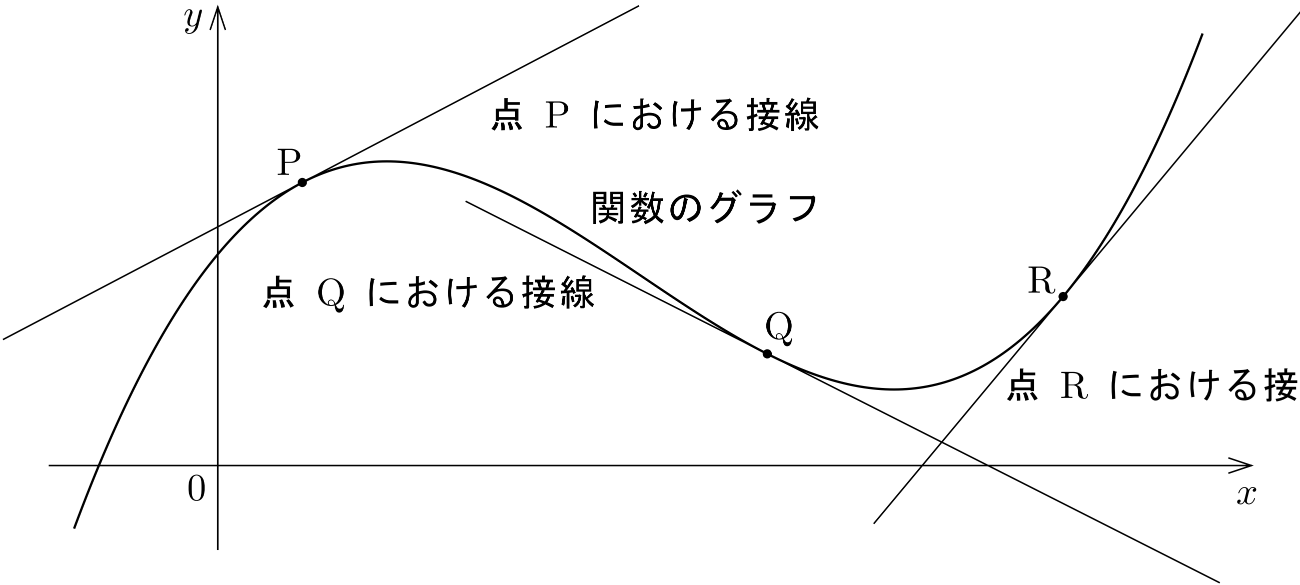
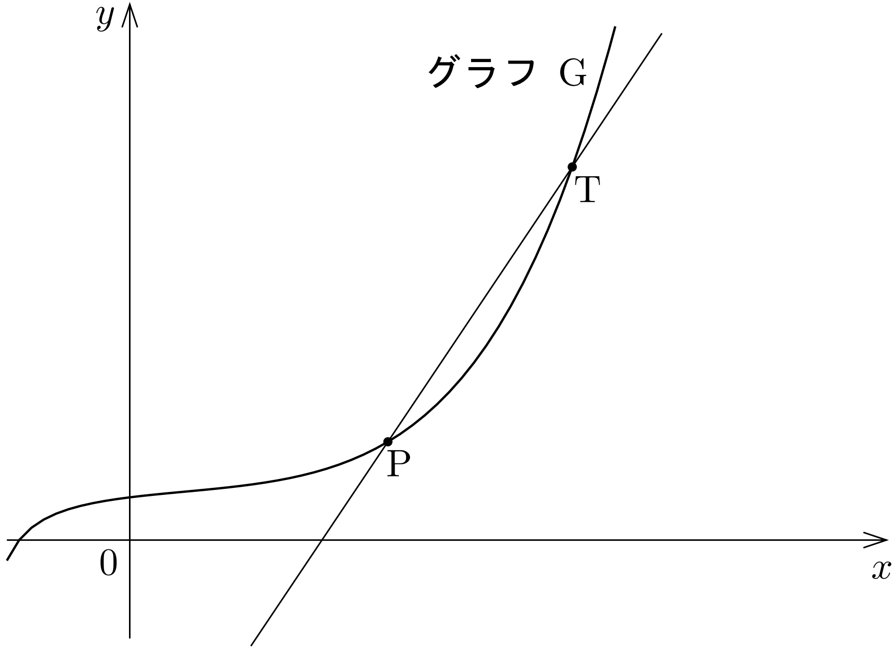
4.6　関数のグラフの接線

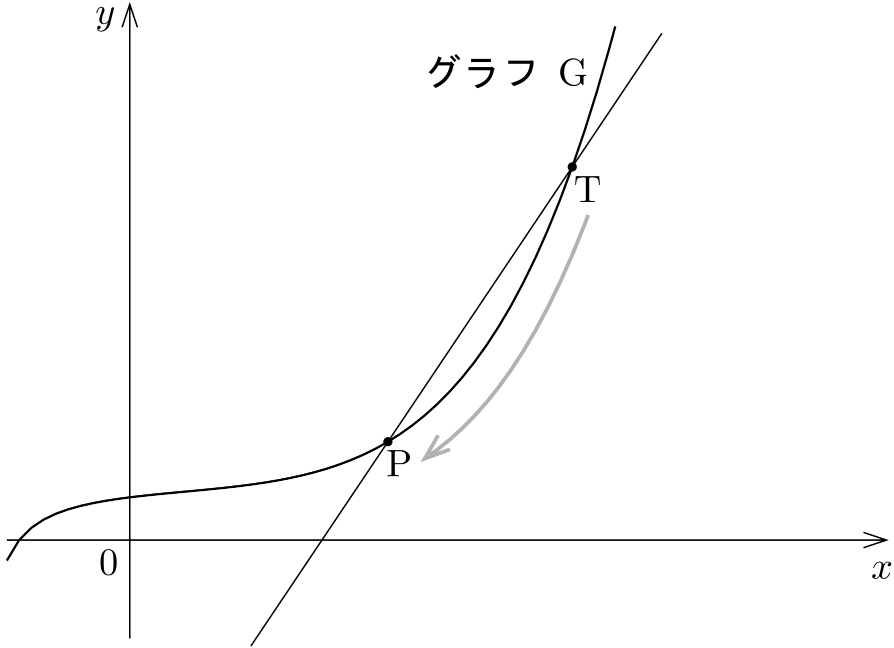
関数のグラフの点における接線とは，直感的にいうと，下図のようにその点においてグラフに“接する”直線のことである.



