4.3 代数的な関数の極限

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という． $x \to \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \to \infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c \ .$$

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，x の値を限りなく大きくすると $f(x)$ は c に収束する，または，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to \infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = c \ .$$

関数 f について，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき，$f(x)$ は発散するという．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があるとする.

変数 x の関数 $f(x)$ について，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき， $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である f の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき， $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す．

変数 x の関数 $f(x)$ について，変数 x の値を限りなく大きくしていくと，$f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき， $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は $-\infty$ に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x について $x \to -\infty$ とすると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x について $x \to -\infty$ とすると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to -\infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \ .$$

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があり，

f の定義域の実数を表す変数 x について $x \to -\infty$ とすると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限（値）という．$x \to -\infty$ のときの $f(x)$ の極限値を $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c \ .$$

関数 f について，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ がどんな実数にも収束しないとき，$f(x)$ は発散するという．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について，$x \to -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき，$x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す．

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x < K$ である f の定義域の実数 x があるとする．

変数 x の関数 $f(x)$ について， $x \to -\infty$ とすると $f(x)$ の値が限りなく大きくなるとき， $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は ∞ に発散するといい，

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す．

変数 x の関数 $f(x)$ について， $x \to -\infty$ とすると $f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき， $x \to -\infty$ のとき $f(x)$ は $-\infty$ に発散するといい，

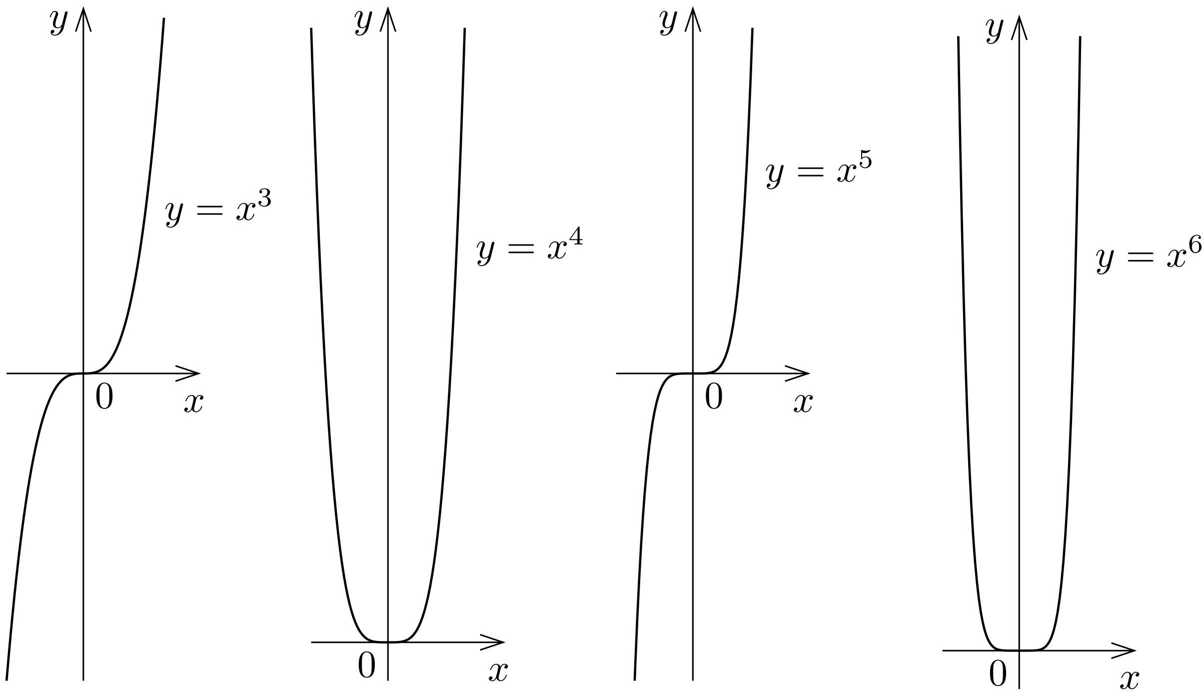
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

