4.7 数列の極限

定義域が無限集合である数列を無限数列という. 無限数列の極限を考える.

定義域が無限集合である数列を無限数列という．無限数列の極限を考える．

準備として変数 x について $x \to \infty$ のときの関数 $f(x)$ の極限値の定義を復習する．

関数 $f(x)$ について，どんなに大きい実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があって，

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限値という；そしてこの極限値 c を $\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表す：$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$.

関数 $f(x)$ について，どんなに大きい実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があって，

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限値という；そしてこの極限値 c を $\lim_{x \to \infty} f(x)$ と書き表す：$\lim_{x \to \infty} f(x) = c$.

無限数列は，関数であり，この定義の前提条件“どんなに大きい実数 K に対しても $x > K$ である定義域の実数 x がある”を満たす．よって，この関数の極限の定義は無限数列に適用できる．

関数 $f(x)$ について，どんなに大きい実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があって，

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限値という；そしてこの極限値 c を $\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表す：$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$.

この関数の極限の定義を無限数列に適用する.

関数 $f(x)$ について，どんなに大きい実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があって，

$f(x)$ の定義域の実数を表す変数 x の値を限りなく大きくしていくと

$f(x)$ の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は c に収束するといい，c を $f(x)$ の極限値という；そしてこの極限値 c を $\lim_{x\to\infty} f(x)$ と書き表す：$\lim_{x\to\infty} f(x) = c$ ．

この関数の極限の定義を無限数列に適用する．

無限数列 $\{a_n\}$ について，

自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと

項 a_n の値が唯一つの定数 c に限りなく近づく

とき，$\{a_n\}$ は c に収束するといい，c を $\{a_n\}$ の極限値という；この極限値 c を $\lim_{n\to\infty} a_n$ と書き表す：$\lim_{n\to\infty} a_n = c$ ．

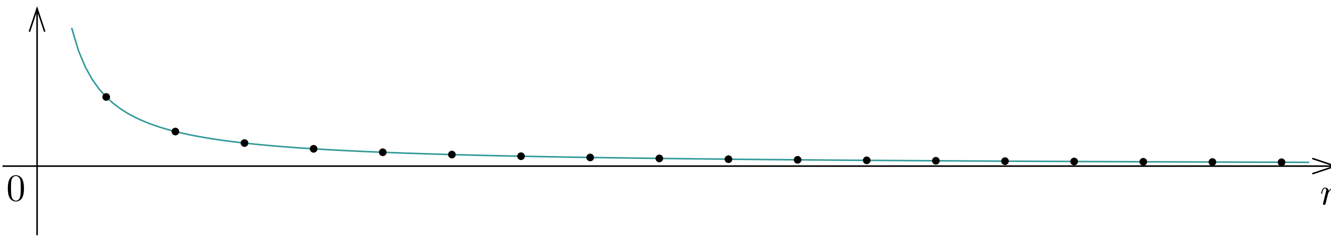
無限数列 $\{a_n\}$ の極限は $n \to \infty$ のときの極限しかないので，“数列 $\{a_n\}$ の極限” というと $n \to \infty$ のときの極限を意味する.

$\boxed{例}$ 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ は，関数 $\dfrac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したものである.

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ は，関数 $\dfrac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したものである．数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ は， $x\to\infty$ のときの関数 $\dfrac{1}{x}$ の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ において x の値を正の自然数に限定したものである．

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ は，関数 $\dfrac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したものである．数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ の極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ は， $x\to\infty$ のときの関数 $\dfrac{1}{x}$ の極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ において x の値を正の自然数に限定したものである． $x\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{x}$ は 0 に収束する： $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ．

例 数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ は，関数 $\frac{1}{x}$ において変数 x の値を正の自然数に限定したものである．数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ の極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$ は，$x\to\infty$ のときの関数 $\frac{1}{x}$ の極限 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ において x の値を正の自然数に限定したものである．$x\to\infty$ のとき $\frac{1}{x}$ は 0 に収束する：$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ ．よって，数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ は 0 に収束する：$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ．



数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$ のグラフ

終

$\boxed{\text{例}}$ 定数 a を底とする指数関数 a^x には，$a > 0$ かつ $a \neq 1$ という前提条件がある．例えば $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$ というような指数関数は考えない．