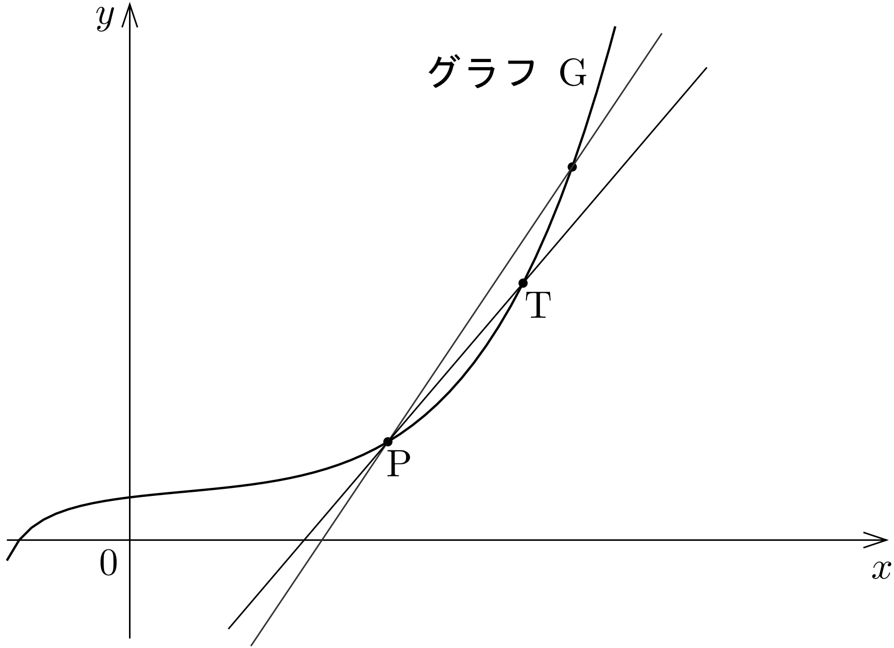
　座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T $\neq$ P）をとり，直線 PT を考える．



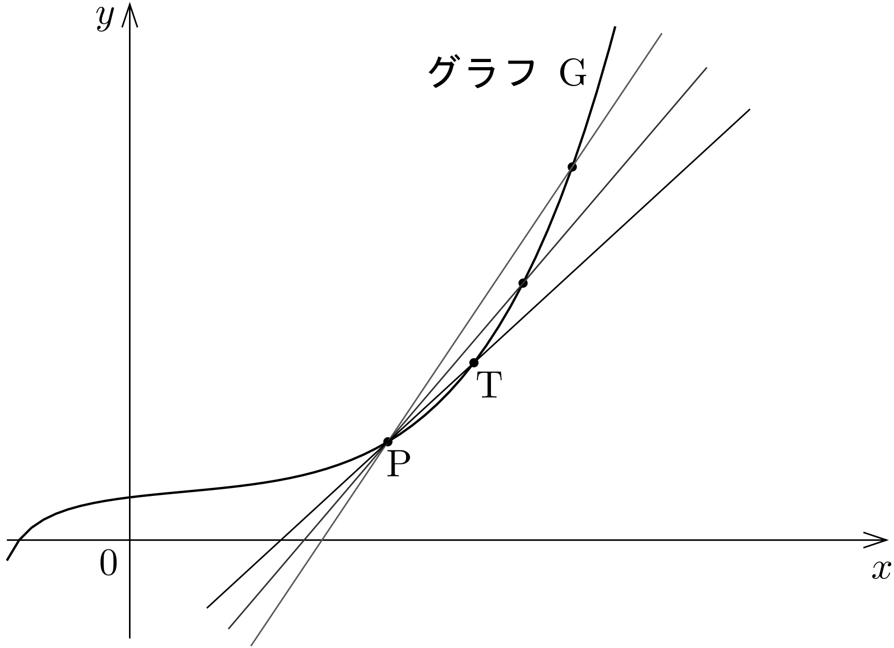
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（$\mathrm{T} \neq \mathrm{P}$）をとり，直線 PT を考える．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