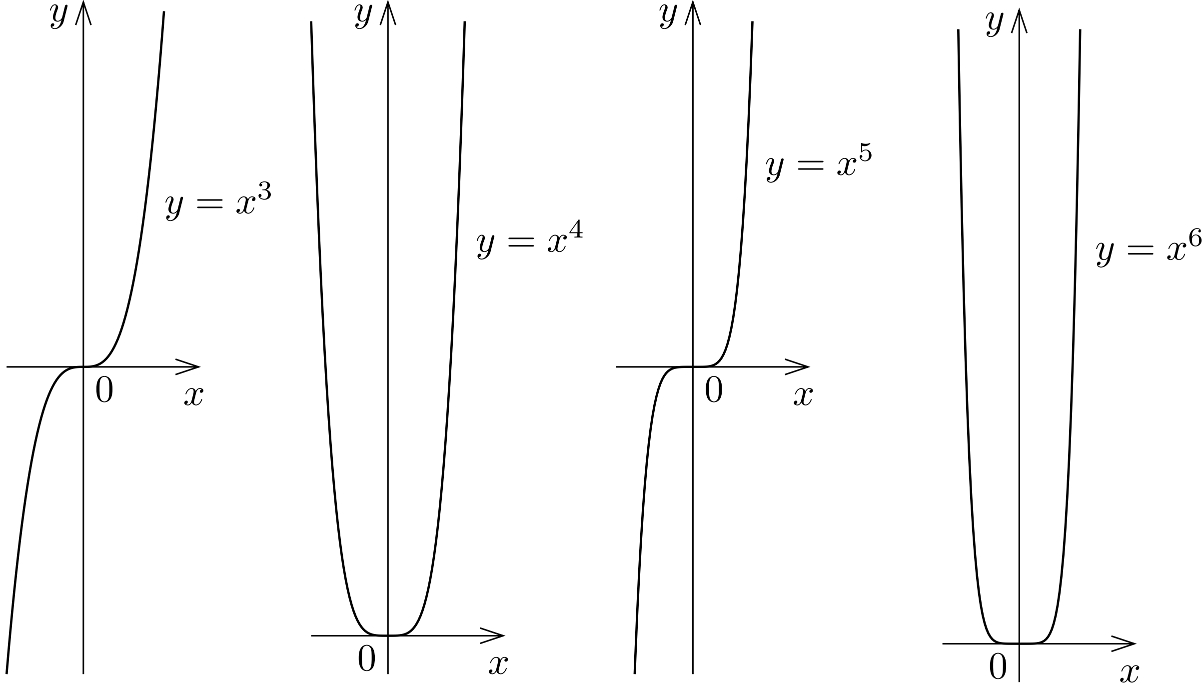
と書き表す．

関数の極限について次のように分類される：

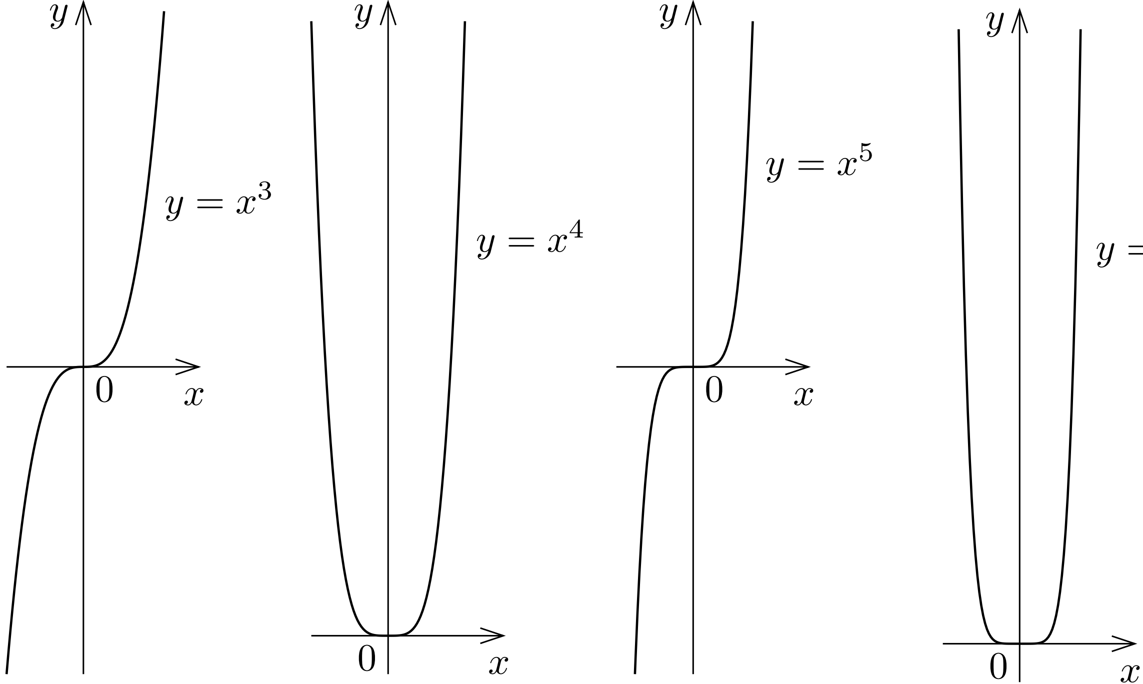
$$\begin{cases} \text{収束する} = \text{唯一つの実数に限りなく近づく} = \text{極限値がある} \\ \text{収束しない} = \text{極限値が無い} = \text{発散する} \begin{cases} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外} \end{cases} \end{cases} .$$

