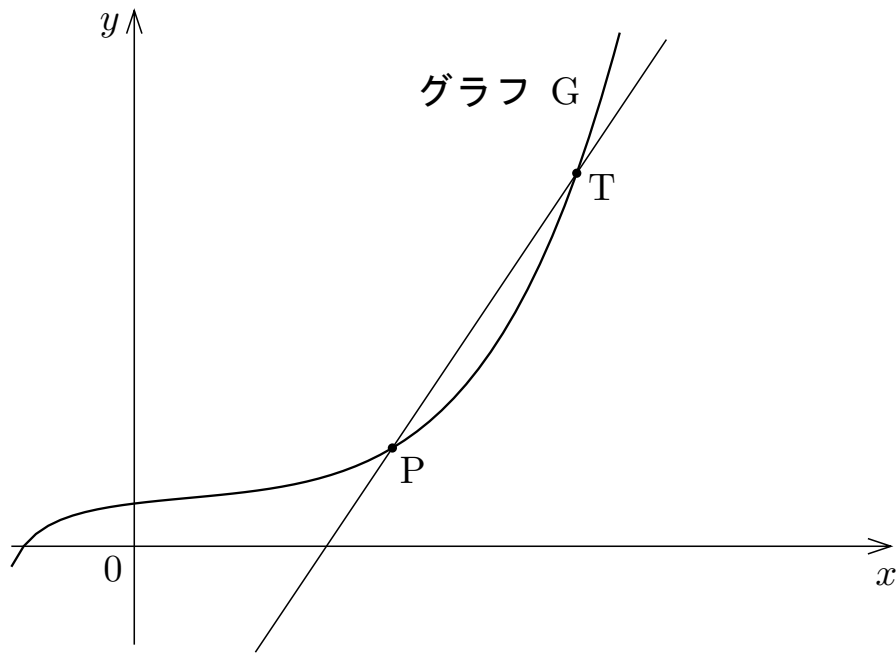


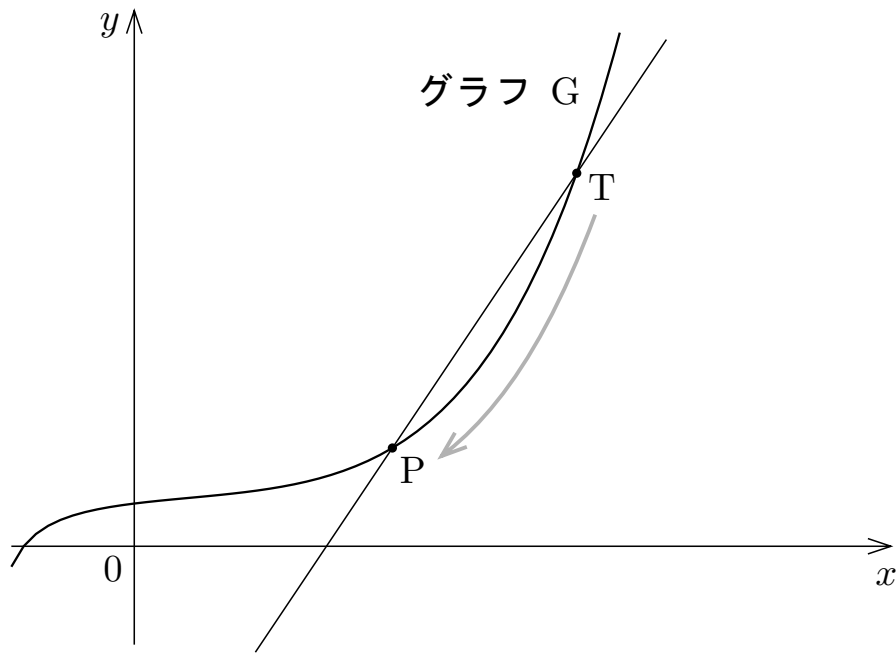
4.6 関数のグラフの接線

関数のグラフの接線の定義を復習する.