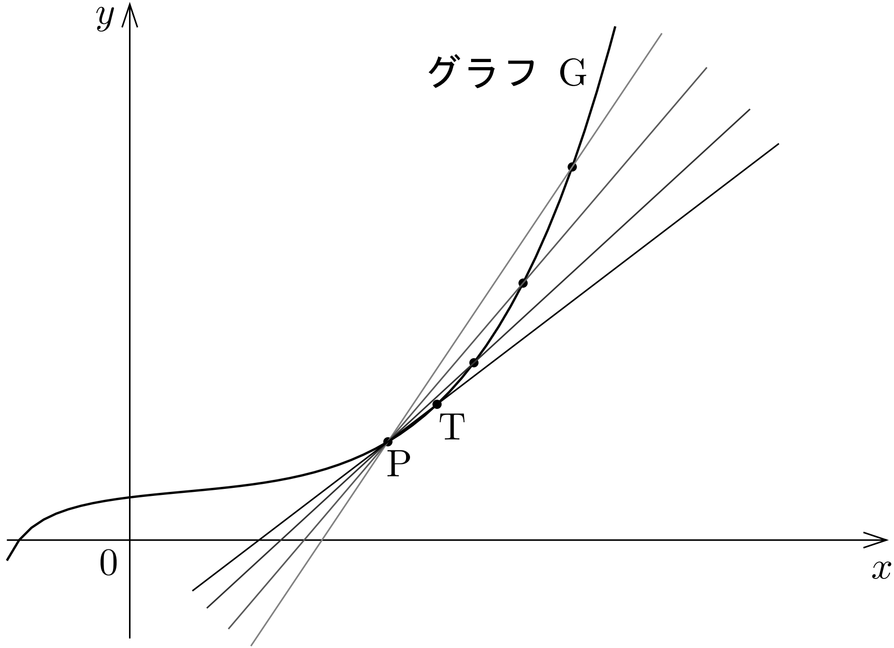
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T $\neq$ P）をとり，直線 PT を考える．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



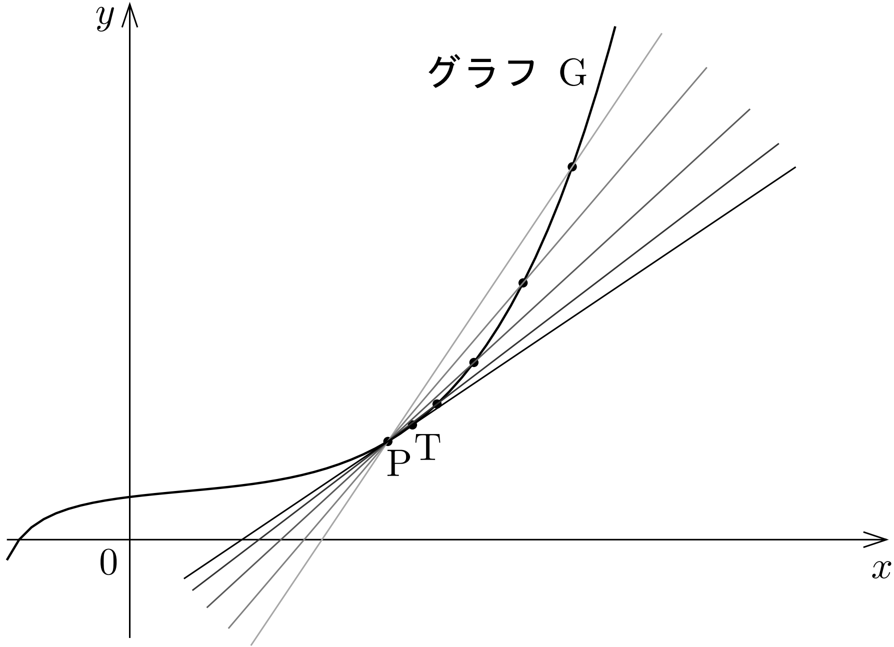
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T $\neq$ P）をとり，直線 PT を考える．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



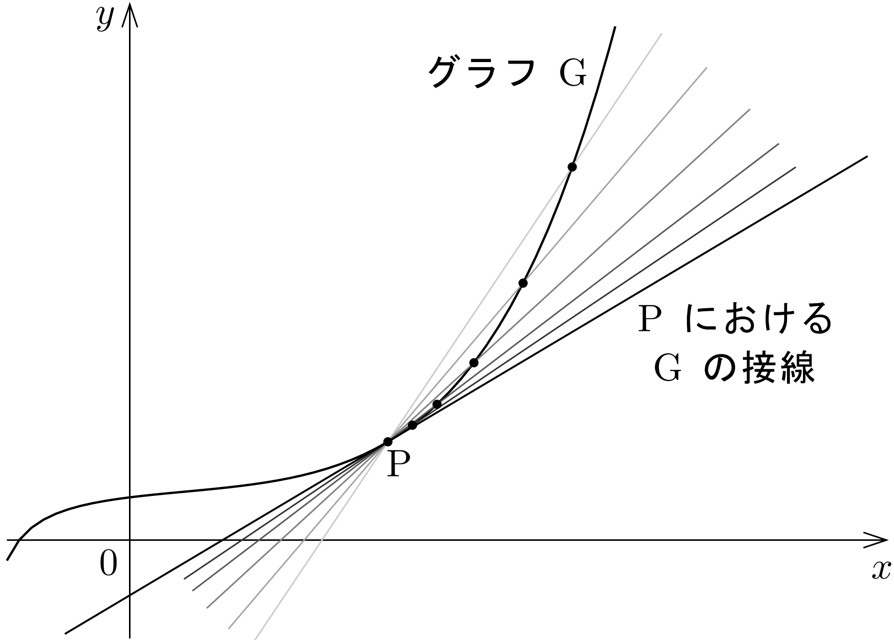
　座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T $\neq$ P）をとり，直線 PT を考える．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



