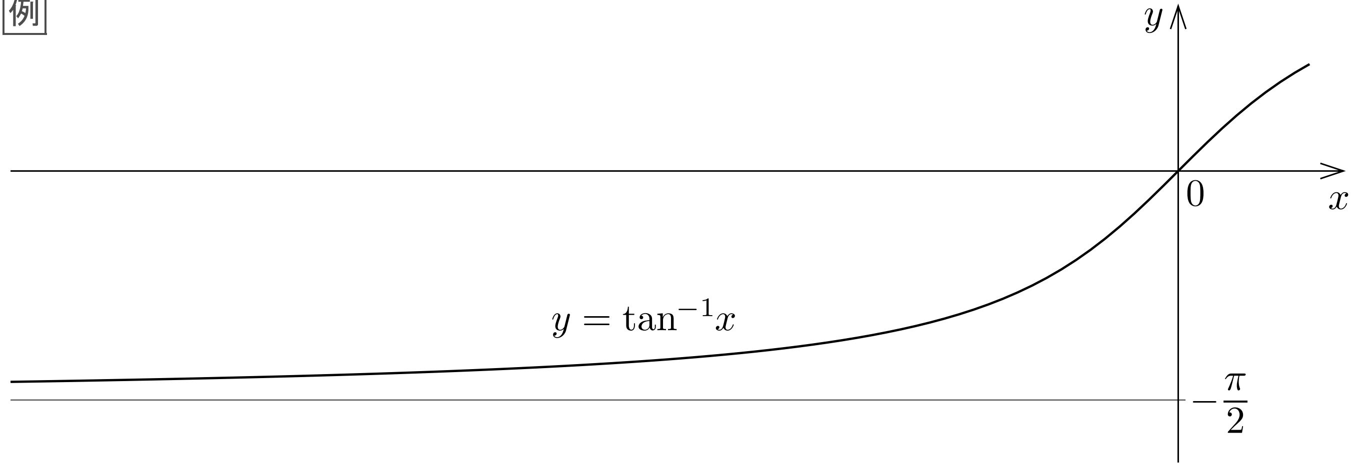
終

例



変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと逆正接関数 $\tan^{-1}x$ の値は　　　に限りなく近づく.

例



　変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと逆正接関数 $\tan^{-1} x$ の値は $-\dfrac{\pi}{2}$ に限りなく近づく．つまり，逆正接関数 $\tan^{-1} x$ は $x \to -\infty$ のとき $-\dfrac{\pi}{2}$ に収束する： $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$ ． 終

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について， $x \to -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき， $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について，$x \to -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

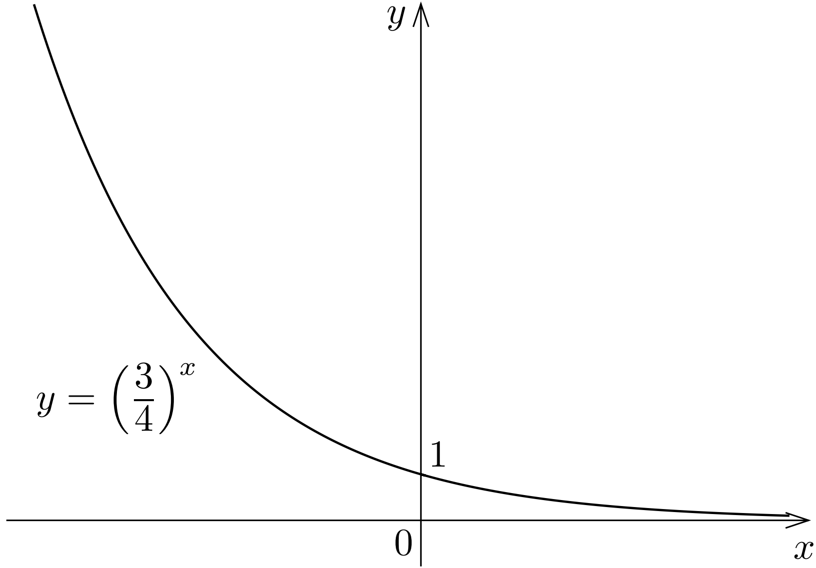
と書き表す．

変数 x の関数 $f(x)$ について，$x \to -\infty$ とすると $f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は $-\infty$ に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

