

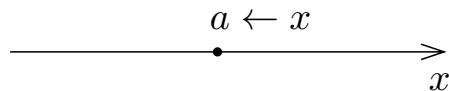
4.4 関数の右極限と左極限

変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について、 $x > a$ の範囲だけで考えるときや、 $x < a$ の範囲だけで考えるときがある.

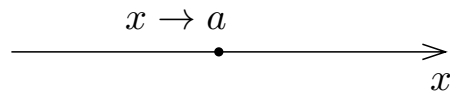
変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について、 $x > a$ の範囲だけで考えるときや、 $x < a$ の範囲だけで考えるときがある。 $x > a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \rightarrow a+0$ と書き表し、このときの極限を右極限という。

変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について、 $x > a$ の範囲だけで考えるときや、 $x < a$ の範囲だけで考えるときがある。 $x > a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \rightarrow a+0$ と書き表し、このときの極限を右極限という。 $x < a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \rightarrow a-0$ と書き表し、このときの極限を左極限という。

変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について、 $x > a$ の範囲だけで考えるときや、 $x < a$ の範囲だけで考えるときがある。 $x > a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \rightarrow a+0$ と書き表し、このときの極限を右極限という。 $x < a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \rightarrow a-0$ と書き表し、このときの極限を左極限という。数直線上において、右極限を表す $x \rightarrow a+0$ は x の値を a の右側から a に近づけることであり、左極限を表す $x \rightarrow a-0$ は x の値を a の左側から a に近づけることである。

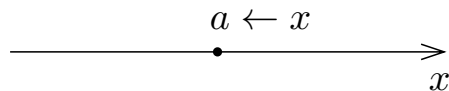


右極限 $x \rightarrow a+0$

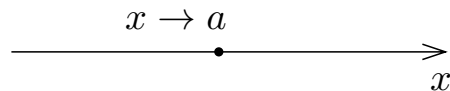


左極限 $x \rightarrow a-0$

変数 x の値を定数 a に近づけるときの関数の極限について、 $x > a$ の範囲だけで考えるときや、 $x < a$ の範囲だけで考えるときがある。 $x > a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \rightarrow a+0$ と書き表し、このときの極限を右極限という。 $x < a$ の範囲だけで x の値を a に近づけることを $x \rightarrow a-0$ と書き表し、このときの極限を左極限という。数直線上において、右極限を表す $x \rightarrow a+0$ は x の値を a の右側から a に近づけることであり、左極限を表す $x \rightarrow a-0$ は x の値を a の左側から a に近づけることである。



右極限 $x \rightarrow a+0$



左極限 $x \rightarrow a-0$

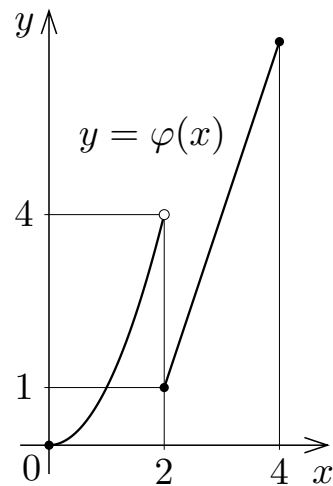
特に $a = 0$ のとき、 $x \rightarrow 0+0$ を $x \rightarrow +0$ と略記し、 $x \rightarrow 0-0$ を $x \rightarrow -0$ と略記する。

例 区間 $[0, 4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ 3x - 5 & (2 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

例 区間 $[0, 4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

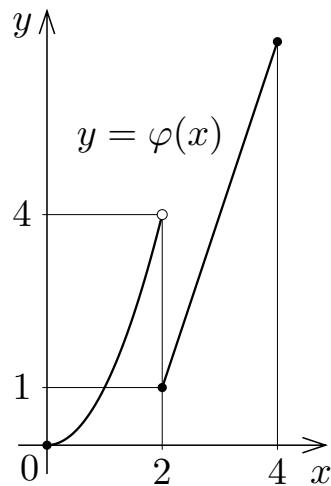
$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ 3x - 5 & (2 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases} .$$



例 区間 $[0, 4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ 3x - 5 & (2 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

変数 x について、 $2 \leq x \leq 4$ のとき
 $\varphi(x) = 3x - 5$ なので、 $x > 2$ の範囲
で x の値を 2 に限りなく近づけてい
くと、 $\varphi(x)$ の値は $3 \cdot 2 - 5 = 1$ に限
りなく近づいていく。

