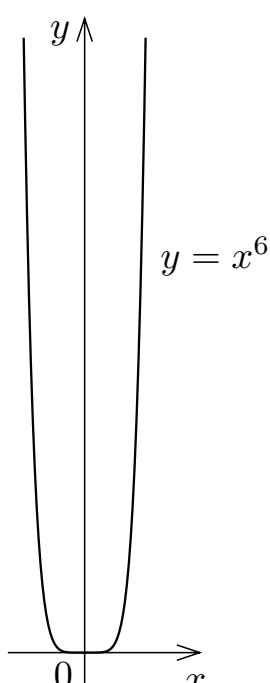
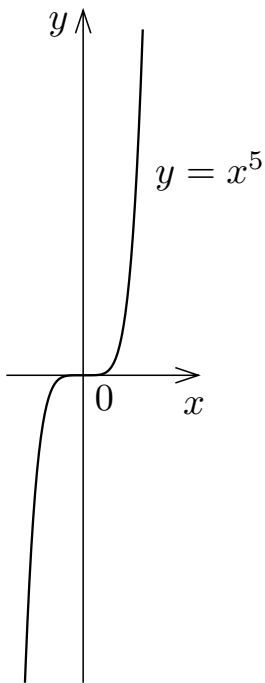
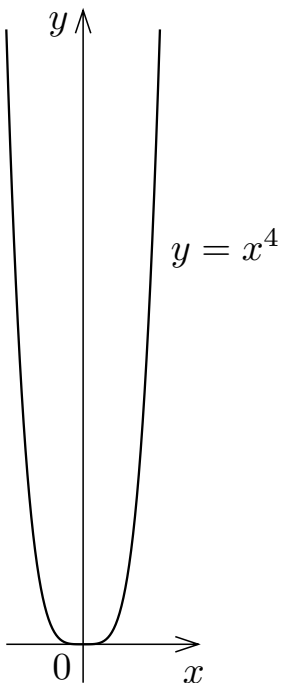
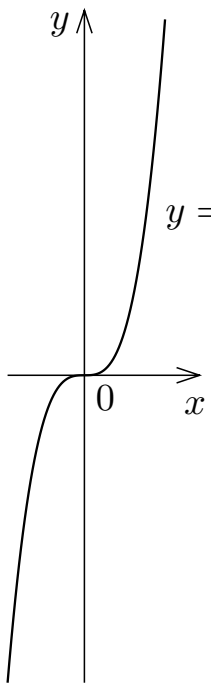
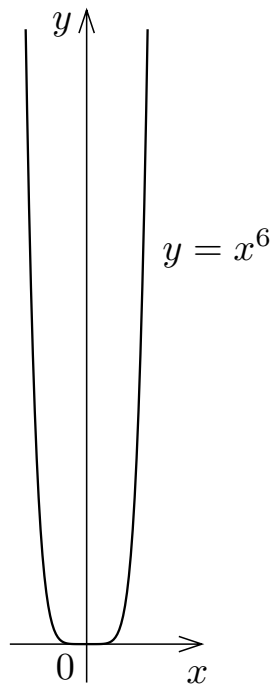
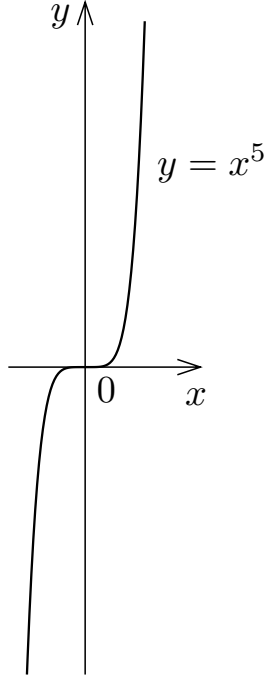
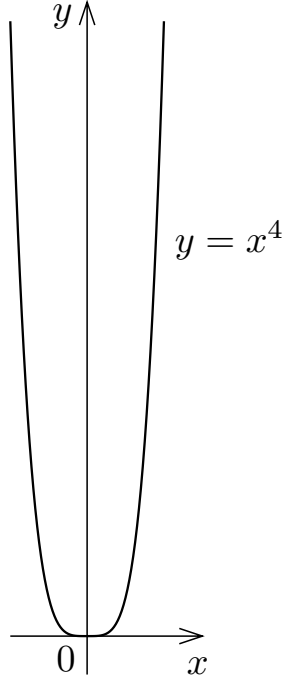
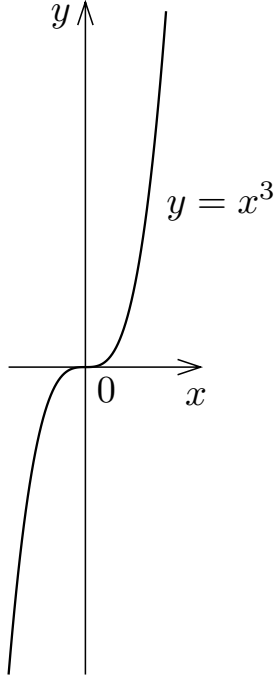