例 定数 a を底とする指数関数 a^x には，$a > 0$ かつ $a \neq 1$ という前提条件がある．例えば $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^x$ というような指数関数は考えない．しかし，数列 $\left\{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は考えられる．

$\boxed{\text{例}}$ 定数 a を底とする指数関数 a^x には，$a > 0$ かつ $a \neq 1$ という前提条件がある．例えば $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$ というような指数関数は考えない．しかし，数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は考えられる．

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1\ ,\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}\ ,\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\ ,\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}\ ,$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\ ,\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}\ ,\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}\ ,\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128}\ ,\ \cdots$$

であり，

$\boxed{\text{例}}$ 定数 a を底とする指数関数 a^x には，$a>0$ かつ $a \neq 1$ という前提条件がある．例えば $\left(-\frac{1}{2}\right)^x$ というような指数関数は考えない．しかし，数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は考えられる．

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1\ , \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}\ , \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\ , \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}\ ,$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\ , \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{1}{32}\ , \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}\ , \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^7 = -\frac{1}{128}\ , \ \cdots$$

であり，数列 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ は 0 に収束する：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$. $\boxed{\text{終}}$

無限数列 $\{a_n\}$ がどんな定数にも収束しないとき，$\{a_n\}$ は発散するという.

無限数列 $\{a_n\}$ が発散するとき，式 $\lim_{n \to \infty} a_n$ の値は無い.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x>K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき， $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき， $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

数列は関数なので，この関数の極限の定義を無限数列に適用する.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，変数 x の値を限りなく大きくしていくと $f(x)$ の値も限りなく大きくなるとき， $x \to \infty$ のとき $f(x)$ は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

と書き表す.

数列は関数なので，この関数の極限の定義を無限数列に適用する.

無限数列 $\{a_n\}$ について，自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと a_n の値も限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は正の無限大に発散するといい，

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$$

と書き表す.

例を挙げる：

$$\lim_{n\to\infty} n^3 = \infty \ , \qquad \lim_{n\to\infty} 2^n = \infty \ .$$

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，変数 x の値を限りなく大きくしていくと，$f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x > K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，変数 x の値を限りなく大きくしていくと，$f(x) < 0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき，$x \to \infty$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す.

数列は関数なので，この関数の極限の定義を無限数列に適用する.

変数 x の関数 $f(x)$ について，どんな実数 K に対しても $x>K$ である $f(x)$ の定義域の実数 x があり，変数 x の値を限りなく大きくしていくと，$f(x)<0$ でその絶対値 $|f(x)|$ が限りなく大きくなるとき，$x\to\infty$ のとき $f(x)$ は負の無限大に発散するといい，

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$$

と書き表す.

数列は関数なので，この関数の極限の定義を無限数列に適用する.

無限数列 $\{a_n\}$ について，自然数を表す変数 n の値を限りなく大きくしていくと，$a_n<0$ であってその絶対値 $|a_n|$ が限りなく大きくなるとき，数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

と書き表す.

数列について，発散するが ∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもないとき，振動するという．“振動する” というのは数列の極限に特有の言葉である；一般的な関数の極限では用いない．

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ を $a_n = (-2)^n$ と定める：

$$a_0 = 1\ , \quad a_1 = -2\ , \quad a_2 = 4\ , \quad a_3 = -8\ , \quad a_4 = 16\ , \quad a_5 = -32\ , \quad \cdots\ .$$