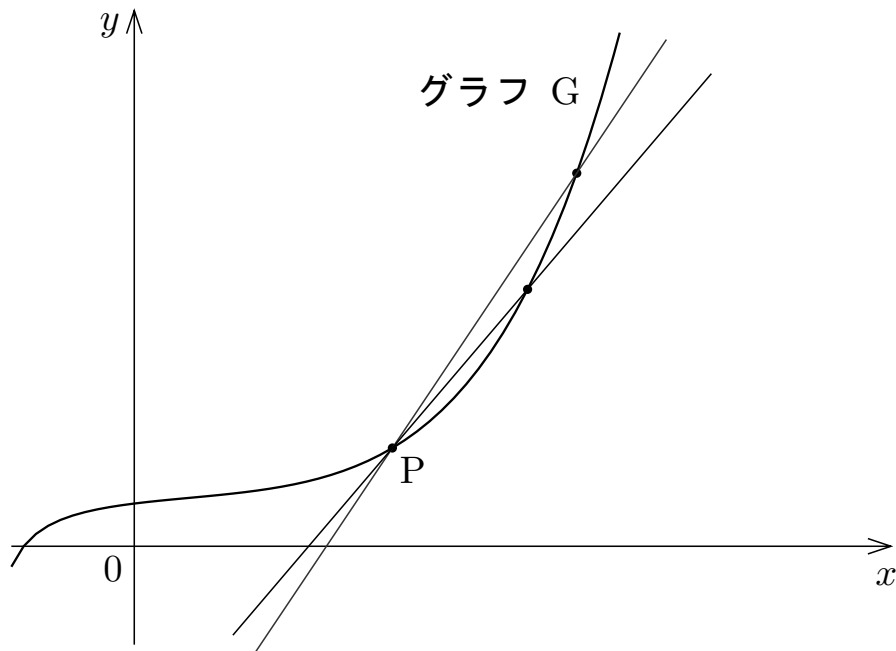
座標平面における
関数のグラフ G に
属す定点 P に対し
て, G に属す動点
 T ($T \neq P$) をとり,
直線 PT を考える.



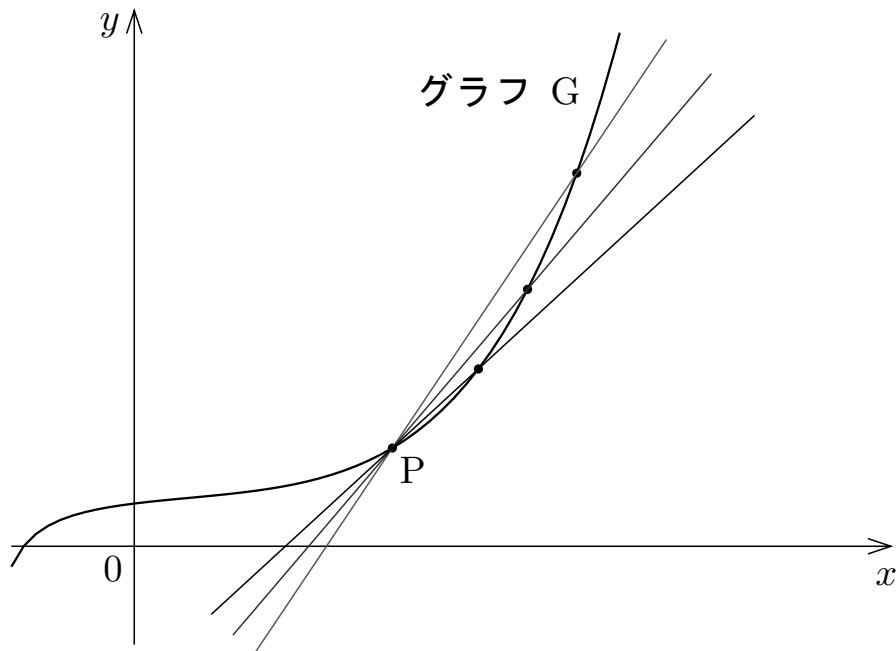
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して、 G に属す動点 T ($T \neq P$) をとり、直線 PT を考える。動点 T を G 上で定点 P に近付ける。



