

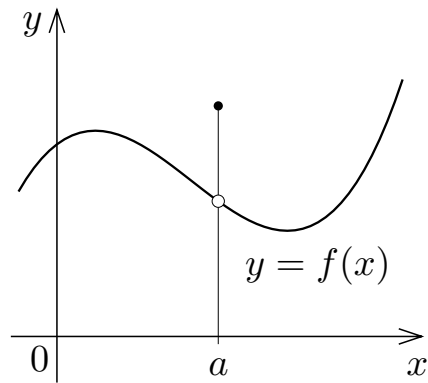
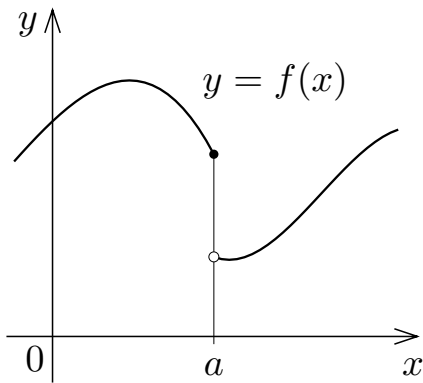
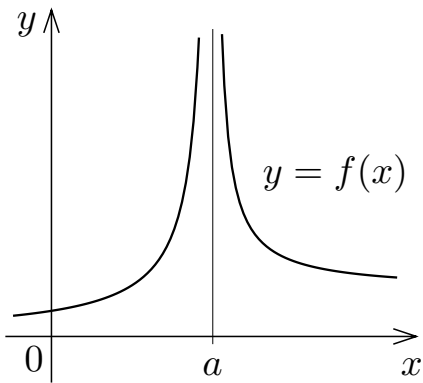
4.5 関数の連続性

関数 f の定義域の実数 a について, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ であるとき, a において f は連続であるという.

関数 f の定義域の実数 a について、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ であるとき、 a において f は連続であるという。詳しくいうと、 a において f が連続であるとは次の 3 条件が成り立つことである：

- (1) a が f の定義域に属して（つまり a に対する f の値 $f(a)$ がある）、
- (2) $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ が収束して（つまり極限值 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ がある）、
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

実数 a において関数 f が連続でない状況は、関数 f のグラフで表現すると、例えば以下のような状況がある。



関数 f が連続であるというのは, f の定義域に属すどの実数においても f が連続であるということである.

関数 f が連続であるというのは、 f の定義域に属すどの実数においても f が連続であるということである。

例 冪関数 x^{-1} つまり $\frac{1}{x}$ は 0 において連続ではないが 0 以外の実数において連続である。 0 は関数 $\frac{1}{x}$ の定義域に属さないので、関数 $\frac{1}{x}$ は、 0 において連続でなくても、関数として連続である。

終

関数 f が連続であるというのは、 f の定義域に属すどの実数においても f が連続であるということである。

例 冪関数 x^{-1} つまり $\frac{1}{x}$ は 0 において連続ではないが 0 以外の実数において連続である。 0 は関数 $\frac{1}{x}$ の定義域に属さないので、関数 $\frac{1}{x}$ は、 0 において連続でなくても、関数として連続である。 終

冪関数，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数は総て連続である。

例 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} & (x \neq 7 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = 7 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる.

例 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} & (x \neq 7 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = 7 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる.

関数 f が 7 において連続であるとは、 $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = f(7)$ であることである。この等式が成り立つかどうか調べる。

例 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} & (x \neq 7 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = 7 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる。

変数 y を $y = x - 7$ とおく。 $2x - 14 = 2y$. $x \neq 7$ のとき,

$$f(x) = \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2} \frac{\sin y}{y} .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} & (x \neq 7 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = 7 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる。

変数 y を $y = x - 7$ とおく。 $2x - 14 = 2y$. $x \neq 7$ のとき、

$$f(x) = \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2} \frac{\sin y}{y} .$$

$x \rightarrow 7$ のとき $y = x - 7 \rightarrow 0$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin y}{y} \right) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} & (x \neq 7 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = 7 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる。

変数 y を $y = x - 7$ とおく。 $2x - 14 = 2y$. $x \neq 7$ のとき、

$$f(x) = \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2} \frac{\sin y}{y} .$$

$x \rightarrow 7$ のとき $y = x - 7 \rightarrow 0$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin y}{y} \right) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

また、 $x = 7$ のとき $f(x) = \frac{1}{2}$ なので、 $f(7) = \frac{1}{2}$.