定数 n は正の自然数とする. xy 座標平面において冪関数 $y = x^n$ のグラフは次のようになる.





これらのグラフより $\lim_{x \to \infty} x^n = \infty$.



これらのグラフより，n が奇数のとき $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ ，n が偶数のとき $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \infty$.

定理　定数 n は正の自然数とする．n を指数とする冪関数 x^n について，

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty\ , \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & (n\ \text{が奇数のとき}) \\ \infty & (n\ \text{が偶数のとき}) \end{cases} .$$

定理　定数 n は正の自然数とする．n を指数とする冪関数 x^n について，

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \infty & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} .$$

この定理より更に，定数 k 及び正の自然数を表す定数 n について，

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \ .$$

変数 x の関数 $f(x)$ の値が x の整式で表されるとき $f(x)$ を有理整関数という．つまり，定数関数，1 次関数，2 次関数，3 次関数，などを併せて有理整関数という．

変数 x の関数 $f(x)$ の値が x の整式で表されるとき $f(x)$ を有理整関数という．つまり，定数関数，1 次関数，2 次関数，3 次関数，などを併せて有理整関数という．

$x \to \pm\infty$ のときの有理整関数 $f(x)$ の極限を求めるためには，$f(x)$ を表す整式において最高次の x の冪を括り出す．

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $3x^2-7x+4$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $3x^2-7x+4$ について $x\to\infty$ のときの極限を調べる.

x の 2 次式 $3x^2-7x+4$ において最高次の x の冪 x^2 を括り出す:

$$3x^2-7x+4 = x^2\left(\frac{3x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right) = x^2\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right) .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $3x^2-7x+4$ について $x\to\infty$ のときの極限を調べる.

x の 2 次式 $3x^2-7x+4$ において最高次の x の冪 x^2 を括り出す:

$$3x^2-7x+4 = x^2\left(\frac{3x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right) = x^2\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right) .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right) = 3-\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2} = 3-0+0 = 3 .$$

例 変数 x の関数 $3x^2-7x+4$ について $x\to\infty$ のときの極限を調べる.

x の 2 次式 $3x^2-7x+4$ において最高次の x の冪 x^2 を括り出す:

$$3x^2-7x+4=x^2\left(\frac{3x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)=x^2\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right).$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=3-\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=3-0+0=3.$$

更に $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2-7x+4)=\lim_{x\to\infty}\left\{x^2\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\right\}=\infty.$$

例 変数 x の関数 $3x^2-7x+4$ について $x\to\infty$ のときの極限を調べる.

x の 2 次式 $3x^2-7x+4$ において最高次の x の冪 x^2 を括り出す:

$$3x^2-7x+4=x^2\left(\frac{3x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{4}{x^2}\right)=x^2\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right) .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right)=3-\lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=3-0+0=3 .$$

更に $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2-7x+4)=\lim_{x\to\infty}\left\{x^2\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\right\}=\infty .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$ は発散しているので $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{x^2\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right)\right\}$ を

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}\right)$ に変形しないこと. 終

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}$ について $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\dfrac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}$ について $x\to-\infty$ のときの極限を調べる.

x の 3 次式 $\dfrac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}$ において最高次の x の冪 x^3 を括り出す:

$$\frac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}=\frac{x^3}{5}\left(\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{4}{x^3}\right)=\frac{x^3}{5}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right).$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}$ について $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

x の 3 次式 $\dfrac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}$ において最高次の x の冪 x^3 を括り出す：

$$\frac{2x^3-3x^2-2x+4}{5} = \frac{x^3}{5}\left(\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3}\right) = \frac{x^3}{5}\left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$ ， $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$ ， $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^3}=0$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) = 2-0-0+0 = 2 ;$$

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}$ について $x\to-\infty$ のときの極限を調べる.