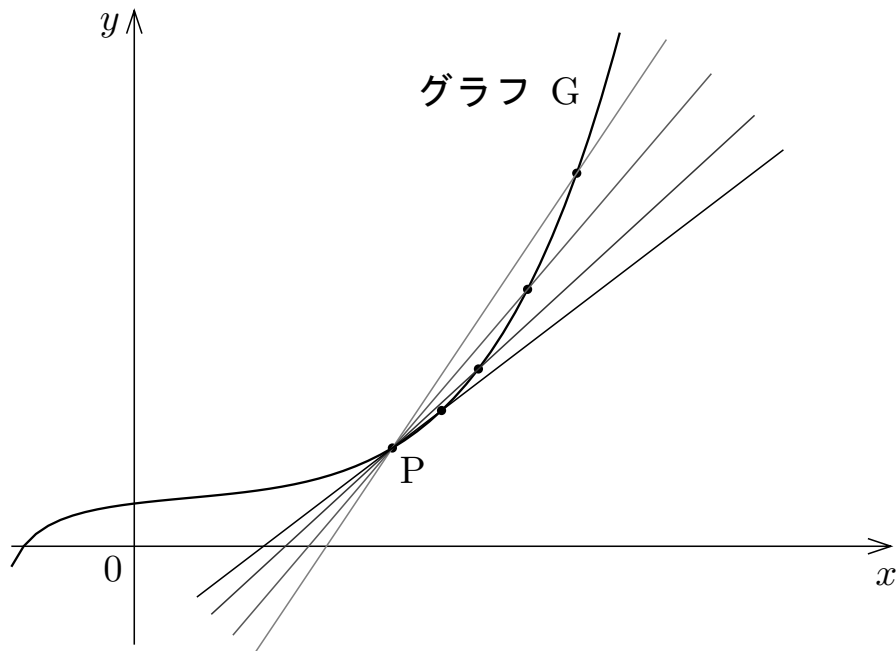
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して、 G に属す動点 T ($T \neq P$) をとり、直線 PT を考える。動点 T を G 上で定点 P に近付ける。



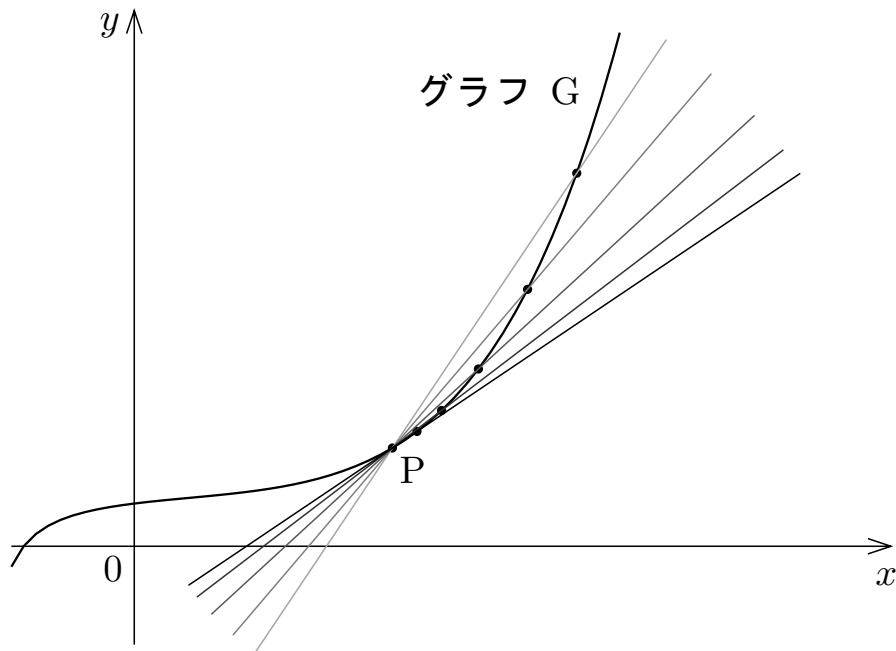
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して、 G に属す動点 T ($T \neq P$) をとり、直線 PT を考える。動点 T を G 上で定点 P に近付ける。