例 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} & (x \neq 7 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = 7 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 f は 7 において連続であるかどうか調べる。

変数 y を $y = x - 7$ とおく。 $2x - 14 = 2y$. $x \neq 7$ のとき、

$$f(x) = \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \frac{\sin y}{2y} = \frac{1}{2} \frac{\sin y}{y} .$$

$x \rightarrow 7$ のとき $y = x - 7 \rightarrow 0$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sin(x-7)}{2x-14} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} \frac{\sin y}{y} \right) = \frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} .$$

また、 $x = 7$ のとき $f(x) = \frac{1}{2}$ なので、 $f(7) = \frac{1}{2}$. $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = f(7)$ なの

で、関数 f は 7 において連続である。

終

問4.5.1 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-3}\sin(2x-6) & (x \neq 3 \text{ のとき}) \\ 5 & (x = 3 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 g は 3 において連続であるかどうか調べよ。

変数 y を $y =$ とおく。 $x - 3 =$. $x \rightarrow 3$ のとき $y \rightarrow$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{5}{x-3} \sin(2x-6) \right\} = \lim_{y \rightarrow} \left(\frac{5}{-} \sin y \right) = \lim_{y \rightarrow} \frac{\sin y}{y} =$$

$g(3) =$ なので、 $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ $g(3)$. 故に関数 g は 3 において連続で

問4.5.1 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-3}\sin(2x-6) & (x \neq 3 \text{ のとき}) \\ 5 & (x = 3 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 g は 3 において連続であるかどうか調べよ.

変数 y を $y = 2x - 6$ とおく. $x - 3 = \frac{y}{2}$. $x \rightarrow 3$ のとき $y \rightarrow 0$ なので,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{5}{x-3} \sin(2x-6) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\frac{y}{2}} \sin y \right) = 10 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 10 \cdot 1 \\ &= 10 . \end{aligned}$$

$g(3) = 5$ なので, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) \neq g(3)$. 故に関数 g は 3 において連続でない.

終

例 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2e & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる.

例 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2e & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる.

関数 φ が 0 において連続であるとは、 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0)$ であることである。この等式が成り立つかどうか調べる。

例 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2e & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる.

$x \neq 0$ のとき,

$$\varphi(x) = (1+x)^{\frac{2}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x} \cdot 2} = \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 .$$

例 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2e & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる.

$x \neq 0$ のとき,

$$\varphi(x) = (1+x)^{\frac{2}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x} \cdot 2} = \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 .$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 = \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 = e^2 .$$

例 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2e & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる。

$x \neq 0$ のとき、

$$\varphi(x) = (1+x)^{\frac{2}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x} \cdot 2} = \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 .$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 = \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 = e^2 .$$

また、 $x = 0$ のとき $\varphi(x) = 2e$ なので、 $\varphi(0) = 2e$.

例 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{2}{x}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 2e & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 φ は 0 において連続であるかどうか調べる。

$x \neq 0$ のとき、

$$\varphi(x) = (1+x)^{\frac{2}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x} \cdot 2} = \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 .$$

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ なので、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 = \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^2 = e^2 .$$

また、 $x = 0$ のとき $\varphi(x) = 2e$ なので、 $\varphi(0) = 2e$. 従って $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) \neq \varphi(0)$.

故に関数 φ は 0 において連続でない。

終

問4.5.2 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{3}{x}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ e^3 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 ψ は 0 において連続であるかどうか調べよ.

$x \neq 0$ のとき,

$$\psi(x) = (1+x)^{\frac{3}{x}} =$$

従って

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) =$$

$\varphi(0) =$ **なので,** $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0)$. 故に関数 φ は 0 において連続で

問4.5.2 区間 $(-1, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{3}{x}} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ e^3 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

この関数 ψ は 0 において連続であるかどうか調べよ.

$x \neq 0$ のとき,

$$\psi(x) = (1+x)^{\frac{3}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x} \cdot 3} = \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^3 .$$

従って

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^3 = \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^3 = e^3 .$$

$\varphi(0) = e^3$ なので, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0)$. 故に関数 φ は 0 において連続である.

終

連続な2つの関数の和・差・積などはやはり連続である.

定理 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a において連続であるとする. このとき, 関数 $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$ も実数 a において連続である. 更に, $g(a) \neq 0$ ならば, 関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ も実数 a において連続である.

連続な2つの関数の和・差・積などはやはり連続である。

定理 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a において連続であるとする。このとき、関数 $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$ も実数 a において連続である。更に、 $g(a) \neq 0$ ならば、関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ も実数 a において連続である。

連続関数と連続関数との合成関数はやはり連続である。

定理 関数 $f(x)$ の値域が関数 $g(x)$ の定義域に含まれるとする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが連続であるならば、 $f(x)$ と $g(x)$ との合成関数 $g(f(x))$ も連続である。

区間 I が関数 f の定義域に含まれるとき, I において f が連続であるとは, 区間 I の各実数において f が連続であることである.