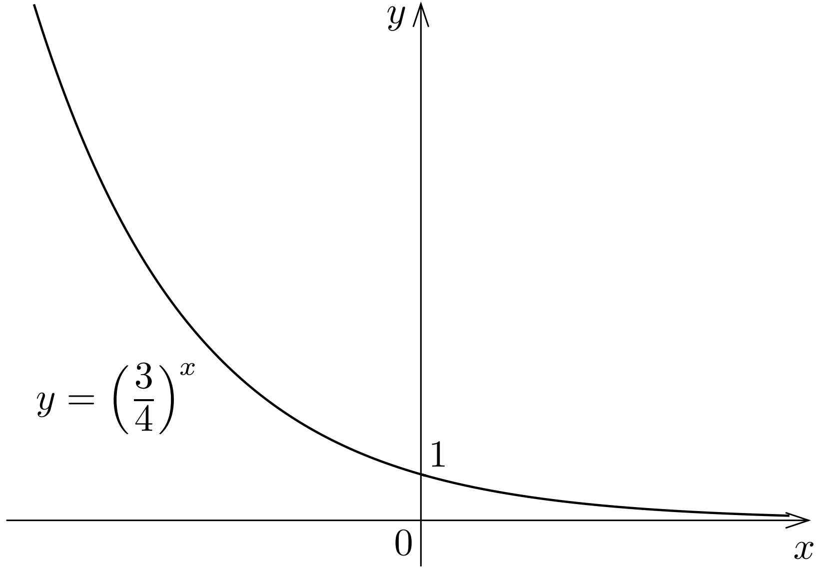
と書き表す．

例



　変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと指数接関数 $\left(\frac{3}{4}\right)^x$ の値は限りなく大きくなる.

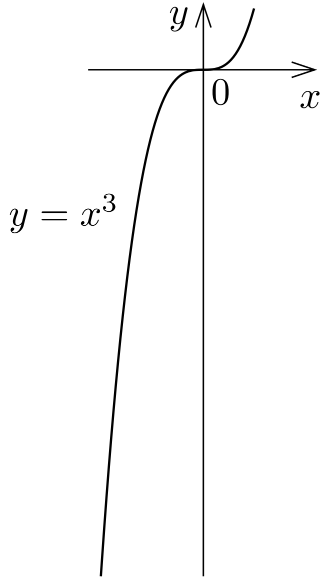
例



変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと指数接関数 $\left(\frac{3}{4}\right)^x$ の値は限りなく大きくなる．つまり，指数関数 $\left(\frac{3}{4}\right)^x$ は $x\to-\infty$ のとき ∞ に発散する：$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=\infty$ ．

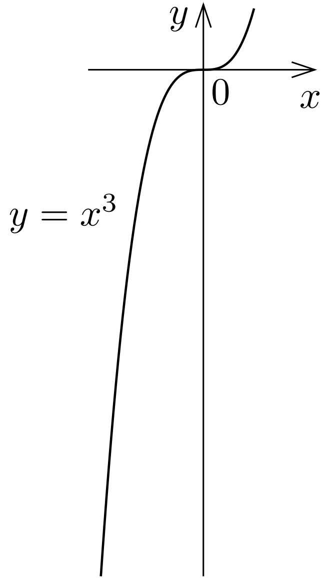
終

例



　変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと関数 x^3 の値は負でその絶対値が限りなく大きくなる.