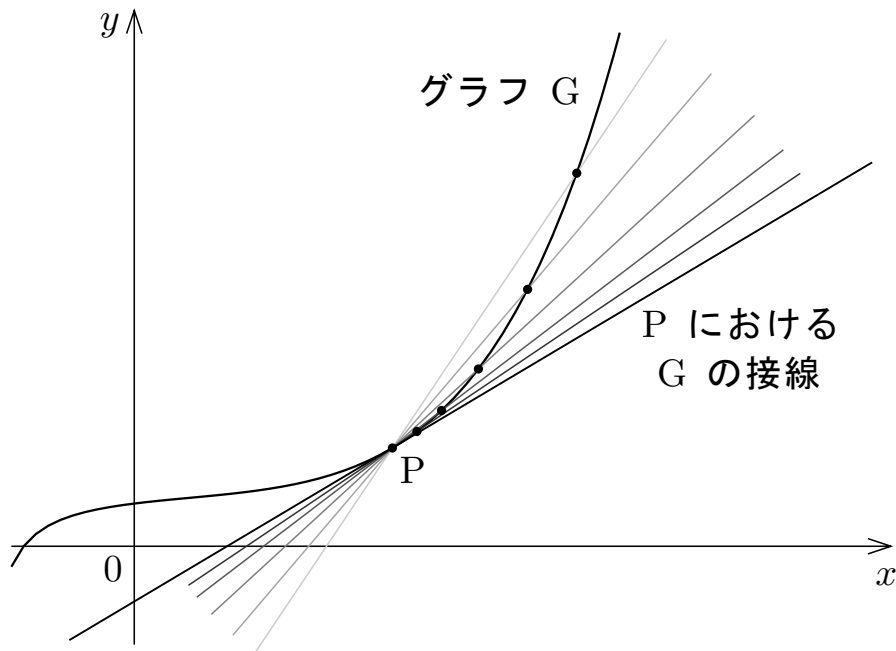
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して、 G に属す動点 T ($T \neq P$) をとり、直線 PT を考える。動点 T を G 上で定点 P に近付ける。



座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して、 G に属す動点 T ($T \neq P$) をとり、直線 PT を考える。動点 T を G 上で定点 P に近付ける。



動点 T を定点 P に限りなく近づけると、直線 PT がある1本の直線 L に限りなく近づくなれば、この直線 L を点 P におけるグラフ G の接線といい、点 P を接点という。



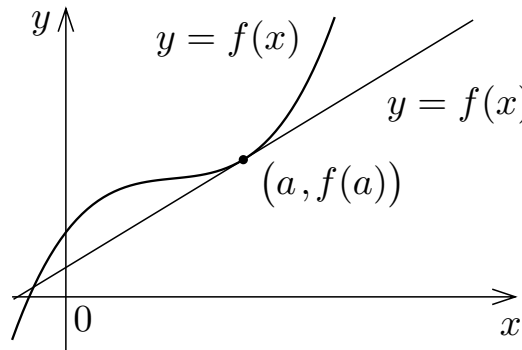
関数 f 及び f の定義域の実数 a について,

f のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾きは f の a における微分係数であった.

関数 f 及び f の定義域の実数 a について,

f のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾きは f の a における微分係数であった. f の a における微分係数は f の導関数の値 $f'(a)$ なので,
 f のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線の傾きは $f'(a)$

である.



$y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線
傾きは $f'(a)$

xy 座標平面において、傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ (c は定数) となる；点 (a, b) がこの直線に属すならば、 $x = a$ のとき $y = b$ なので、 $b = ma + c$, $c = b - ma$ ；よって、点 (a, b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x - a) + b$ である.

xy 座標平面において、傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ (c は定数) となる；点 (a, b) がこの直線に属すならば、 $x = a$ のとき $y = b$ なので、 $b = ma + c$, $c = b - ma$; よって、点 (a, b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x - a) + b$ である.

関数 f は実数 a において微分可能であるとする. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの接線を考える.

xy 座標平面において、傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ (c は定数) となる；点 (a, b) がこの直線に属すならば、 $x = a$ のとき $y = b$ なので、 $b = ma + c$, $c = b - ma$; よって、点 (a, b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x - a) + b$ である.