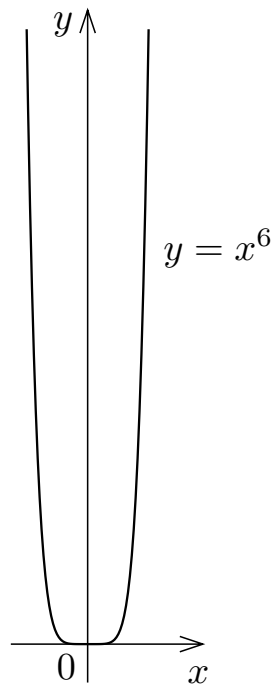
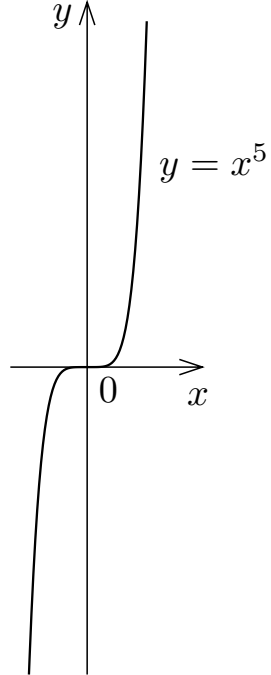
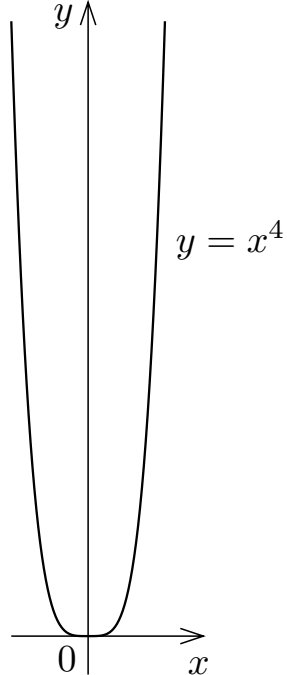
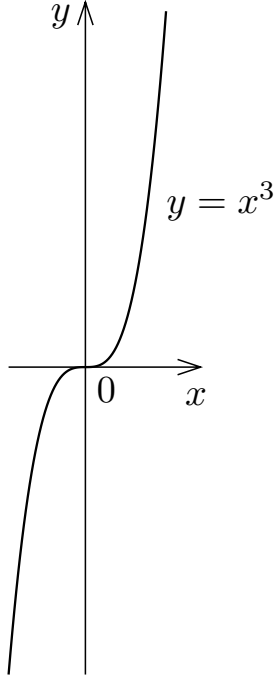
4.3 代数的な関数の極限

定数 n は正の自然数とする. xy 座標平面において冪関数 $y = x^n$ のグラフは次のようになる.





これらのグラフより $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty$.



これらのグラフより、 n が奇数のとき $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$, n が偶数のとき

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \infty .$$

定理 定数 n は正の自然数とする. n を指数とする冪関数 x^n について,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \infty & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} .$$

定理 定数 n は正の自然数とする. n を指数とする冪関数 x^n について,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} -\infty & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \infty & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} .$$

この定理より更に, 定数 k 及び正の自然数を表す定数 n について,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0 .$$

変数 x の関数 $f(x)$ の値が x の整式で表されるとき $f(x)$ を有理整関数という。つまり、定数関数、1次関数、2次関数、3次関数、などを併せて有理整関数という。

変数 x の関数 $f(x)$ の値が x の整式で表されるとき $f(x)$ を有理整関数という。つまり、定数関数、1 次関数、2 次関数、3 次関数、などを併せて有理整関数という。

$x \rightarrow \pm\infty$ のときの有理整関数 $f(x)$ の極限を求めるためには、 $f(x)$ を表す整式において最高次の x の冪を括り出す。

例 変数 x の関数 $3x^2 - 7x + 4$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $3x^2 - 7x + 4$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

x の 2 次式 $3x^2 - 7x + 4$ において最高次の x の幂 x^2 を括り出す:

$$3x^2 - 7x + 4 = x^2 \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) = x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right).$$

例 変数 x の関数 $3x^2 - 7x + 4$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

x の 2 次式 $3x^2 - 7x + 4$ において最高次の x の冪 x^2 を括り出す:

$$3x^2 - 7x + 4 = x^2 \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) = x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 3 - 0 + 0 = 3.$$