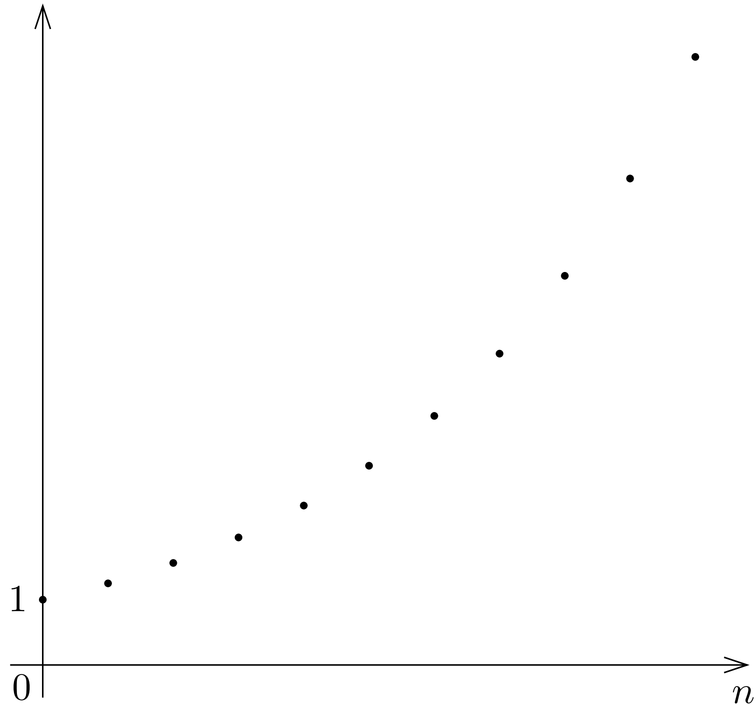
この数列は発散する（収束しない）が，∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもない．つまりこの数列は振動する． $\boxed{\text{終}}$

結局，無限数列の極限について次のように分類される：

$$\begin{cases} \text{収束する} = \text{唯一つの実数に限りなく近づく} = \text{極限値がある} \\ \text{収束しない} = \text{極限値がない} = \text{発散する} \begin{cases} \infty \text{ に発散する} \\ -\infty \text{ に発散する} \\ \text{それ以外（振動する）} \end{cases} \end{cases}.$$

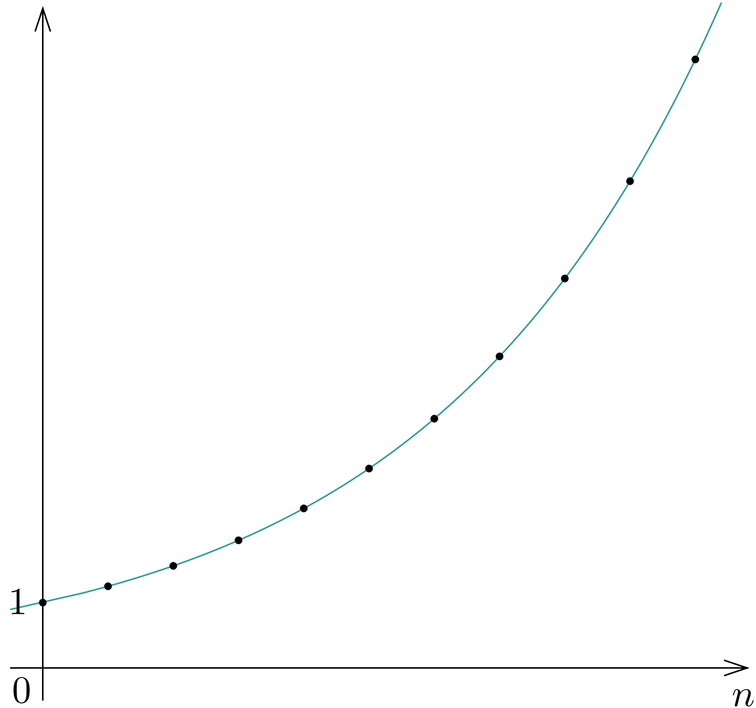
等比数列の極限を考える.

$\boxed{例}$ 公比が $\dfrac{5}{4}$ の等比数列 $\left\{\left(\dfrac{5}{4}\right)^n\right\}_{n\geqq 0}$ のグラフは右図のようになる．この等比数列は



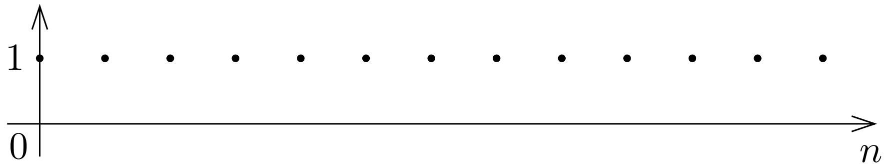
例 公比が $\frac{5}{4}$ の等比数列 $\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この等比数列は正の無限大に発散する：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n = \infty \ .$$