例

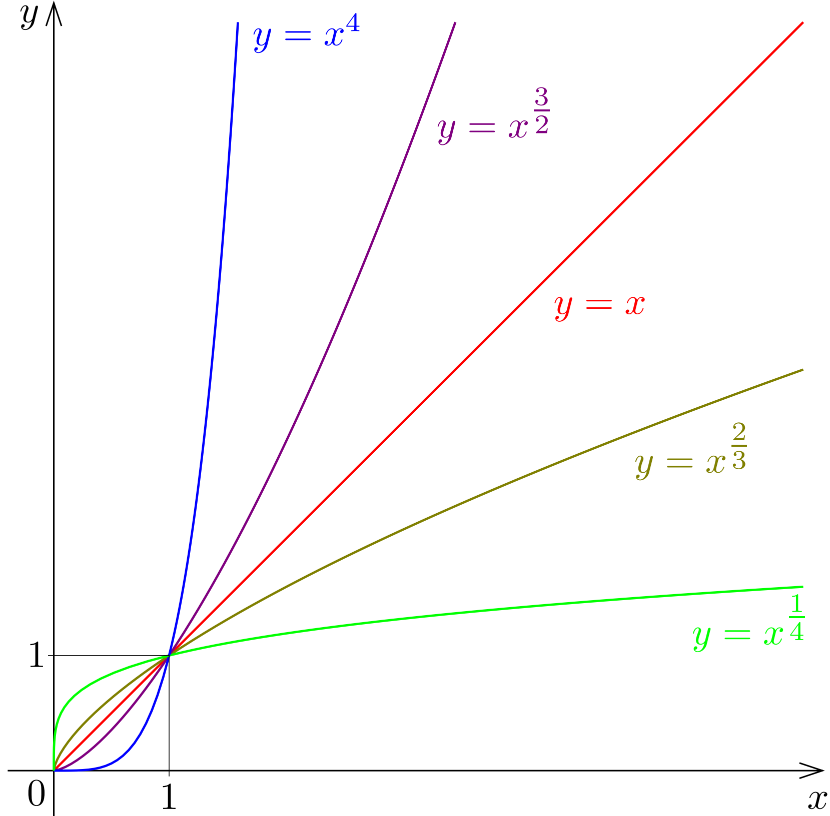


変数 x の値を負にしてその絶対値を限りなく大きくしていくと関数 x^3 の値は負でその絶対値が限りなく大きくなる．つまり，冪関数 x^3 は $x \to -\infty$ のとき $-\infty$ に発散する： $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ ．

終

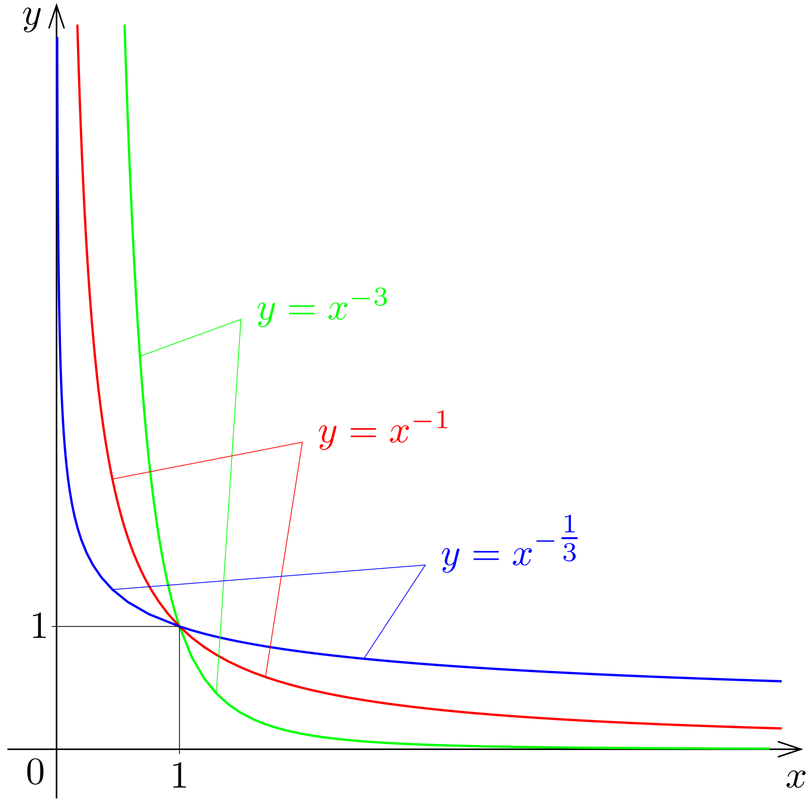
定数 p について $p>0$ とする．変数 x の冪関数 x^p は $x\to\infty$ のとき ∞ に発散する：

$$\lim_{x\to\infty} x^p = \infty \ .$$



定数 p について $p<0$ とする．変数 x の冪関数 x^p は $x \to \infty$ のとき 0 に収束する：

$$\lim_{x\to\infty} x^p = 0 \ .$$



定理　定数 p について $p \neq 0$ とする．p を指数とする冪関数 x^p ($x > 0$) について，

$$p > 0 \text{ のとき } \lim_{x \to \infty} x^p = \infty \ , \qquad p < 0 \text{ のとき } \lim_{x \to \infty} x^p = 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[8]{x}^{\,7}}{\sqrt[3]{x^4}}$ について, $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

定数 p について, $p > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p = \infty$, $p < 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p = 0$.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[8]{x}^{\,7}}{\sqrt[3]{x^4}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる.