関数 f は実数 a において微分可能であるとする. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの接線を考える. $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線は、接点 $(a, f(a))$ が属し、傾きは $f'(a)$ である；従ってその方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ である.

xy 座標平面において、傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ (c は定数) となる；点 (a, b) がこの直線に属すならば、 $x = a$ のとき $y = b$ なので、 $b = ma + c$, $c = b - ma$ ；よって、点 (a, b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x - a) + b$ である。

関数 f は実数 a において微分可能であるとする。 xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの接線を考える。 $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線は、接点 $(a, f(a))$ が属し、傾きは $f'(a)$ である；従ってその方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ である。

定理 関数 f が実数 a において微分可能であるとき, xy 座標平面において, f のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線がある; その接線を表す方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める.

xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める.

xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める.

xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める.

xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 5 = 3 + 8 - 5 = 6 .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める.

xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 5 = 3 + 8 - 5 = 6 .$$

従って $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式は $y = 6(x + 1) + 3$,

関数 $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線を表す方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める.

xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 5 = 3 + 8 - 5 = 6 .$$

従って $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式は $y = 6(x + 1) + 3$, つまり $y = 6x + 9$.

終

問4.6.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 5x + 7}{2}$ と定め

る. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式を求めよ.

$f(-2) =$. $f'(x) =$. . $f'(-2) =$. $y = f(x)$ の

グラフの点 $\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式は $y =$ $(x$) . つま

り $y =$.

問4.6.1 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 5x + 7}{2}$ と定め

る. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-2, -\frac{3}{2})$ における接線を表す方程式を求めよ.

$f(-2) = -\frac{3}{2}$. $f'(x) = \frac{3x^2 - 6x - 5}{2}$ なので $f'(-2) = \frac{19}{2}$. $y = f(x)$ の
グラフの点 $(-2, -\frac{3}{2})$ における接線を表す方程式は $y = \frac{19}{2}(x + 2) - \frac{3}{2}$ つま
り $y = \frac{19}{2}x + \frac{35}{2}$. 終

例 区間 $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める.

xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

例 区間 $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める.

xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 .$$

接点は $(2, \ln 7)$.

例 区間 $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める.

xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 .$$

接点は $(2, \ln 7)$. $t = 3x + 1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{d}{dx} \ln(3x+1) = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \frac{d}{dx} (3x+1) = \frac{3}{3x+1} .$$

例 区間 $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める.

xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 .$$

接点は $(2, \ln 7)$. $t = 3x + 1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{d}{dx} \ln(3x+1) = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \frac{d}{dx} (3x+1) = \frac{3}{3x+1} .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{7} .$$

例 区間 $\left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める.

xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 .$$

接点は $(2, \ln 7)$. $t = 3x + 1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1} .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{7} .$$

点 $(2, \ln 7)$ における $y = \psi(x)$ の接線を表す方程式は $y = \frac{3}{7}(x-2) + \ln 7$

関数 $y = \psi(x)$ のグラフの点 $(a, \psi(a))$ における接線を表す方程式は

$$y = \psi'(a)(x-a) + \psi(a)$$

例 区間 $(-\frac{1}{3}, \infty)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める.

xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 .$$

接点は $(2, \ln 7)$. $t = 3x + 1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx} \psi(x) = \frac{d}{dx} \ln(3x+1) = \frac{d}{dt} \ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \frac{d}{dx} (3x+1) = \frac{3}{3x+1} .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{7} .$$

点 $(2, \ln 7)$ における $y = \psi(x)$ の接線を表す方程式は $y = \frac{3}{7}(x-2) + \ln 7$ っ

まり $y = \frac{3}{7}x - \frac{6}{7} + \ln 7$.

終

問4.6.2 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = (\ln x)^2$ と定める. xy 座標平面における $y = \varphi(x)$ のグラフの, x 座標が e である点における接線を表す方程式を求めよ.

$f(e) =$ $=$. $\varphi'(x) =$ $\varphi'(e) =$. $y = \varphi(x)$ のグラ

フの x 座標が e である点における接線を表す方程式は $y =$ つ

まり $y =$.