例 変数 x の関数 $3x^2 - 7x + 4$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

x の 2 次式 $3x^2 - 7x + 4$ において最高次の x の幂 x^2 を括り出す:

$$3x^2 - 7x + 4 = x^2 \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) = x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 3 - 0 + 0 = 3.$$

更に $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 7x + 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right\} = \infty.$$

例 変数 x の関数 $3x^2 - 7x + 4$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

x の 2 次式 $3x^2 - 7x + 4$ において最高次の x の幂 x^2 を括り出す:

$$3x^2 - 7x + 4 = x^2 \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{7x}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) = x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) = 3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 3 - 0 + 0 = 3.$$

更に $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2 - 7x + 4) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right\} = \infty.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$ は発散しているので $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right) \right\}$ を

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2} \right)$ に変形しないこと.

終

例 変数 x の関数 $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

x の 3 次式 $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$ において最高次の x の冪 x^3 を括り出す:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5} = \frac{x^3}{5} \left(\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right) = \frac{x^3}{5} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right).$$

例 変数 x の関数 $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

x の 3 次式 $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$ において最高次の x の冪 x^3 を括り出す:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5} = \frac{x^3}{5} \left(\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right) = \frac{x^3}{5} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = 2 - 0 - 0 + 0 = 2 ;$$

例 変数 x の関数 $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

x の 3 次式 $\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5}$ において最高次の x の冪 x^3 を括り出す:

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5} = \frac{x^3}{5} \left(\frac{2x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} - \frac{2x}{x^3} + \frac{4}{x^3} \right) = \frac{x^3}{5} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right).$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) = 2 - 0 - 0 + 0 = 2;$$

更に $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{5} = -\infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{x^3}{5} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) \right\} = -\infty.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{5} = \infty$ は発散しているので $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{x^3}{5} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right) \right\}$ を

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} \right)$ に変形しないこと.

終

問4.3.1 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 4x + 5}{3}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{2x^2 - 4x + 5}{3} = \frac{x^2}{3} \left(\quad \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3} = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\quad \right) = \quad = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 5}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x^2}{3} \left(\quad \right) \right\} = \quad .$$

問4.3.1 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 4x + 5}{3}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{2x^2 - 4x + 5}{3} = \frac{x^2}{3} \left(2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right) = 2 - 0 + 0 = 2 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 5}{3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x^2}{3} \left(2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \right) \right\} = \infty.$$

終

問4.3.2 変数 x の関数 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5 = x^3 \left(\quad \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \quad, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\quad \right) = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ x^3 \left(\quad \right) \right\} = \quad .$$

問4.3.2 変数 x の関数 $\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5 = x^3 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3} \right) .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3} \right) = \frac{3}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + 5 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ x^3 \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3} \right) \right\} = -\infty .$$

終

次数が 1 以上である有理整関数 $f(x)$ について, $x \rightarrow \infty$ のとき及び $x \rightarrow -\infty$ のとき, $f(x)$ は ∞ か $-\infty$ かのどちらかに発散する.

変数 x の関数 $f(x)$ の値が分母分子共に x の整式である分数で表されるとき $f(x)$ を有理関数という.

変数 x の関数 $f(x)$ の値が分母分子共に x の整式である分数で表されるとき $f(x)$ を有理関数という.

変数 x の整式 $P(x)$ と $Q(x)$ に対して, 分数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ で表される有理関数の $x \rightarrow \pm\infty$ のときの極限を求めるためには, 分子 $P(x)$ 及び分母 $Q(x)$ の各々において最高次の x の冪を括り出す.

例 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4}$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4}$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

分子と分母とにおいて x^2 を括り出す:

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4} = \frac{x^2 \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}} .$$

例 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4}$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べる.

分子と分母とにおいて x^2 を括り出す:

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4} = \frac{x^2 \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} \right)} = \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}}.$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^2 - 7x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 - 0 - 0} = \frac{2}{3}.$$

終

例 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

分子において x^2 を括り出し, 分母において x^3 を括り出す:

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2} = \frac{x^2 \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^3 \left(3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} .$$

例 変数 x の関数 $\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

分子において x^2 を括り出し, 分母において x^3 を括り出す:

$$\frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2} = \frac{x^2 \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} \right)}{x^3 \left(3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{3 - 0 - 0 + 0} = \frac{2}{3} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^3 - 7x^2 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 - \frac{7}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \right) = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0 . \quad \boxed{\text{終}}$$

例 変数 x の関数 $\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

例 変数 x の関数 $\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

分子において x^3 を括り出し, 分母において x^2 を括り出す:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2} = \frac{x^3 \left(2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = x \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} .$$

例 変数 x の関数 $\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

分子において x^3 を括り出し, 分母において x^2 を括り出す:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2} = \frac{x^3 \left(2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right)}{x^2 \left(3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} = x \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{2 - 0 - 0 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{2}{3} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = \infty.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$ は発散しているので $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}} \right)$ を

$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x} + \frac{2}{x^2}}$ に変形しないこと.