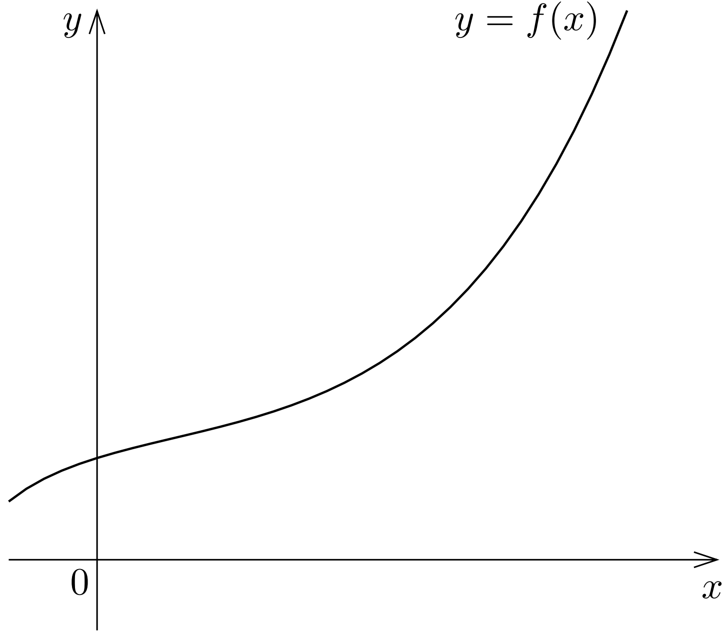
座標平面における関数のグラフ G に属す定点 P に対して，G に属す動点 T（T $\neq$ P）をとり，直線 PT を考る．動点 T を G 上で定点 P に近付ける．



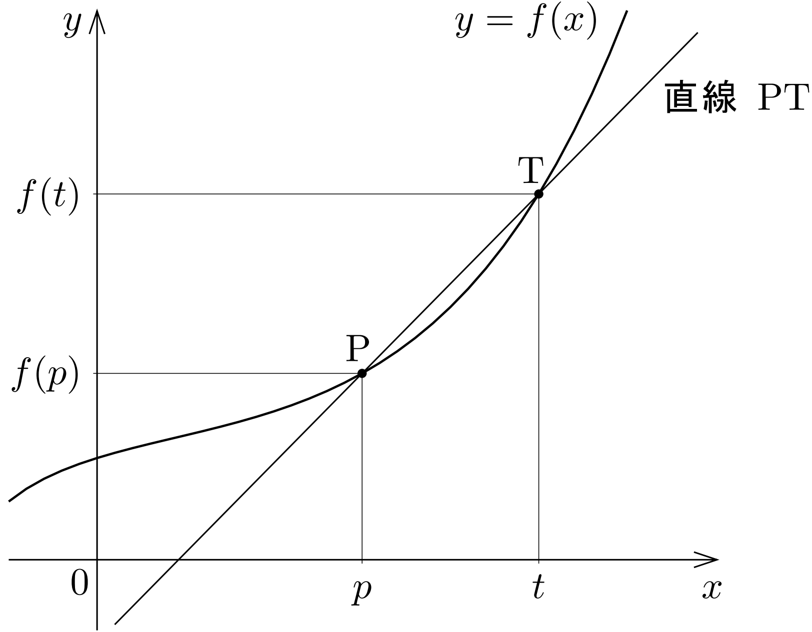
動点 T を定点 P に限りなく近づけるとき，直線 PT がある 1 本の直線 L に限りなく近づくならば，この直線 L を点 P におけるグラフ G の接線といい，点 P を接点という.



関数 f は定義域の実数 p において微分可能であるとする．xy 座標平面において $y = f(x)$ のグラフを考える．

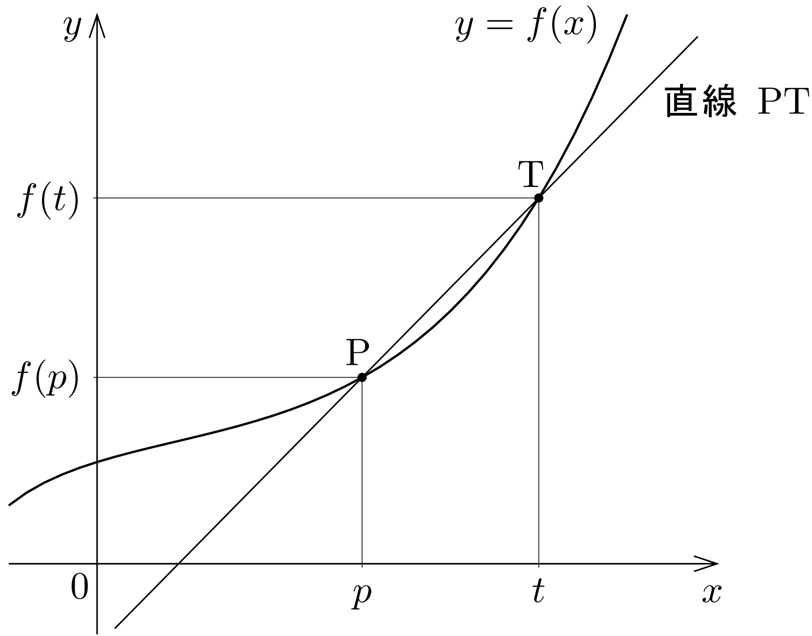


関数 f は定義域の実数 p において微分可能であるとする．xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフを考える．$t \neq p$ である定数 p と変数 t とに対して，グラフに属す定点 $\mathrm{P}=\big(p, f(p)\big)$ と動点 $\mathrm{T}=\big(t, f(t)\big)$ とをとり，直線 PT を引く．