問4.6.2 区間 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = (\ln x)^2$ と定める. xy 座標平面における $y = \varphi(x)$ のグラフの, x 座標が e である点における接線を表す方程式を求めよ.

$$f(e) = (\ln e)^2 = 1 \quad . \quad \varphi'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \quad \text{なので} \quad \varphi'(e) = \frac{2}{e} \quad . \quad y = \varphi(x) \quad \text{のグラ}$$

フの x 座標が e である点における接線を表す方程式は $y = \frac{2}{e}(x - e) + 1$ っ

$$\text{まり} \quad y = \frac{2}{e}x - 1 \quad .$$

終

例 xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの、 x 座標が $\frac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める.

例 xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの、 x 座標が $\frac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める。

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } y = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \text{ 従って接点は } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\right).$$

例 xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの, x 座標が $\frac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める.

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } y = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \text{ 従って接点は } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\right).$$

また,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^2 x = -2 \sin x \cos x .$$

例 xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの, x 座標が $\frac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める.

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } y = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \text{ 従って接点は } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\right).$$

また,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^2 x = -2 \sin x \cos x .$$

よって, $x = \frac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = -2 \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

例 xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの、 x 座標が $\frac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める。

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } y = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \text{ 従って接点は } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\right).$$

また、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^2 x = -2 \sin x \cos x .$$

よって、 $x = \frac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = -2 \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

従って $y = \cos^2 x$ のグラフの点 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\right)$ における接線を表す方程式は

$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4}$. 関数 $y = \psi(x)$ のグラフの点 $(a, \psi(a))$ における接線を表す方程式は $y = \psi'(a)(x - a) + \psi(a)$

例 xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの、 x 座標が $\frac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める。

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } y = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}, \text{ 従って接点は } \left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\right).$$

また、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos^2 x = -2 \sin x \cos x.$$

よって、 $x = \frac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = -2 \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

従って $y = \cos^2 x$ のグラフの点 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{4}\right)$ における接線を表す方程式は

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3}{4}.$$

終

問4.6.3 xy 座標平面における関数 $y = \frac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの, x 座標が $\frac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} =$$

$x = \frac{\pi}{3}$ のとき,

$$y = \quad , \quad \frac{dy}{dx} =$$

$y = \frac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\frac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$$y = \left(x \quad \right) + \quad .$$

問4.6.3 xy 座標平面における関数 $y = \frac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの, x 座標が $\frac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5 \cdot \frac{d}{dx}(\cos x + 2)}{(\cos x + 2)^2} = \frac{5 \sin x}{(\cos x + 2)^2} .$$

$x = \frac{\pi}{3}$ のとき,

$$y = \quad , \quad \frac{dy}{dx} = \quad .$$

$y = \frac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\frac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$$y = \left(x \quad \right) + \quad .$$

問4.6.3 xy 座標平面における関数 $y = \frac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの, x 座標が $\frac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めなさい.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5 \cdot \frac{d}{dx}(\cos x + 2)}{(\cos x + 2)^2} = \frac{5 \sin x}{(\cos x + 2)^2} .$$

$x = \frac{\pi}{3}$ のとき,

$$y = \frac{5}{\cos \frac{\pi}{3} + 2} = \frac{5}{\frac{1}{2} + 2} = 2 , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5 \sin \frac{\pi}{3}}{\left(\cos \frac{\pi}{3} + 2\right)^2} = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{5} .$$

$y = \frac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\frac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$$y = \left(x \right) + .$$

問4.6.3 xy 座標平面における関数 $y = \frac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの、 x 座標が $\frac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めなさい。

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5 \cdot \frac{d}{dx}(\cos x + 2)}{(\cos x + 2)^2} = \frac{5 \sin x}{(\cos x + 2)^2} .$$

$x = \frac{\pi}{3}$ のとき,

$$y = \frac{5}{\cos \frac{\pi}{3} + 2} = \frac{5}{\frac{1}{2} + 2} = 2 , \quad \frac{dy}{dx} = \frac{5 \sin \frac{\pi}{3}}{\left(\cos \frac{\pi}{3} + 2\right)^2} = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{2} + 2\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{5} .$$

$y = \frac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\frac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$$y = \frac{2\sqrt{3}}{5} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2 .$$

終