終

問4.3.3 変数 x の関数 $\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3}$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3} = \frac{x^2 \left(\quad \right)}{x^3 \left(\quad \right)} = \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \quad = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \underline{\hspace{2cm}} = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\quad \cdot \underline{\hspace{2cm}} \quad \right) = \quad \cdot$$

問4.3.3 変数 x の関数 $\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3}$ について $x \rightarrow -\infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3} = \frac{x^2 \left(3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} \right)}{x^3 \left(2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3} \right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}} = \frac{3}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x - 5}{2x^3 - 5x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{3 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^3}} \right) = 0 .$$

終

問4.3.4 変数 x の関数 $\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4} = \frac{x^4 \left(\quad \right)}{x^2 \left(\quad \right)} = \cdot \underline{\hspace{2cm}} \cdot$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \quad = \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \underline{\hspace{2cm}} = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\quad \cdot \underline{\hspace{2cm}} \quad \right) = \quad \cdot$$

問4.3.4 変数 x の関数 $\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4} = \frac{x^4 \left(1 - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)} = x^2 \cdot \frac{1 - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} = \frac{1}{2} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x^2 - 7}{2x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 \cdot \frac{1 - \frac{5}{x^2} - \frac{7}{x^4}}{2 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}} \right) = \infty .$$

終

問4.3.5 変数 x の関数 $\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \frac{x^2 \left(\quad \right)}{x^2 \left(\quad \right)} = \underline{\hspace{2cm}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \underline{\hspace{2cm}} = \quad .$$

問4.3.5 変数 x の関数 $\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$$\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \frac{x^2\left(\frac{5}{x^2}-3\right)}{x^2\left(2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{\frac{5}{x^2}-3}{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x^2}-3}{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} = -\frac{3}{2}.$$

終

例 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.
 $x \rightarrow \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする.

例 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$x \rightarrow \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする.

$$\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \frac{\sqrt{x\left(7+\frac{5}{x}\right)}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}}.$$

例 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる。

$x \rightarrow \infty$ のときを考えるので、 $x > 0$ とする。

$$\frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \frac{\sqrt{x\left(7+\frac{5}{x}\right)}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{1}{2}} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{7x+5}}{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{7+\frac{5}{x}}}{3+\frac{2}{x}} \right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = 0 .$$

終

問4.3.6 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$x \rightarrow \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする.

$$\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3} = \frac{\sqrt{x(\quad)}}{x(\quad)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{\quad}}{x(\quad)} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x} \cdot \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} = \frac{\sqrt{\quad}}{\quad}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} = \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8x+7}}{5x+7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{\quad}}{\quad} \right) = \cdot = \cdot.$$

問4.3.6 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる。

$x \rightarrow \infty$ のときを考えるので、 $x > 0$ とする。

$$\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3} = \frac{\sqrt{x\left(8+\frac{7}{x}\right)}}{x\left(5+\frac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{x\left(5+\frac{3}{x}\right)} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{1}{2}} = 0 , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{8}}{5} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8x+7}}{5x+7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}} \right) = 0 \cdot \frac{\sqrt{8}}{5} = 0 .$$

終

例 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

例 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$x \rightarrow \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする. $\sqrt{x^2} = x$.

例 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$x \rightarrow \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする. $\sqrt{x^2} = x$.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3} &= \frac{\sqrt{x^2 \left(5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{x \sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}}.\end{aligned}$$

例 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べる.

$x \rightarrow \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする. $\sqrt{x^2} = x$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3} &= \frac{\sqrt{x^2 \left(5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}\right)}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{x \sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 4x + 7}}{2x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{4}{x} + \frac{7}{x^2}}}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

終

問4.3.6 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$x \rightarrow \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする. $\sqrt{x^2} = x$.

$$\frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5} = \frac{\sqrt{x^2 \left(\quad \right)}}{x \left(\quad \right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{\quad}}{x \left(\quad \right)} = \frac{x \sqrt{\quad}}{x \left(\quad \right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} .$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\quad}}{\quad} = \quad = \quad .$$

問4.3.6 変数 x の関数 $\frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5}$ について $x \rightarrow \infty$ のときの極限を調べよ.

$x \rightarrow \infty$ のときを考えるので, $x > 0$ とする. $\sqrt{x^2} = x$.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5} &= \frac{\sqrt{x^2 \left(9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}\right)}}{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{x \sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{x \left(4 + \frac{5}{x}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{4 + \frac{5}{x}}. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^2 - 7x + 8}}{4x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}}}{4 + \frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4}.$$

終