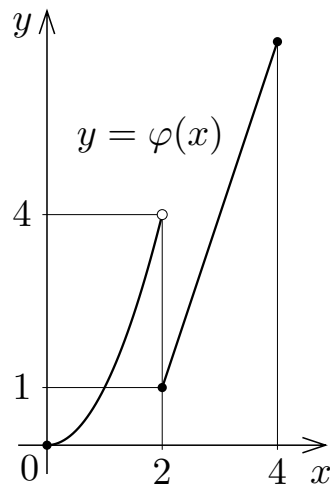


例 区間 $[0, 4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ 3x - 5 & (2 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

変数 x について、 $2 \leq x \leq 4$ のとき $\varphi(x) = 3x - 5$ なので、 $x > 2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと、 $\varphi(x)$ の値は $3 \cdot 2 - 5 = 1$ に限りなく近づいていく。このようなとき、1 を $\varphi(x)$ の右極限值といい、この右極限値を $\lim_{x \rightarrow 2+0} \varphi(x)$ と書き表す：

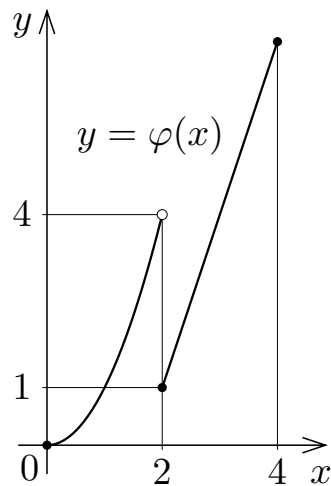
$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \varphi(x) = 1 .$$



例 区間 $[0, 4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ 3x - 5 & (2 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

変数 x について、 $0 \leq x < 2$ のとき $\varphi(x) = x^2$ なので、 $x < 2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと、 $\varphi(x)$ の値は $2^2 = 4$ に限りなく近づいていく。

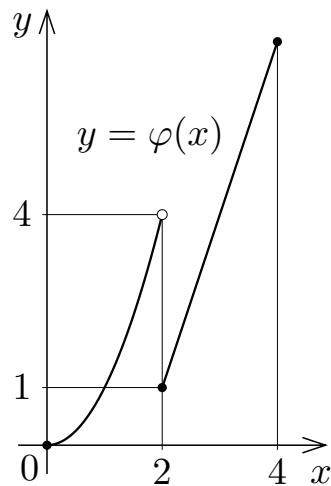


例 区間 $[0, 4]$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ 3x - 5 & (2 \leq x \leq 4 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

変数 x について、 $0 \leq x < 2$ のとき $\varphi(x) = x^2$ なので、 $x < 2$ の範囲で x の値を 2 に限りなく近づけていくと、 $\varphi(x)$ の値は $2^2 = 4$ に限りなく近づいていく。このようなとき、4 を $\varphi(x)$ の左極限值といい、この左極限値を $\lim_{x \rightarrow 2-0} \varphi(x)$ と書き表す：

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \varphi(x) = 4 .$$



一般的に述べる.

関数 f 及び実数 a について、 f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x > a$ である範囲で a に限りなく近づけることができ、

x の値を $x > a$ である範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow a+0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を f の右極限(値)という。

関数 f 及び実数 a について、 f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x > a$ である範囲で a に限りなく近づけることができ、

x の値を $x > a$ である範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow a+0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を f の右極限(値)という。 $x \rightarrow a+0$ のとき関数 $f(x)$ が収束するならば、そのときの右極限値を

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

と書き表す。

関数 f 及び実数 a について、 f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x > a$ である範囲で a に限りなく近づけることができ、

x の値を $x > a$ である範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow a+0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を f の右極限(値)という。 $x \rightarrow a+0$ のとき関数 $f(x)$ が収束するならば、そのときの右極限値を

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

と書き表す。特に $a = 0$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$ を $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ と略記する。

関数 f 及び実数 a について、 f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x < a$ である範囲で a に限りなく近づけることができ、

x の値を $x < a$ である範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow a-0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を f の左極限(値)という。

関数 f 及び実数 a について、 f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x < a$ である範囲で a に限りなく近づけることができ、

x の値を $x < a$ である範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow a-0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を f の左極限(値)という。 $x \rightarrow a-0$ のとき関数 $f(x)$ が収束するならば、そのときの左極限值を

