4.2 関数の極限の性質

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \to \infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c \ .$$

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \ .$$

関数 f について，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき，$f(x)$ は発散するという．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき， $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について，変数 x の値を限りなく大きくしていくと，$f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき， $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は $-\infty$ に発散するといい，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x について $x \to -\infty$ とすると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき， $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい， c を $f(x)$ の極限（値）という．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x について $x \to -\infty$ とすると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to -\infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c\ .$$

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x について $x \to -\infty$ とすると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to -\infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \ .$$

関数 f について，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき，$f(x)$ は発散するという．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x<K$ である f の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について， $x \to -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき， $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について， $x \to -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき， $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す．

変数 x の関数 $f(x)$ について， $x \to -\infty$ とすると $f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき， $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は $-\infty$ に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す．

関数の極限について次のように分類される：

$$\begin{cases} \text{収束する} = \text{唯一つの実数に限りなく近づく} = \text{極限値がある} \\ \text{収束しない} = \text{極限値が無い} = \text{発散する} \begin{cases} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外} \end{cases} \end{cases}.$$

定理　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \quad \text{（複号同順），}$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \ ;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば，

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \ .$$

定理　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \quad \text{（複号同順）},$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \ ;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば，

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \ .$$

次のことがいえる：変数 x と無関係な定数 k について， $\lim_{x\to\infty} k = k$ なので，関数 $f(x)$ について $x \to \infty$ のとき $f(x)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to\infty}\{f(x)+k\} = \left\{\lim_{x\to\infty} f(x)\right\} + \lim_{x\to\infty} k = \left\{\lim_{x\to\infty} f(x)\right\} + k \ ,$$

$$\lim_{x\to\infty}\{kf(x)\} = \left(\lim_{x\to\infty} k\right)\lim_{x\to\infty} f(x) = k\lim_{x\to\infty} f(x) \ .$$

定理　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ があるとする．定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ は収束してかつ極限値 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x \to a} g\big(f(x)\big) = g\Big(\lim_{x \to a} f(x)\Big) \ .$$

定理　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるとする．定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ は収束してかつ極限値 $\lim_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g\Bigl(\lim_{x\to a} f(x)\Bigr) .$$

定理　定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて， $f(x) = g(y)$ で， $x \to a$ のとき $y \to b$ ， $y \neq b$ とする． $y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to b} g(y) .$$

関数 f について $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ とする． $y = f(x)$ とおくと， $x \to a$ のとき $y \to \infty$ ；よって，定数 k に対して，

$$\lim_{x \to a} \frac{k}{f(x)} = \lim_{y \to \infty} \frac{k}{y} = k \lim_{y \to \infty} y^{-1} = k \cdot 0 = 0 \ .$$

関数 f について $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ とする． $y=f(x)$ とおくと， $x\to a$ のとき $y\to\infty$ ；よって，定数 k に対して，

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{f(x)} = \lim_{y\to\infty}\frac{k}{y} = k\lim_{y\to\infty} y^{-1} = k\cdot 0 = 0 \ .$$

関数 f について $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ とする． $y=-f(x)$ とおくと， $f(x)=-y$ ， $x\to a$ のとき $f(x)\to-\infty$ なので $y=-f(x)\to\infty$ ；よって，定数 k に対して，

$$\lim_{x\to a}\frac{k}{f(x)} = \lim_{y\to\infty}\frac{k}{-y} = -k\lim_{y\to\infty} y^{-1} = -k\cdot 0 = 0 \ .$$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = \lim_{x\to\infty}(5x^{-2}) = 0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right) = 9+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 9+0 = 9 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べる．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=\lim_{x\to\infty}(5x^{-2})=0$$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right)=9+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=9+0=9\ .$$

9 において関数 $\sqrt{x}$ は連続なので，

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{9+\frac{5}{x^2}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right)}\qquad\qquad .$$

関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\big(f(x)\big)$ があるとする．定数 a は実数か ∞ か $-\infty$ とする．変数 x について $x\to a$ のとき $f(x)$ が収束してかつ極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ において関数 g が連続であるならば，$\displaystyle\lim_{x\to a}g\big(f(x)\big)=g\Big(\lim_{x\to a}f(x)\Big)\ .$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\sqrt{9+\dfrac{5}{x^2}}$ について， $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x\to\infty} (5x^{-2}) = 0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right) = 9 + \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 9+0 = 9 \ .$$