x の 3 次式 $\dfrac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}$ において最高次の x の冪 x^3 を括り出す:

$$\frac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}=\frac{x^3}{5}\left(\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{4}{x^3}\right)=\frac{x^3}{5}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right).$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^3}=0$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)=2-0-0+0=2\ ;$$

更に $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{5}=-\infty$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3-3x^2-2x+4}{5}=\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{x^3}{5}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\right\}=-\infty\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{5}=\infty$ は発散しているので $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left\{\frac{x^3}{5}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)\right\}$ を $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{5}\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)$ に変形しないこと. 終

$\boxed{\text{問}4.3.1}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-4x+5}{3}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{2x^2-4x+5}{3} = \frac{x^2}{3}\left(\qquad\qquad\qquad \right).$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3} = \qquad ,\quad \lim_{x\to\infty}\left(\qquad\qquad\qquad \right) = \qquad\qquad\qquad = \qquad$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+5}{3} = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^2}{3}\left(\qquad\qquad\qquad \right)\right\} = \qquad .$$

$\boxed{問 4.3.1}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-4x+5}{3}$ について $x\to\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{2x^2-4x+5}{3} = \frac{x^2}{3}\left(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right) .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3}=\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=2-0+0=2$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+5}{3} = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^2}{3}\left(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)\right\}=\infty .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}4.3.2}$ 変数 x の関数 $\dfrac{3}{2}x^3-4x^2+5$ について $x\to-\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{3}{2}x^3-4x^2+5=x^3\left(\qquad\qquad\qquad\right).$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^3=\qquad\qquad,\quad \lim_{x\to-\infty}\left(\qquad\qquad\qquad\right)=\qquad \text{なので,}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}x^3-4x^2+5\right)=\lim_{x\to-\infty}\left\{x^3\left(\qquad\qquad\qquad\right)\right\}=\qquad\qquad.$$

$\boxed{問 4.3.2}$ 変数 x の関数 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5$ について $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5 = x^3\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3}\right) .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3}\right) = \frac{3}{2}$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5\right) = \lim_{x\to-\infty}\left\{x^3\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3}\right)\right\} = -\infty .$$

$\boxed{終}$

次数が 1 以上である有理整関数 $f(x)$ について，$x \to \infty$ のとき及び $x \to -\infty$ のとき，$f(x)$ は ∞ か $-\infty$ かのどちらかに発散する．

変数 x の関数 $f(x)$ の値が分母分子共に x の整式である分数で表されるとき $f(x)$ を有理関数という.

変数 x の関数 $f(x)$ の値が分母分子共に x の整式である分数で表されるとき $f(x)$ を有理関数という.

変数 x の整式 $P(x)$ と $Q(x)$ に対して，分数 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ で表される有理関数の $x \to \pm\infty$ のときの極限を求めるためには，分子 $P(x)$ 及び分母 $Q(x)$ の各々において最高次の x の冪を括り出す.

例 変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2-7x-4}$ について $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2-7x-4}$ について $x \to -\infty$ のときの極限を調べる.

分子と分母とにおいて x^2 を括り出す:

$$\frac{2x^2-5x+3}{3x^2-7x-4} = \frac{x^2\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)} = \frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}} \ .$$

例 変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^2-7x-4}$ について $x\to-\infty$ のときの極限を調べる.

分子と分母とにおいて x^2 を括り出す:

$$\frac{2x^2-5x+3}{3x^2-7x-4}=\frac{x^2\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)}=\frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}}\ .$$

よって

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x+3}{3x^2-7x-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}}=\frac{2-0+0}{3-0-0}=\frac{2}{3}\ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^3-7x^2-4x+2}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^3-7x^2-4x+2}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

分子において x^2 を括り出し，分母において x^3 を括り出す:

$$\frac{2x^2-5x+3}{3x^3-7x^2-4x+2} = \frac{x^2\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}\ .$$

例 変数 x の関数 $\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^3-7x^2-4x+2}$ について $x\to\infty$ のときの極限を調べる.

分子において x^2 を括り出し, 分母において x^3 を括り出す:

$$\frac{2x^2-5x+3}{3x^3-7x^2-4x+2}=\frac{x^2\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)}{x^3\left(3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{2-0+0}{3-0-0+0}=\frac{2}{3}$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+3}{3x^3-7x^2-4x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{3-\dfrac{7}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}\right)=0\cdot\frac{2}{3}=0\ .$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^2-7x+2}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^2-7x+2}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

分子において x^3 を括り出し，分母において x^2 を括り出す：

$$\frac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^2-7x+2} = \frac{x^3\left(2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)} = x\cdot\frac{2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^2-7x+2}$ について $x\to\infty$ のときの極限を調べる.