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

と書き表す。

関数 f 及び実数 a について、 f の定義域の実数を表す変数 x の値を $x < a$ である範囲で a に限りなく近づけることができ、

x の値を $x < a$ である範囲で a に限りなく近づけると

f の値 $f(x)$ が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき、 $x \rightarrow a-0$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい、 c を f の左極限(値)という。 $x \rightarrow a-0$ のとき関数 $f(x)$ が収束するならば、そのときの左極限值を

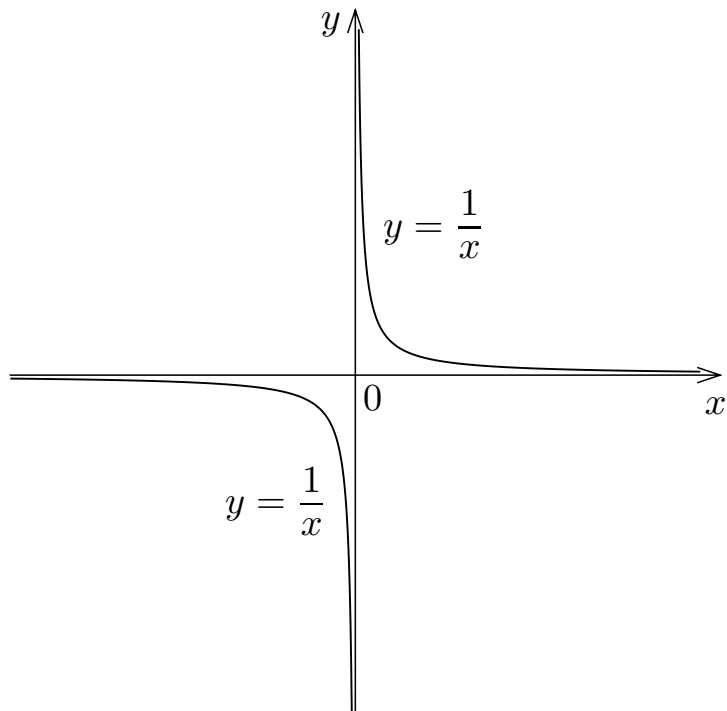
$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

と書き表す。特に $a = 0$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x)$ を $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$ と略記する。

関数の右極限および左極限においても ∞ あるいは $-\infty$ に発散することがある.

例

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

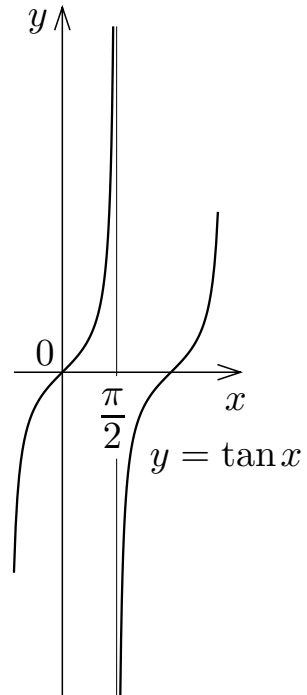


終

例

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0} \tan x = -\infty,$$

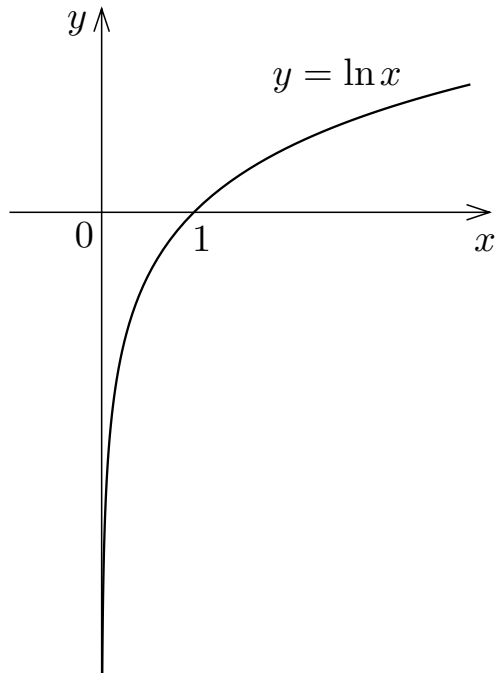
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \tan x = \infty.$$



終

例

$$\lim_{x \rightarrow +0} \ln x = -\infty .$$



終

次の定理が成り立つ（証明は略す）.