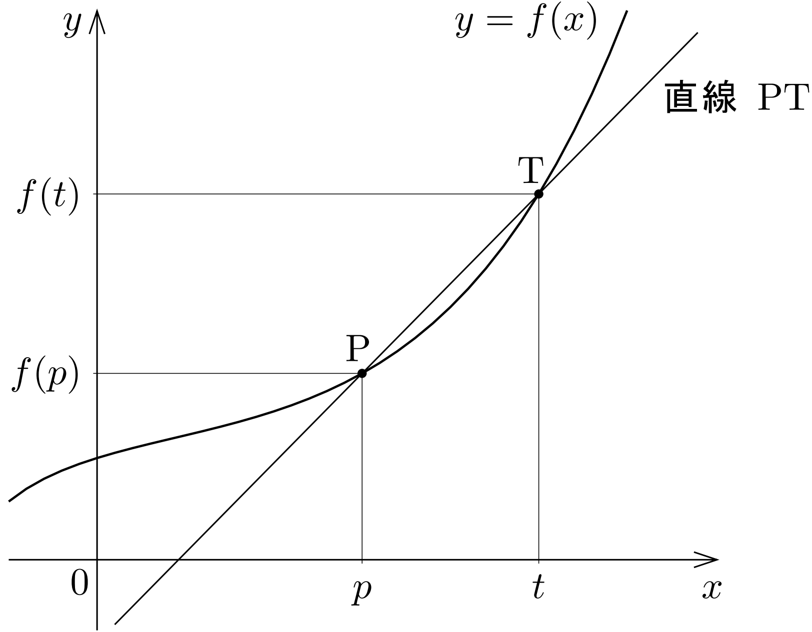


関数 f は定義域の実数 p において微分可能であるとする．xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフを考える．$t \neq p$ である定数 p と変数 t とに対して，グラフに属す定点 $\mathrm{P}=\bigl(p,f(p)\bigr)$ と動点 $\mathrm{T}=\bigl(t,f(t)\bigr)$ とをとり，直線 PT を引く．直線 PT の傾きは

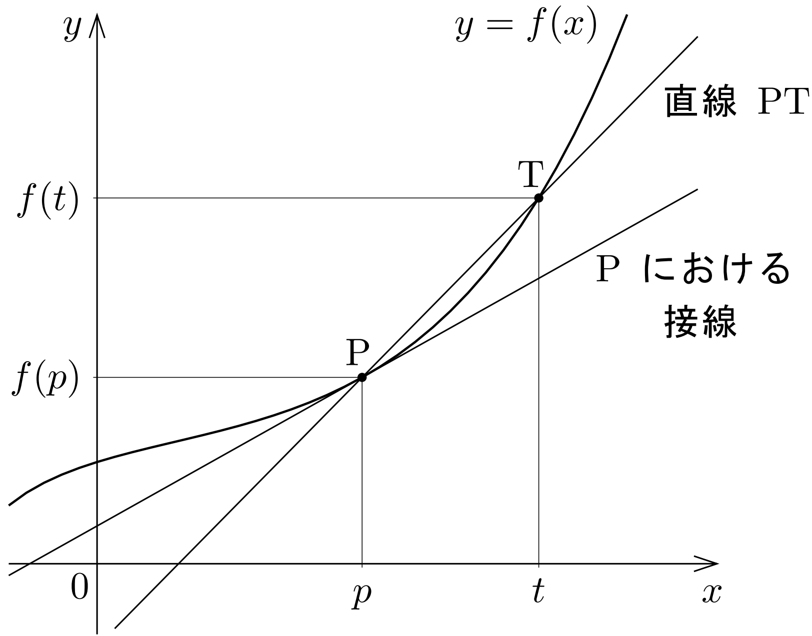
である．



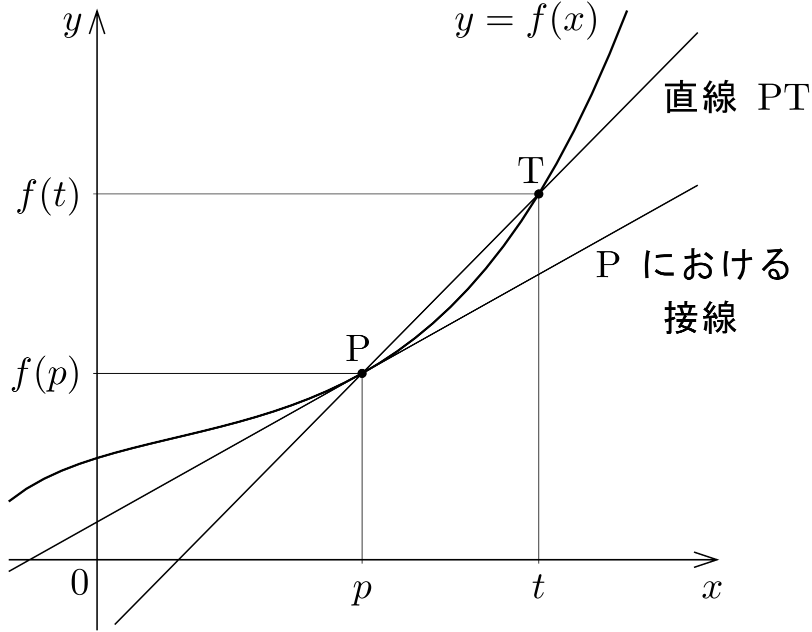
関数 f は定義域の実数 p において微分可能であるとする．xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフを考える．$t \neq p$ である定数 p と変数 t とに対して，グラフに属す定点 $\mathrm{P}=\bigl(p, f(p)\bigr)$ と動点 $\mathrm{T}=\bigl(t, f(t)\bigr)$ とをとり，直線 PT を引く．直線 PT の傾きは f の平均変化率 $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．