定数 p について，$p > 0$ のとき $\lim_{x\to\infty} x^p = \infty$ ，$p < 0$ のとき $\lim_{x\to\infty} x^p = 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{9}{5}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{9}{5}-\frac{4}{3}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{7}{15}} = \infty \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[8]{x}^{\,7}}{\sqrt[3]{x^4}}$ について， $x \to \infty$ のときの極限を調べる．

定数 p について， $p > 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p = \infty$ ， $p < 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p = 0$ ．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[5]{x^9}}{\sqrt[3]{x}^{\,4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{9}{5}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{9}{5}-\frac{4}{3}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{7}{15}} = \infty \ .$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[8]{x}^{\,7}}{\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{7}{8}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{7}{8}-\frac{4}{3}} = \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{11}{24}} = 0 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問4.1.1}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}^{\,9}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[4]{x}^{\,7}}{\sqrt[5]{x^8}}$ について, $x \to \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}^{\,9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\quad}}{x^{\quad}} = \lim_{x\to\infty} x^{\qquad} = \lim_{x\to\infty} x^{\qquad} = \qquad .$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x}^{\,7}}{\sqrt[5]{x^8}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\quad}}{x^{\quad}} = \lim_{x\to\infty} x^{\qquad} = \lim_{x\to\infty} x^{\qquad} = \qquad .$$

$\boxed{問 4.1.1}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}^{\,9}}$ 及び $\dfrac{\sqrt[4]{x}^{\,7}}{\sqrt[5]{x^8}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}^{\,9}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{9}{4}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{5}{3}-\frac{9}{4}} = \lim_{x\to\infty} x^{-\frac{7}{12}} = 0 \ .$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x}^{\,7}}{\sqrt[5]{x^8}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{7}{4}}}{x^{\frac{8}{5}}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{7}{4}-\frac{8}{5}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{20}} = \infty \ .$$