9 において関数 $\sqrt{x}$ は連続なので,

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{9+\frac{5}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(9+\frac{5}{x^2}\right)} = \sqrt{9} = 3 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}4.2.1}$ 変数 x の関数 $\log_3\left(81+\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について， $x\to\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right) = \qquad \text{なので，}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right) = 81 + \qquad = \qquad .$$

において関数 $\log_3 x$ は連続なので，

$$\lim_{x\to\infty}\log_3\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right) = \log_3\left\{\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)\right\} =$$

$\boxed{問 4.2.1}$ 変数 x の関数 $\log_3\left(81+\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right)=0$$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)=81+0=81\ .$$

81 において関数 $\log_3 x$ は連続なので，

$$\lim_{x\to\infty}\log_3\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)=\log_3\left\{\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)\right\}=$$

$\boxed{問 4.2.1}$ 変数 x の関数 $\log_3\left(81+\dfrac{7}{\sqrt{x}}\right)$ について，$x \to \infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(7x^{-\frac{1}{2}}\right)=0 \quad なので，$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)=81+0=81 \ .$$

81 において関数 $\log_3 x$ は連続なので，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\log_3\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)&=\log_3\left\{\lim_{x\to\infty}\left(81+\frac{7}{\sqrt{x}}\right)\right\}=\log_3 81=\log_3 3^4\\&=4 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる．

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について, $x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

変数 y を $y = 2x - 5$ とおく. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{y}$.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について, $x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

変数 y を $y = 2x - 5$ とおく. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{y}$. $x \to \infty$ のとき $y = 2x - 5 \to \infty$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y} = \infty .$$

例 変数 x の関数 $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

変数 y を $y = 2x - 5$ とおく. $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^{y}$. $x \to \infty$ のとき $y = 2x - 5 \to \infty$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y} = \infty \ .$$

$x \to -\infty$ のとき $y = 2x - 5 \to -\infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-5} = \lim_{y\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{y} = 0 \ .$$

終

$\boxed{問 4.2.2}$ 変数 x の関数 $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7}$ について，$x \to \infty$ のときの及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

変数 y を $y = 3x - 7$ とおく. $x \to \infty$ のとき $y \to$ なので，

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \to} \left(\frac{5}{6}\right)^{y} = \quad .$$

$x \to -\infty$ のとき $y \to$ なので，

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \to} \left(\frac{5}{6}\right)^{y} = \quad .$$

問4.2.2 変数 x の関数 $\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7}$ について， $x\to\infty$ のときの及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

変数 y を $y=3x-7$ とおく． $x\to\infty$ のとき $y\to\infty$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{y} = 0 \ .$$

$x\to-\infty$ のとき $y\to-\infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y\to-\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{y} = \infty \ .$$

終

$\boxed{問4.2.3}$ 変数 y の関数 $\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y}$ について，$y \to \infty$ のとき及び $y \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

変数 x を $x = 5 - 2y$ とおく. $y \to \infty$ のとき $x \to \qquad$ なので，

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x\to\qquad}\left(\frac{8}{7}\right)^{x} = \qquad .$$

$y \to -\infty$ のとき $x \to \qquad$ なので，

$$\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x\to\qquad}\left(\frac{8}{7}\right)^{x} = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}4.2.3}$ 変数 y の関数 $\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y}$ について， $y \to \infty$ のとき及び $y \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

変数 x を $x = 5 - 2y$ とおく. $y \to \infty$ のとき $x \to -\infty$ なので，

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^{x} = 0 \ .$$

$y \to -\infty$ のとき $x \to \infty$ なので，

$$\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{7}\right)^{x} = \infty \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t \to \infty$ のとき及び $t \to -\infty$ のときの極限を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t \to \infty$ のとき及び $t \to -\infty$ のときの極限を調べる．

$\displaystyle\lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t =$ 　　なので

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t \to \infty$ のとき及び $t \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \quad \text{なので} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3}\lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} \quad ;$$

例 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t\to\infty$ のとき及び $t\to-\infty$ のときの極限を調べる．

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\frac{\pi}{2}$ なので $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}=\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$ ； $\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので，

$$\lim_{t\to\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について, $t\to\infty$ のとき及び $t\to-\infty$ のときの極限を調べる.