定理 関数 f 及び実数 a, c について,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \iff \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = c .$$

例 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 g を次のように定める：

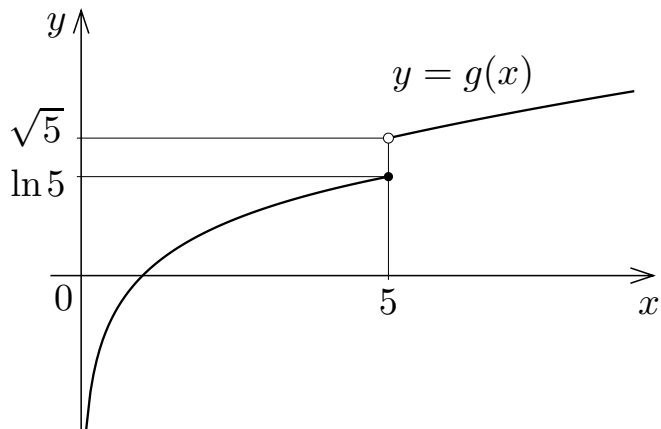
$$g(x) = \begin{cases} \ln x & (0 < x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x} & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

$g(x)$ の右極限 $\lim_{x \rightarrow 5+0} g(x)$ と左極限 $\lim_{x \rightarrow 5-0} g(x)$ とを調べる.

例 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & (0 < x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x} & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

$g(x)$ の右極限 $\lim_{x \rightarrow 5+0} g(x)$ と左極限 $\lim_{x \rightarrow 5-0} g(x)$ とを調べる.



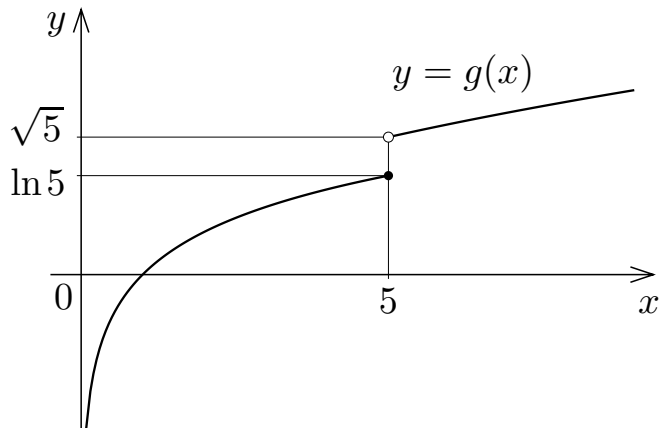
例 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & (0 < x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x} & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

$g(x)$ の右極限 $\lim_{x \rightarrow 5+0} g(x)$ と左極限 $\lim_{x \rightarrow 5-0} g(x)$ とを調べる.

変数 x について、 $x \rightarrow 5+0$ のとき、 $x > 5$ なので $g(x) = \sqrt{x}$,
よって

$$\lim_{x \rightarrow 5+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5+0} \sqrt{x} = \sqrt{5} .$$



例 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & (0 < x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x} & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

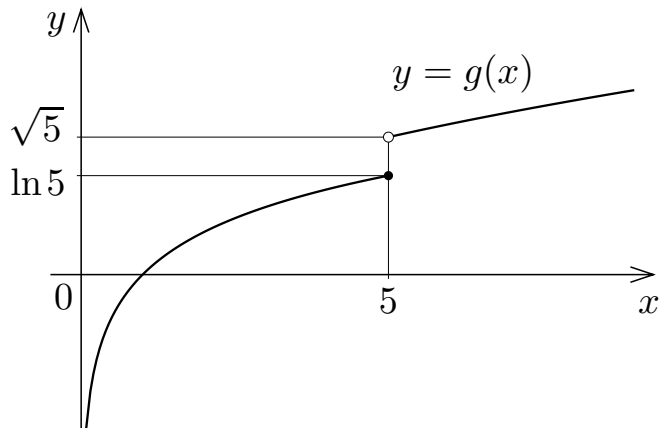
$g(x)$ の右極限 $\lim_{x \rightarrow 5+0} g(x)$ と左極限 $\lim_{x \rightarrow 5-0} g(x)$ とを調べる.

変数 x について、 $x \rightarrow 5+0$ のとき、 $x > 5$ なので $g(x) = \sqrt{x}$,
よって

$$\lim_{x \rightarrow 5+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5+0} \sqrt{x} = \sqrt{5} .$$

変数 x について、 $x \rightarrow 5-0$ のとき、 $x < 5$ なので $g(x) = \ln x$,
よって

$$\lim_{x \rightarrow 5-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 5-0} \ln x = \ln 5 .$$



問4.4.1 区間 $(0, 10]$ を定義域とする関数 f を次のように定める:

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 x & (0 < x < 8 \text{ のとき}) \\ x^{\frac{4}{3}} & (8 \leq x \leq 10 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

$f(x)$ の右極限 $\lim_{x \rightarrow 8+0} f(x)$ と左極限 $\lim_{x \rightarrow 8-0} f(x)$ とを調べよ.