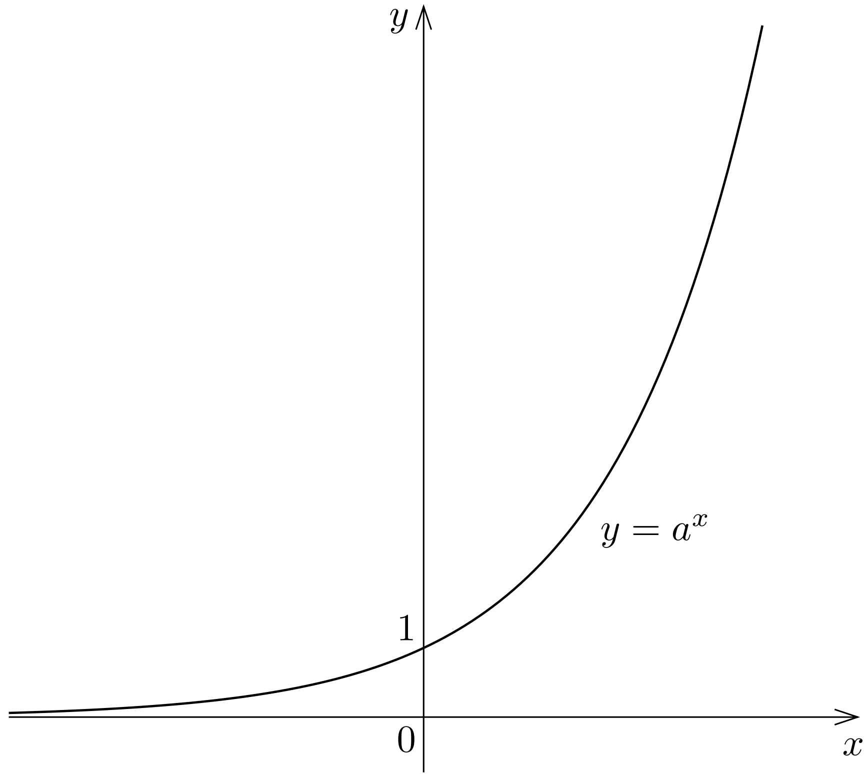
$\boxed{終}$

定数 a について $a>1$ とする．変数 x の指数関数 a^x は $x\to\infty$ のとき ∞ に発散する：

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \ .$$

変数 x の指数関数 a^x は $x\to-\infty$ のときに 0 に収束する：

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \ .$$

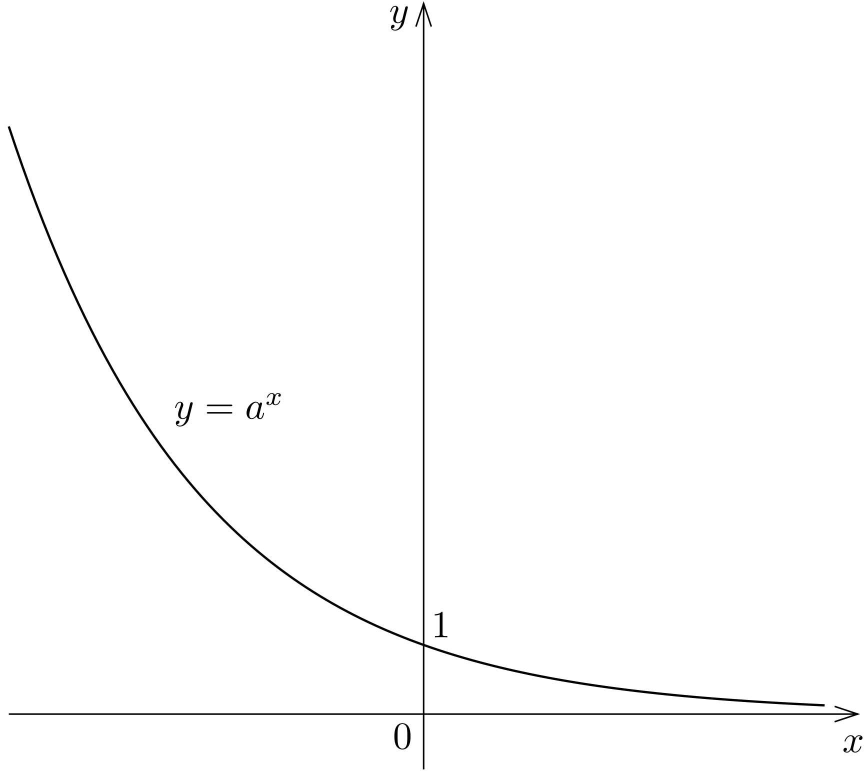


定数 a について $0 < a < 1$ とする．変数 x の指数関数 a^x は $x \to \infty$ のとき 0 に収束する：

$$\lim_{x\to\infty} a^x = 0 .$$

変数 x の指数関数 a^x は $x \to -\infty$ のとき ∞ に発散する：

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty .$$



定理　定数 a について $a>0$ ，$a \neq 1$ とする．a を底とする指数関数 a^x について，

$$a>1 \text{ のとき，} \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty \text{ ，} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad ;$$

$$0<a<1 \text{ のとき，} \quad \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \text{ ，} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty \quad .$$

例 変数 x の関数 $\dfrac{5^x}{4^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

定数 a について $a > 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ ，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

例 変数 x の関数 $\dfrac{5^x}{4^x}$ について, $x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

定数 a について $a > 1$ のとき, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

指数法則より $\dfrac{5^x}{4^x} = \left(\dfrac{5}{4}\right)^x$. $\dfrac{5}{4} > 1$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x = \infty \ , \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^x = 0 \ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{6^x}{7^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

定数 a について $0 < a < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x \to \infty} a^x = 0$ ，$\displaystyle\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{6^x}{7^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

定数 a について $0 < a < 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ ，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$.

指数法則より $\dfrac{6^x}{7^x} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^x$. $0 < \dfrac{6}{7} < 1$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^x = 0 \ , \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^x = \infty \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}4.1.2}$ 変数 x の関数 $\dfrac{5^x}{6^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5^x}{6^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \qquad .$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^x}{6^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}4.1.2}$ 変数 x の関数 $\dfrac{5^x}{6^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5^x}{6^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 \ .$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5^x}{6^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \infty \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 4.1.3}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x}{3^x}$ について，$x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{3^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \qquad .$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4^x}{3^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \qquad .$$

$\boxed{問4.1.3}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x}{3^x}$ について, $x \to \infty$ のときの極限及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