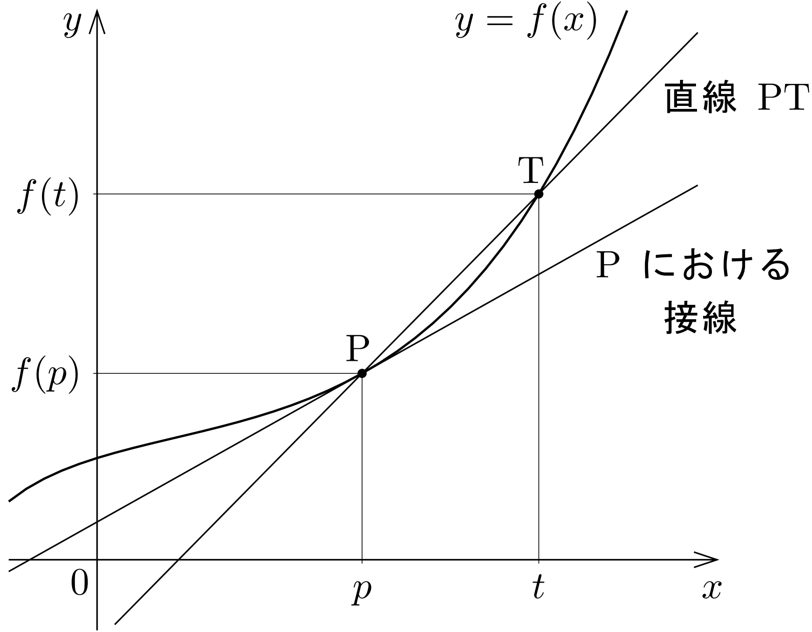
$t \to p$ のとき，グラフに属す動点 T は定点 P に限りなく近づく；このときの直線 PT の極限が f のグラフの P における接線である．



$t \to p$ のとき，グラフに属す動点 T は定点 P に限りなく近づく；このときの直線 PT の極限が f のグラフの P における接線である．つまり，グラフの点 P における接線は，直線 PT の $t \to p$ のときの極限である．



$t \to p$ のとき，グラフに属す動点 T は定点 P に限りなく近づく；このときの直線 PT の極限が f のグラフの P における接線である．つまり，グラフの点 P における接線は，直線 PT の $t \to p$ のときの極限である．よって，f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．



関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である.

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

$$\text{直線 PT} \cdots \text{傾き} \ \frac{f(t)-f(p)}{t-p}$$

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

$$\text{直線 PT} \cdots \text{傾き } \frac{f(t)-f(p)}{t-p}$$

$t \to p$ とする $\Downarrow$ 動点 $\mathrm{T}=\big(t, f(t)\big)$ は定点 $\mathrm{P}=\big(p, f(p)\big)$ に限りなく近づく

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

直線 PT $\cdots$ 傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$

$t \to p$ とする $\Downarrow$ 動点 $\mathrm{T}=\big(t, f(t)\big)$ は定点 $\mathrm{P}=\big(p, f(p)\big)$ に限りなく近づく

点 P における接線 $\cdots$ 傾き $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ ＝〔 p における f の微分係数〕

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t\to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

$$\text{直線 PT} \cdots \text{傾き}\ \frac{f(t)-f(p)}{t-p}$$

$t\to p$ とする $\Big\Downarrow$ 動点 $\mathrm{T}=\big(t,f(t)\big)$ は定点 $\mathrm{P}=\big(p,f(p)\big)$ に限りなく近づく

点 P における接線 $\cdots$ 傾き $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ ＝〔 p における f の微分係数〕

よって，f のグラフの点 $\mathrm{P}=\big(p,f(p)\big)$ における接線の傾きは，p における f の微分係数である．

関数 f のグラフの点 P における接線の傾きは，直線 PT の傾き $\dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ の $t \to p$ のときの極限値 $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ である．この極限値は p における f の微分係数である．

$$\text{直線 PT} \cdots \text{傾き } \frac{f(t)-f(p)}{t-p}$$

$t \to p$ とする $\Downarrow$ 動点 $\mathrm{T}=\bigl(t,f(t)\bigr)$ は定点 $\mathrm{P}=\bigl(p,f(p)\bigr)$ に限りなく近づく

点 P における接線 $\cdots$ 傾き $\displaystyle\lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$ ＝〔 p における f の微分係数〕

よって，f のグラフの点 $\mathrm{P}=\bigl(p,f(p)\bigr)$ における接線の傾きは，p における f の微分係数である．

定理　関数 f が定義域の実数 p において微分可能であるとき，p における f の微分係数は f のグラフの点 $\bigl(p,f(p)\bigr)$ における接線の傾きである．

関数 f 及び f の定義域の実数 a について,

f のグラフの点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ における接線の傾きは f の a における微分係数である.

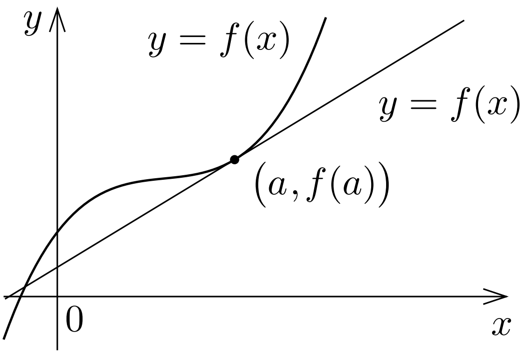
関数 f 及び f の定義域の実数 a について，

f のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線の傾きは f の a における微分係数

である．f の a における微分係数は f の導関数の値 $f'(a)$ なので，

$$f \text{ のグラフの点 } \big(a, f(a)\big) \text{ における接線の傾きは } f'(a)$$

である．



$y = f(x)$ のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線

傾きは $f'(a)$

xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+c$ （c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属すならば，$x=a$ のとき $y=b$ なので，$b=ma+c$ ，$c=b-ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+b-ma$ つまり $y=m(x-a)+b$ である．

　xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ （c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属するならば， $x = a$ のとき $y = b$ なので， $b = ma + c$ ， $c = b - ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x-a) + b$ である．

　関数 f は実数 a において微分可能であるとする． xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの接線を考える．

xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+c$ （c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属すならば，$x=a$ のとき $y=b$ なので，$b=ma+c$ ，$c=b-ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+b-ma$ つまり $y=m(x-a)+b$ である．