分子において x^3 を括り出し，分母において x^2 を括り出す：

$$\frac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^2-7x+2}=\frac{x^3\left(2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)}=x\cdot\frac{2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\ .$$

$$\lim_{x\to\infty}x=\infty\ ,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=\frac{2-0-0+0}{3-0+0}=\frac{2}{3}$$ なので，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2-4x+3}{3x^2-7x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)=\infty\ .$$

$\lim_{x\to\infty} x = \infty$ は発散しているので $\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\dfrac{2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\right)$ を

$\lim_{x\to\infty} x\cdot\lim_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}{3-\dfrac{7}{x}+\dfrac{2}{x^2}}$ に変形しないこと.

終

$\boxed{\text{問}4.3.3}$ 変数 x の関数 $\dfrac{3x^2+2x-5}{2x^3-5x^2+3}$ について $x \to -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{3x^2+2x-5}{2x^3-5x^2+3} = \frac{x^2\left(\qquad\qquad\right)}{x^3\left(\qquad\qquad\right)} = \quad \cdot \frac{\qquad}{\qquad} .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \quad = \quad ,\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\qquad}{\qquad} = \quad$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2x-5}{2x^3-5x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \left(\quad \cdot \frac{\qquad}{\qquad} \right) = \quad .$$

$\boxed{\text{問 }4.3.3}$ 変数 x の関数 $\dfrac{3x^2+2x-5}{2x^3-5x^2+3}$ について $x\to-\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{3x^2+2x-5}{2x^3-5x^2+3}=\frac{x^2\left(3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^3}\right)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^3}}\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\ ,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{3}{2}$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2x-5}{2x^3-5x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}}{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^3}}\right)=0\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 4.3.4}$ 変数 x の関数 $\dfrac{x^4-5x^2-7}{2x^2+3x-4}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{x^4-5x^2-7}{2x^2+3x-4} = \frac{x^4\left(\qquad\qquad \right)}{x^2\left(\qquad\qquad \right)} = \quad \cdot \frac{\qquad}{\qquad} .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \quad = \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\qquad}{\qquad} = \quad$ なので,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5x^2-7}{2x^2+3x-4} = \lim_{x\to\infty} \left(\quad \cdot \frac{\qquad}{\qquad} \right) = \quad .$$

$\boxed{\text{問}4.3.4}$ 変数 x の関数 $\dfrac{x^4-5x^2-7}{2x^2+3x-4}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{x^4-5x^2-7}{2x^2+3x-4} = \frac{x^4\left(1-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}\right)}{x^2\left(2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)} = x^2 \cdot \frac{1-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}}{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}} \ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}}{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{1}{2}$ なので,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5x^2-7}{2x^2+3x-4} = \lim_{x\to\infty} \left(x^2 \cdot \frac{1-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{7}{x^4}}{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^2}} \right) = \infty \ .$$

終

$\boxed{\text{問}4.3.5}$ 変数 x の関数 $\dfrac{5-3x^2}{2x^2-4x+3}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \frac{x^2\left(\qquad\qquad\right)}{x^2\left(\qquad\qquad\quad\right)} = \frac{\qquad\qquad}{} \ .$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\qquad\qquad}{} = \qquad .$$

$\boxed{\text{問 }4.3.5}$ 変数 x の関数 $\dfrac{5-3x^2}{2x^2-4x+3}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \frac{x^2\left(\dfrac{5}{x^2}-3\right)}{x^2\left(2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)} = \frac{\dfrac{5}{x^2}-3}{2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}} \ .$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{5}{x^2}-3}{2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x^2}} = -\frac{3}{2} \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$x \to \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする.

$\boxed{例}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$x \to \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする.

$$\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \frac{\sqrt{x\left(7+\dfrac{5}{x}\right)}}{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{7+\dfrac{5}{x}}}{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\cdot\frac{\sqrt{7+\dfrac{5}{x}}}{3+\dfrac{2}{x}} = x^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{7+\dfrac{5}{x}}}{3+\dfrac{2}{x}} .$$

例 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$x \to \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする.

$$\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \frac{\sqrt{x\left(7+\dfrac{5}{x}\right)}}{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{7+\dfrac{5}{x}}}{x\left(3+\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{7+\dfrac{5}{x}}}{3+\dfrac{2}{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{7+\dfrac{5}{x}}}{3+\dfrac{2}{x}} .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{2}} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{7+\dfrac{5}{x}}}{3+\dfrac{2}{x}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$ なので,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \lim_{x\to\infty} \left(x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{7+\dfrac{5}{x}}}{3+\dfrac{2}{x}} \right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = 0 .$$

終

$\boxed{\text{問}4.3.6}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{8x+7}}{5x+3}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べよ.