$\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\dfrac{\pi}{2}$ なので $\lim_{t\to\infty}\dfrac{\tan^{-1}t}{3}=\dfrac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}$; $\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので,

$$\lim_{t\to\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ .$$

$\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t=$ なので ;

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t \to \infty$ のとき及び $t \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{\pi}{2} \text{ なので } \lim_{t\to\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3}\lim_{t\to\infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

; $\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので，

$$\lim_{t\to\infty} \sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\left(\lim_{t\to\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \ .$$

$$\lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}t = -\frac{\pi}{2} \text{ なので } \lim_{t\to-\infty} \frac{\tan^{-1}t}{3} = \frac{1}{3}\lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}t = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \ ;$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 t の関数 $\sin\left(\dfrac{\tan^{-1}t}{3}\right)$ について，$t\to\infty$ のとき及び $t\to-\infty$ のときの極限を調べる.

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\frac{\pi}{2}$ なので $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}=\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$; $\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので，

$$\lim_{t\to\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\ .$$

$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t=-\frac{\pi}{2}$ なので $\displaystyle\lim_{t\to-\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}=\frac{1}{3}\lim_{t\to-\infty}\tan^{-1}t=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$; $-\dfrac{\pi}{6}$ において正弦関数 $\sin x$ は連続なので，

$$\lim_{t\to-\infty}\sin\left(\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(\lim_{t\to-\infty}\frac{\tan^{-1}t}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問4.2.4}$ 変数 y の関数 $\cos\left(\dfrac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について， $y \to \infty$ のとき及び $y \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

$\displaystyle\lim_{y\to\infty} \tan^{-1}y =$ 　　なので， $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} =$ 　　 $=$ 　　； 　　において余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{y\to\infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y\to\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos \qquad = \qquad .$$

$\displaystyle\lim_{y\to-\infty} \tan^{-1}y =$ 　　なので， $\displaystyle\lim_{y\to-\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3} =$ 　　 $=$ 　　； 　　において余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{y\to-\infty} \cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y\to-\infty} \frac{4\tan^{-1}y}{3}\right) = \cos\left(\qquad \right)$$

$$= \qquad .$$

$\boxed{\text{問}4.2.4}$ 変数 y の関数 $\cos\left(\dfrac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について，$y\to\infty$ のとき及び $y\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\tan^{-1}y=\frac{\pi}{2}$ なので，$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$ ；$\dfrac{2\pi}{3}$ において余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{y\to\infty}\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(\lim_{y\to\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ .$$

$\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\tan^{-1}y=\qquad$ なので，$\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}=\qquad=\qquad$ ；$\qquad$ において余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{y\to-\infty}\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(\lim_{y\to-\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(\qquad\right)$$

$$=\qquad.$$

$\boxed{\text{問}4.2.4}$ 変数 y の関数 $\cos\left(\dfrac{4\tan^{-1}y}{3}\right)$ について， $y\to\infty$ のとき及び $y\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\tan^{-1}y=\frac{\pi}{2}$ なので， $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$ ； $\dfrac{2\pi}{3}$ において余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{y\to\infty}\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(\lim_{y\to\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\ .$$

$\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\tan^{-1}y=-\frac{\pi}{2}$ なので， $\displaystyle\lim_{y\to-\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}=\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2\pi}{3}$ ； $-\dfrac{2\pi}{3}$ において余弦関数 $\cos x$ は連続なので，

$$\lim_{y\to-\infty}\cos\left(\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(\lim_{y\to-\infty}\frac{4\tan^{-1}y}{3}\right)=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $x\sin\dfrac{2}{x}$ について, $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $x\sin\dfrac{2}{x}$ について， $x\to\infty$ のときの極限を調べる.