関数 f は実数 a において微分可能であるとする．xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの接線を考える．$y=f(x)$ のグラフの点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ における接線は，接点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ が属し，傾きは $f'(a)$ である；従ってその方程式は $y=\qquad(x-\quad)+\qquad$ である．

xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + c$ （ c は定数）となる；点 (a, b) がこの直線に属すならば， $x = a$ のとき $y = b$ なので， $b = ma + c$ ， $c = b - ma$ ；よって，点 (a, b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y = mx + b - ma$ つまり $y = m(x - a) + b$ である．

関数 f は実数 a において微分可能であるとする． xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの接線を考える． $y = f(x)$ のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線は，接点 $\big(a, f(a)\big)$ が属し，傾きは $f'(a)$ である；従ってその方程式は $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ である．

　xy 座標平面において，傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+c$ （ c は定数）となる；点 (a,b) がこの直線に属すならば， $x=a$ のとき $y=b$ なので， $b=ma+c$ ， $c=b-ma$ ；よって，点 (a,b) が属する傾き m の直線を表す方程式は $y=mx+b-ma$ つまり $y=m(x-a)+b$ である．

　関数 f は実数 a において微分可能であるとする． xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの接線を考える． $y=f(x)$ のグラフの点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ における接線は，接点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ が属し，傾きは $f'(a)$ である；従ってその方程式は $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ である．

定理　関数 f が実数 a において微分可能であるとき， xy 座標平面において， f のグラフの点 $\bigl(a,f(a)\bigr)$ における接線がある；その接線を表す方程式は

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)\ .$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3\ .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-4x^2-5x+3$ と定める. xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3-4(-1)^2-5(-1)+3 = -1-4+5-3 = 3 \ .$$

点 $(-1,3)$ は確かに $y=f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3-4x^2-5x+3) = 3x^2-8x-5 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 \ .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 \ .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 5 = 3 + 8 - 5 = 6 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める.
xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 \ .$$

点 $(-1, 3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 \ .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 5 = 3 + 8 - 5 = 6 \ .$$

従って $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1, 3)$ における接線を表す方程式は
$y = 6(x + 1) + 3$,
関数 $y = f(x)$ のグラフの点 $(a, f(a))$ における接線を表す方程式は
$y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 \ .$$

点 $(-1,3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 \ .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 5 = 3 + 8 - 5 = 6 \ .$$

従って $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式は $y = 6(x+1) + 3$, つまり $y = 6x + 9$.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ と定める. xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式を求める.

$$f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 3 = -1 - 4 + 5 - 3 = 3 .$$

点 $(-1,3)$ は確かに $y = f(x)$ のグラフに属す.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 5x + 3) = 3x^2 - 8x - 5 .$$

よって

$$f'(-1) = 3(-1)^2 - 8(-1) - 5 = 3 + 8 - 5 = 6 .$$

従って $y = f(x)$ のグラフの点 $(-1,3)$ における接線を表す方程式は $y = 6(x+1) + 3$, つまり $y = 6x + 9$. ここで結果を $y = 6(x+1) + 3 = 6x + 9$ のように記さないこと. 後半の等式 $6(x+1) + 3 = 6x + 9$ は方程式でなく恒等式であるから, 等式 $y = 6(x+1) + 3 = 6x + 9$ は方程式とはいいにくい. 終

$\boxed{\text{問}4.6.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 5x + 7}{2}$ と定める． xy 座標平面における $y = f(x)$ のグラフの点 $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式を求めよ．

$f(-2) =$ ． $f'(x) =$ なので $f'(-2) =$ ． $y = f(x)$ のグラフの点 $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式は $y = \quad (x \quad)$ つまり $y =$ ．

$\boxed{問4.6.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2-5x+7}{2}$ と定める. xy 座標平面における $y=f(x)$ のグラフの点 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式を求めよ.

$f(-2)=-\dfrac{3}{2}$. $f'(x)=\dfrac{3x^2-6x-5}{2}$ なので $f'(-2)=\dfrac{19}{2}$. $y=f(x)$ のグラフの点 $\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$ における接線を表す方程式は $y=\dfrac{19}{2}(x+2)-\dfrac{3}{2}$ つまり $y=\dfrac{19}{2}x+\dfrac{35}{2}$. $\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2, \ln 7)$.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2, \ln 7)$. $t = 3x+1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y = \psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3 \cdot 2 + 1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2, \ln 7)$. $t = 3x + 1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1} \ .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3 \cdot 2 + 1} = \frac{3}{7} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y=\psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2)=\ln(3\cdot 2+1)=\ln 7\ .$$

接点は $(2,\ln 7)$. $t=3x+1$ とおくと

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln(3x+1)=\frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1)=\frac{3}{3x+1}\ .$$

よって

$$\psi'(2)=\frac{3}{3\cdot 2+1}=\frac{3}{7}\ .$$

点 $(2,\ln 7)$ における $y=\psi(x)$ の接線を表す方程式は $y=\dfrac{3}{7}(x-2)+\ln 7$

関数 $y=\psi(x)$ のグラフの点 $\bigl(a,\psi(a)\bigr)$ における接線を表す方程式は

$y=\psi'(a)(x-a)+\psi(a)$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left(-\dfrac{1}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y=\psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2) = \ln(3\cdot 2+1) = \ln 7 \ .$$

接点は $(2,\ln 7)$. $t=3x+1$ とおくと

$$\psi'(x) = \frac{d}{dx}\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1) = \frac{3}{3x+1} \ .$$

よって

$$\psi'(2) = \frac{3}{3\cdot 2+1} = \frac{3}{7} \ .$$

点 $(2,\ln 7)$ における $y=\psi(x)$ の接線を表す方程式は $y=\dfrac{3}{7}(x-2)+\ln 7$ つまり $y=\dfrac{3}{7}x-\dfrac{6}{7}+\ln 7$.