$8 \leq x \leq 10$ のとき $f(x) =$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow 8+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8+0} \quad .$$

$0 < x < 8$ のとき $f(x) =$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow 8-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8-0} \quad .$$

問4.4.1 区間 $(0, 10]$ を定義域とする関数 f を次のように定める:

$$f(x) = \begin{cases} \log_2 x & (0 < x < 8 \text{ のとき}) \\ x^{\frac{4}{3}} & (8 \leq x \leq 10 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

$f(x)$ の右極限 $\lim_{x \rightarrow 8+0} f(x)$ と左極限 $\lim_{x \rightarrow 8-0} f(x)$ とを調べよ.

$8 \leq x \leq 10$ のとき $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow 8+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8+0} x^{\frac{4}{3}} = 8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16 .$$

$0 < x < 8$ のとき $f(x) = \log_2 x$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow 8-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8-0} \log_2 x = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 .$$

終

次の定理があった.

定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする. 関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ があるとする. $y = f(x)$ とおく. $x \rightarrow a$ のとき $y \rightarrow b$, $y \neq b$ で, $y \rightarrow b$ のとき $g(y)$ が収束するならば,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) .$$

この定理は $x \rightarrow a + 0$ のときや $x \rightarrow a - 0$ のときなども成り立つ.

例 変数 x について $x \rightarrow +0$ のときの $\frac{1}{\ln x}$ の極限を調べる.

例 変数 x について $x \rightarrow +0$ のときの $\frac{1}{\ln x}$ の極限を調べる.

$y = \ln x$ とおく. $x \rightarrow +0$ のとき $y = \ln x \rightarrow -\infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{1}{y} = 0 .$$

終

例 変数 x について $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ のときの $\left(\frac{5}{6}\right)^{\tan x}$ の極限を調べる.

例 変数 x について $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ のときの $\left(\frac{5}{6}\right)^{\tan x}$ の極限を調べる.

$y = \tan x$ とおく. $x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ のとき $y = \tan x \rightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \left(\frac{5}{6}\right)^{\tan x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^y = 0 .$$

終

問4.4.2 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} (\log_2 x)^3$ について、収束するならば極限值を求め、発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ。
変数 y を $y = \log_2 x$ とおく. $x \rightarrow +0$ のとき $y = \log_2 x \rightarrow$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow +0} (\log_2 x)^3 = \lim_{y \rightarrow} = \quad .$$

問4.4.2 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} (\log_2 x)^3$ について、収束するならば極限值を求め、発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ。
変数 y を $y = \log_2 x$ とおく. $x \rightarrow +0$ のとき $y = \log_2 x \rightarrow -\infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow +0} (\log_2 x)^3 = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^3 = -\infty .$$

終

問4.4.3 極限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{5}{3 + \tan x}$ について、収束するならば極限值を求め、発散

するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ.

変数 y を $y = \tan x$ とおく. $x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$ のとき $y = \tan x \rightarrow$ なの
で, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} (3 + \tan x) = \lim_{y \rightarrow} (\quad) =$, よって

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{5}{3 + \tan x} = \lim_{y \rightarrow} \frac{5}{3 + y} = \quad .$$

問4.4.3 極限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{5}{3 + \tan x}$ について、収束するならば極限值を求め、発散

するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ.

変数 y を $y = \tan x$ とおく. $x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$ のとき $y = \tan x \rightarrow -\infty$ なので, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} (3 + \tan x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} (3 + y) = -\infty$, よって

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{5}{3 + \tan x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{5}{3 + y} = 0 .$$

終

問4.4.4 極限 $\lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ について、収束するならば極限值を求め、発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ。
変数 y を $y = \frac{1}{x}$ とおく。 $x \rightarrow -0$ のとき $y = \frac{1}{x} \rightarrow$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow} \quad .$$

問4.4.4 極限 $\lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ について、収束するならば極限值を求め、発散するならば ∞ に発散するのか $-\infty$ に発散するのかどちらでもないのか調べよ。

変数 y を $y = \frac{1}{x}$ とおく. $x \rightarrow -0$ のとき $y = \frac{1}{x} \rightarrow -\infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -0} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^y = 0 .$$

終