変数 y を $y=\dfrac{2}{x}$ とおく. $x=\dfrac{2}{y}$ なので

$$x\sin\frac{2}{x} = \frac{2}{y}\sin y = 2\cdot\frac{\sin y}{y} \ .$$

例 変数 x の関数 $x\sin\dfrac{2}{x}$ について，$x\to\infty$ のときの極限を調べる．

変数 y を $y=\dfrac{2}{x}$ とおく．$x=\dfrac{2}{y}$ なので

$$x\sin\frac{2}{x} = \frac{2}{y}\sin y = 2\cdot\frac{\sin y}{y} \ .$$

$x\to\infty$ のとき $y=\dfrac{2}{x}\to 0$ ．$\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{2}{x}\right) = \lim_{y\to 0}\left(2\cdot\frac{\sin y}{y}\right) = 2\cdot 1 = 2 \ .$$

終

$\boxed{\text{問}4.2.5}$ 変数 y の関数 $y\sin\dfrac{3}{2y}$ について，$y \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

変数 x を $x = \dfrac{3}{2y}$ とおく．$y = \qquad$ なので

$$y\sin\frac{3}{2y} = \qquad \sin x = \qquad \cdot \frac{\sin x}{x} \quad .$$

$y \to -\infty$ のとき $x \to \qquad$ ．$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \qquad$ なので，

$$\lim_{y\to -\infty}\left(y\sin\frac{3}{2y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\qquad \cdot \frac{\sin x}{x}\right) = \qquad \cdot \qquad = \qquad .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}4.2.5}$ 変数 y の関数 $y\sin\dfrac{3}{2y}$ について, $y \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

変数 x を $x = \dfrac{3}{2y}$ とおく. $y = \dfrac{3}{2x}$ なので

$$y\sin\frac{3}{2y} = \frac{3}{2x}\sin x = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sin x}{x} .$$

$y \to -\infty$ のとき $x \to 0$. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ なので,

$$\lim_{y\to-\infty}\left(y\sin\frac{3}{2y}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2} .$$

$\boxed{\text{終}}$

定理　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \quad \text{（複号同順）},$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \left\{\lim_{x\to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x\to a} g(x)\right\} \ ;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ ならば，

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \ .$$

　定数 a 及び変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ または $g(x)$ が発散するときはこの定理を使えない．

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことが一般的にいえる．

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことが一般的にいえる．

(1) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ で $x \to a$ のとき $g(x)$ が収束するならば，

$\lim_{x \to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \infty$ ．

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする. 変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことが一般的にいえる.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ で $x \to a$ のとき $g(x)$ が収束するならば,
$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \infty$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ で $x \to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) > 0$ ならば,

$$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\} = \infty \text{ , } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \infty \text{ .}$$

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことが一般的にいえる．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\infty\ .$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)>0$ ならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\infty\ ,\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty\ .$$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)<0$ ならば，

$$\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty\ .$$

定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と $g(x)$ とについて以下のことが一般的にいえる．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束するならば，
$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\infty$ ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)>0$ ならば，
$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\infty$ ， $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ ．

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ で $x\to a$ のとき $g(x)$ が収束して $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)<0$ ならば，
$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=-\infty$ ， $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$ ．

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\infty$ ならば， $\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\infty$ ，
$\displaystyle\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\infty$ ．

$\boxed{例}$ 変数 y の関数 $2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{y}-7$ について $y\to\infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 y の関数 $2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7$ について $y \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\frac{5}{4} > 1$ より $\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^y = \infty$ なので, $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\} = \infty$, よって $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y - 7\right\} = \infty$.

例 変数 y の関数 $2\left(\frac{5}{4}\right)^y-7$ について $y\to\infty$ のときの極限を調べる.

$\frac{5}{4}>1$ より $\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^y=\infty$ なので, $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\}=\infty$, よって $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y-7\right\}=\infty$.