$\boxed{例}$ 区間 $\left(-\frac{1}{3},\infty\right)$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\ln(3x+1)$ と定める. xy 座標平面における $y=\psi(x)$ のグラフの, x 座標が 2 である点における接線を表す方程式を求める.

$$\psi(2)=\ln(3\cdot 2+1)=\ln 7\ .$$

接点は $(2,\ln 7)$. $t=3x+1$ とおくと

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\psi(x)=\frac{d}{dx}\ln(3x+1)=\frac{d}{dt}\ln t\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\frac{d}{dx}(3x+1)=\frac{3}{3x+1}\ .$$

よって

$$\psi'(2)=\frac{3}{3\cdot 2+1}=\frac{3}{7}\ .$$

点 $(2,\ln 7)$ における $y=\psi(x)$ の接線を表す方程式は $y=\frac{3}{7}(x-2)+\ln 7$ つまり $y=\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}+\ln 7$. ここで結果を $y=\frac{3}{7}(x-2)+\ln 7=\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}+\ln 7$ のように記さないこと ; この等式は方程式とはいいにくい. $\boxed{終}$

$\boxed{問4.6.2}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=(\ln x)^2$ と定める．xy 座標平面における $y=\varphi(x)$ のグラフの，x 座標が e である点における接線を表す方程式を求めよ．

$f(e)=$ $\qquad$ $=$ $\qquad$ ． $\varphi'(x)=$ $\qquad$ なので $\varphi'(e)=$ $\qquad$ ． $y=\varphi(x)$ のグラフの x 座標が e である点における接線を表す方程式は $y=$ $\qquad$ つまり $y=$ $\qquad$ ．

$\boxed{問 4.6.2}$ 区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=(\ln x)^2$ と定める．xy 座標平面における $y=\varphi(x)$ のグラフの，x 座標が e である点における接線を表す方程式を求めよ．

$f(e)=(\ln e)^2=1$ ． $\varphi'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$ なので $\varphi'(e)=\dfrac{2}{e}$ ． $y=\varphi(x)$ のグラフの x 座標が e である点における接線を表す方程式は $y=\dfrac{2}{e}(x-e)+1$ つまり $y=\dfrac{2}{e}x-1$ ． $\boxed{終}$

$\boxed{例}$ xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める．

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における関数 $y = \cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める.

$x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき $y = \left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3}{4}\right)$.

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\frac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める.

$x=\frac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{4}\right)$．また，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos^2 x=-2\sin x\cos x\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める.

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$. また,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos^2 x=-2\sin x\cos x\ .$$

よって，$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=-2\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める．

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$，従って接点は $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$．また，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos^2 x=-2\sin x\cos x\ .$$

よって，$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=-2\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

従って $y=\cos^2 x$ のグラフの点 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3}{4}\right)$ における接線を表す方程式は

$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{3}{4}$．関数 $y=\psi(x)$ のグラフの点 $(a,\psi(a))$ における接線を表す方程式は $y=\psi'(a)(x-a)+\psi(a)$

例 xy 座標平面における関数 $y=\cos^2 x$ のグラフの，x 座標が $\frac{\pi}{6}$ である点における接線を表す方程式を求める．

$x=\frac{\pi}{6}$ のとき $y=\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ ，従って接点は $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{4}\right)$．また，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\cos^2 x=-2\sin x\cos x \;.$$

よって，$x=\frac{\pi}{6}$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=-2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}=-2\frac{1}{2}\frac{3\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \;.$$

従って $y=\cos^2 x$ のグラフの点 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{3}{4}\right)$ における接線を表す方程式は

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{3}{4} \;.$$

終

$\boxed{問 4.6.3}$ xy 座標平面における関数 $y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき,

$$y = \qquad\qquad\qquad , \qquad \frac{dy}{dx} = \qquad\qquad\qquad .$$

$y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$$y = \qquad \left(x \qquad\right) + \qquad .$$

$\boxed{問4.6.3}$ xy 座標平面における関数 $y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5 \cdot \dfrac{d}{dx}(\cos x + 2)}{(\cos x + 2)^2} = \frac{5\sin x}{(\cos x + 2)^2} .$$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$y = \qquad , \qquad \frac{dy}{dx} = \qquad .$$

$y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$$y = \qquad \left(x \qquad\right) + \qquad .$$

$\boxed{\text{問}4.6.3}$ xy 座標平面における関数 $y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5 \cdot \dfrac{d}{dx}(\cos x + 2)}{(\cos x + 2)^2} = \frac{5\sin x}{(\cos x + 2)^2} \ .$$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$y = \frac{5}{\cos\dfrac{\pi}{3} + 2} = \frac{5}{\dfrac{1}{2} + 2} = 2 \ , \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{5\sin\dfrac{\pi}{3}}{\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + 2\right)^2} = \frac{5 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\dfrac{1}{2} + 2\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{5} \ .$$

$y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$$y = \qquad \left(x \qquad \right) + \qquad .$$

$\boxed{問 4.6.3}$ xy 座標平面における関数 $y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの，x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式を求めよ．

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5 \cdot \dfrac{d}{dx}(\cos x + 2)}{(\cos x + 2)^2} = \frac{5\sin x}{(\cos x + 2)^2}\ .$$

$x = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，

$$y = \frac{5}{\cos\dfrac{\pi}{3} + 2} = \frac{5}{\dfrac{1}{2} + 2} = 2\ , \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{5\sin\dfrac{\pi}{3}}{\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + 2\right)^2} = \frac{5 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\dfrac{1}{2} + 2\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{5}\ .$$

$y = \dfrac{5}{\cos x + 2}$ のグラフの x 座標が $\dfrac{\pi}{3}$ である点における接線を表す方程式は

$y = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\ .$ $\boxed{終}$