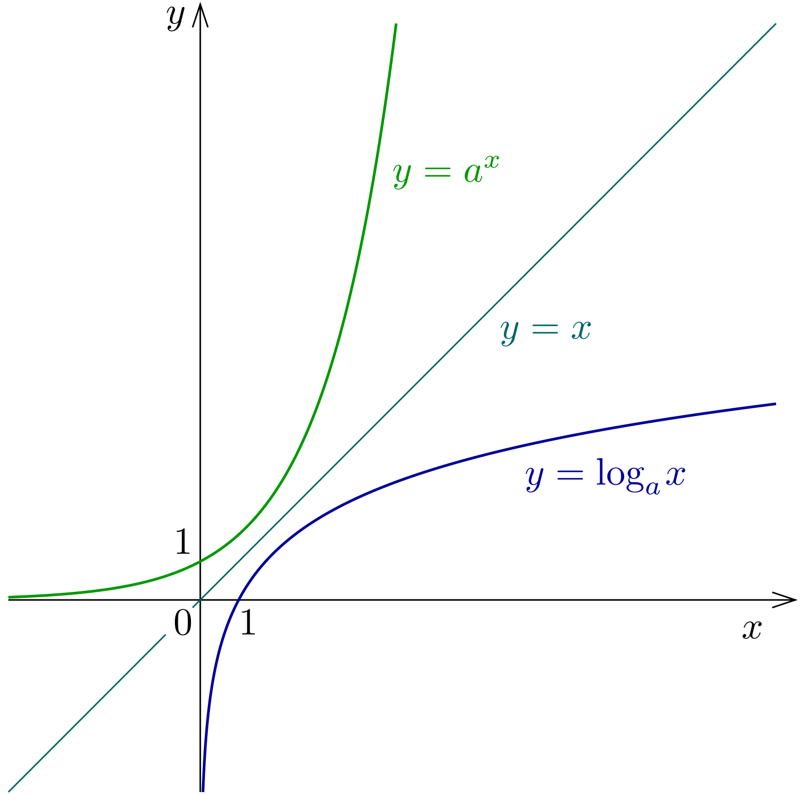
$$\lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{3^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = \infty \ .$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4^x}{3^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^x = 0 \ .$$

$\boxed{終}$

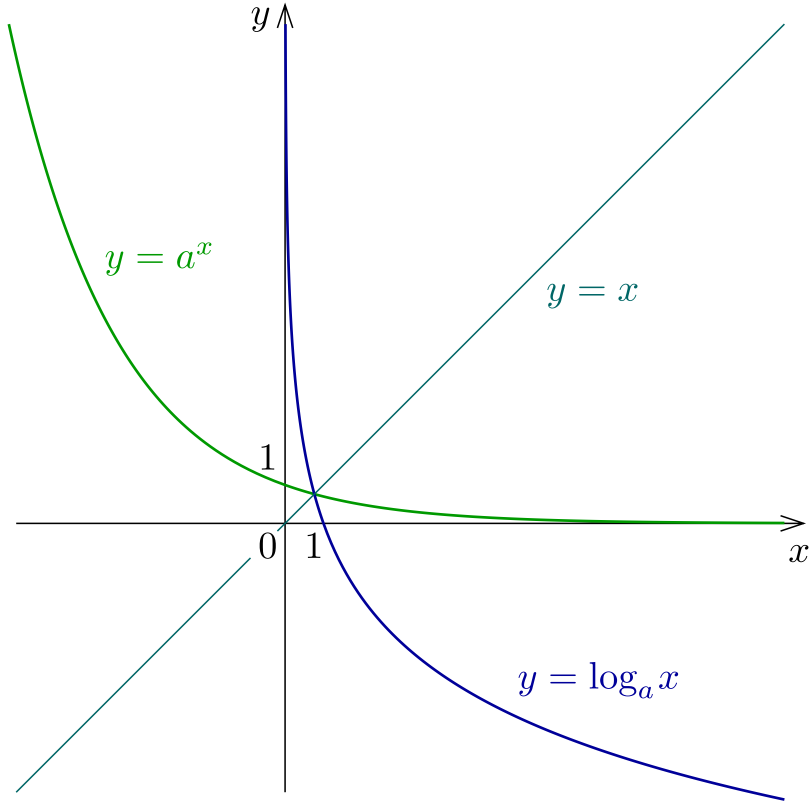
定数 a について $a > 1$ とする．変数 x の対数関数 $\log_a x$ は $x \to \infty$ のとき ∞ に発散する：

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty \ .$$



定数 a について $0 < a < 1$ とする．変数 x の対数関数 $\log_a x$ は $x \to \infty$ のとき $-\infty$ に発散する：

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = -\infty \ .$$



定理　定数 a について $a>0$ ，$a \neq 1$ とする．a を底とする対数関数 $\log_a x$ （ $x>0$ ）について，

$$a>1 \text{ のとき } \lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty \ , \quad 0<a<1 \text{ のとき } \lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty \ .$$