$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^y=\infty$ は発散しているので $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\}$ を $2\lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^y$ に変形しないこと. $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\}=\infty$ は発散しているので $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y-7\right\}$ を $\lim_{y\to\infty}\left\{2\left(\frac{5}{4}\right)^y\right\}-7$ に変形しないこと. 終

$\boxed{問 4.2.6}$ 変数 u の関数 $5\left(\frac{6}{7}\right)^u+8$ について，$u\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{u\to-\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^u = \qquad \text{なので，} \quad \lim_{u\to-\infty}\left\{5\left(\frac{6}{7}\right)^u+8\right\} = \qquad .$$

$\boxed{問 4.2.6}$ 変数 u の関数 $5\left(\frac{6}{7}\right)^u+8$ について，$u\to-\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{u\to-\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^u=\infty \text{ なので，} \lim_{u\to-\infty}\left\{5\left(\frac{6}{7}\right)^u+8\right\}=\infty \ .$$ $\boxed{終}$

$\boxed{問 4.2.7}$ 変数 y の関数 $\left(\dfrac{5}{y^2}-3\right)\log_2 y$ について, $y\to\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\lim_{y\to\infty}\frac{5}{y^2}= \qquad \text{なので} \quad \lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{y^2}-3\right)= \qquad . \quad \lim_{y\to\infty}\log_2 y= \qquad \text{なので}$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{y^2}-3\right)\log_2 y\right\}= \qquad .$$

$\boxed{問 4.2.7}$ 変数 y の関数 $\left(\dfrac{5}{y^2}-3\right)\log_2 y$ について， $y \to \infty$ のときの極限を調べよ．

$$\lim_{y\to\infty}\frac{5}{y^2}=0 \quad \text{なので} \quad \lim_{y\to\infty}\left(\frac{5}{y^2}-3\right)=-3\ . \quad \lim_{y\to\infty}\log_2 y=\infty \quad \text{なので}$$

$$\lim_{y\to\infty}\left\{\left(\frac{5}{y^2}-3\right)\log_2 y\right\}=-\infty\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x+8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

例 変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる．

$$\frac{7^x+8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x = 0$,　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x = 0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x = 0 .$$

例 変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について，$x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x+8^x}{9^x}=\frac{7^x}{9^x}+\frac{8^x}{9^x}=\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=0$ ，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x=0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=0\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x=\infty$ ，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x=\infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x}=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}=\infty\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{7^x+8^x}{9^x}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$$\frac{7^x+8^x}{9^x} = \frac{7^x}{9^x} + \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x = 0$ ， $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x = 0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x = 0 .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x = \infty$ ， $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x = \infty$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7^x+8^x}{9^x} = \lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x\right\} = \infty .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x = \infty$ 及び $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x = \infty$ は発散しているので

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{7}{9}\right)^x + \left(\frac{8}{9}\right)^x\right\}$ を $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^x + \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^x$ に変形しないこと. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問4.2.8}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x+5^x}{6^x}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\frac{4^x+5^x}{6^x} = \frac{\quad}{\quad} + \frac{\quad}{\quad} = \left(\quad\right)^x + \left(\quad\right)^x .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x = \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x = \quad$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\quad\right)^x + \left(\quad\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x + \lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x = \quad .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x = \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x = \quad$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\quad\right)^x + \left(\quad\right)^x\right\} = \quad .$$

$\boxed{問4.2.8}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x+5^x}{6^x}$ について, $x\to\infty$ のとき及び $x\to-\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x+5^x}{6^x}=\frac{4^x}{6^x}+\frac{5^x}{6^x}=\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x.$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x=\quad,\quad \lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x=\quad$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\quad\right)^x+\left(\quad\right)^x\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x+\lim_{x\to\infty}\left(\quad\right)^x=\quad.$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x=\quad,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x=\quad$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x}=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\quad\right)^x+\left(\quad\right)^x\right\}=\quad.$$

$\boxed{\text{問}4.2.8}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x+5^x}{6^x}$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ．

$$\frac{4^x+5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$ ，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x = 0$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x = \qquad$ ，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\quad\right)^x = \qquad$ なので，

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\quad\right)^x + \left(\quad\right)^x\right\} = \qquad .$$

$\boxed{問4.2.8}$ 変数 x の関数 $\dfrac{4^x+5^x}{6^x}$ について, $x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{4^x+5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x = 0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x = 0 .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^x = \infty$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x+5^x}{6^x} = \lim_{x\to-\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x\right\} = \infty .$$

$\boxed{終}$