$x \to \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする.

$$\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3} = \frac{\sqrt{x\left(\qquad\right)}}{x\left(\qquad\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{\qquad}}{x\left(\qquad\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\cdot\frac{\sqrt{\qquad}}{\qquad} = \frac{\qquad\sqrt{\qquad}}{\qquad}.$$

$$\lim_{x\to\infty} \qquad = \quad, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\qquad}}{\qquad} = \qquad$$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+7} = \lim_{x\to\infty}\left(\qquad\frac{\sqrt{\qquad}}{\qquad}\right) = \quad\cdot\quad = \quad.$$

$\boxed{\text{問}4.3.6}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{8x+7}}{5x+3}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$x \to \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする.

$$\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3} = \frac{\sqrt{x\left(8+\dfrac{7}{x}\right)}}{x\left(5+\dfrac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{8+\dfrac{7}{x}}}{x\left(5+\dfrac{3}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{8+\dfrac{7}{x}}}{5+\dfrac{3}{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{8+\dfrac{7}{x}}}{5+\dfrac{3}{x}} \ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{-\frac{1}{2}} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{8+\dfrac{7}{x}}}{5+\dfrac{3}{x}} = \frac{\sqrt{8}}{5}$ なので,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{8x+7}}{5x+7} = \lim_{x\to\infty} \left(x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{8+\dfrac{7}{x}}}{5+\dfrac{3}{x}} \right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{8}}{5} = 0 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{5x^2-4x+7}}{2x+3}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{5x^2-4x+7}}{2x+3}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$x \to \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする. $\sqrt{x^2} = x$.

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{5x^2-4x+7}}{2x+3}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$x \to \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする. $\sqrt{x^2} = x$.

$$\frac{\sqrt{5x^2-4x+7}}{2x+3} = \frac{\sqrt{x^2\left(5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)} = \frac{x\sqrt{5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}} .$$

$\boxed{\text{例}}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{5x^2-4x+7}}{2x+3}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べる.

$x \to \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする. $\sqrt{x^2} = x$.

$$\frac{\sqrt{5x^2-4x+7}}{2x+3} = \frac{\sqrt{x^2\left(5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)} = \frac{x\sqrt{5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}}{x\left(2+\dfrac{3}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}} .$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5x^2-4x+7}}{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{5-\dfrac{4}{x}+\dfrac{7}{x^2}}}{2+\dfrac{3}{x}} = \frac{\sqrt{5}}{2} .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}4.3.6}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{9x^2-7x+8}}{4x+5}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べよ.

$x \to \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする. $\sqrt{x^2} = x$.

$$\frac{\sqrt{9x^2-7x+8}}{4x+5} = \frac{\sqrt{x^2\left(\qquad\qquad\right)}}{x\left(\qquad\right)} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{\qquad\qquad}}{x\left(\qquad\right)} = \frac{x\sqrt{\qquad\qquad}}{x\left(\qquad\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\qquad\qquad}}{\qquad} .$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2-7x+8}}{4x+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\qquad\qquad}}{\qquad} = \frac{\quad}{\quad} = \qquad .$$

$\boxed{問4.3.6}$ 変数 x の関数 $\dfrac{\sqrt{9x^2-7x+8}}{4x+5}$ について $x \to \infty$ のときの極限を調べよ.

$x \to \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする. $\sqrt{x^2} = x$.

$$\frac{\sqrt{9x^2-7x+8}}{4x+5} = \frac{\sqrt{x^2\left(9-\dfrac{7}{x}+\dfrac{8}{x^2}\right)}}{x\left(4+\dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{9-\dfrac{7}{x}+\dfrac{8}{x^2}}}{x\left(4+\dfrac{5}{x}\right)} = \frac{x\sqrt{9-\dfrac{7}{x}+\dfrac{8}{x^2}}}{x\left(4+\dfrac{5}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{9-\dfrac{7}{x}+\dfrac{8}{x^2}}}{4+\dfrac{5}{x}} .$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2-7x+8}}{4x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9-\dfrac{7}{x}+\dfrac{8}{x^2}}}{4+\dfrac{5}{x}} = \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4} .$$

$\boxed{終}$