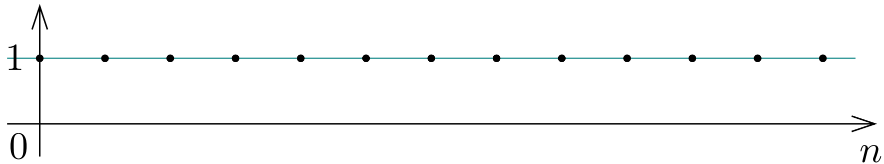


終

$\boxed{\text{例}}$ 公比が 1 の等比数列 $\{1^n\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる． この等比数列は



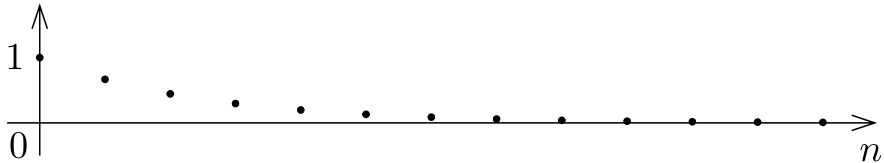
例 公比が 1 の等比数列 $\{1^n\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この等比数列は 1 に収束する：



$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1 \ .$$

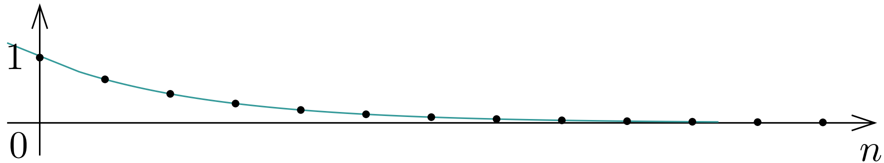
終

例 公比が $\dfrac{2}{3}$ の等比数列 $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この等比数列は



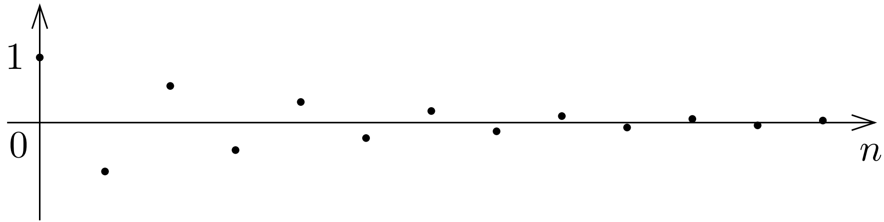
$\boxed{例}$ 公比が $\dfrac{2}{3}$ の等比数列 $\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この等比数列は 0 に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 .$$



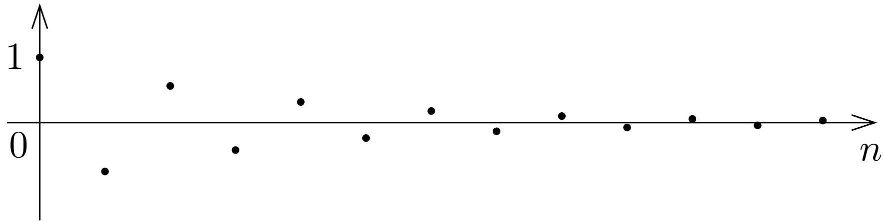
$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 公比が $-\dfrac{3}{4}$ の等比数列 $\left\{\left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この等比数列は



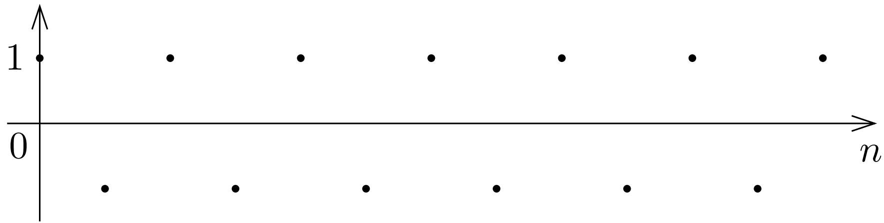
例 公比が $-\frac{3}{4}$ の等比数列 $\left\{\left(-\frac{3}{4}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この等比数列は 0 に収束する：

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0 \ .$$

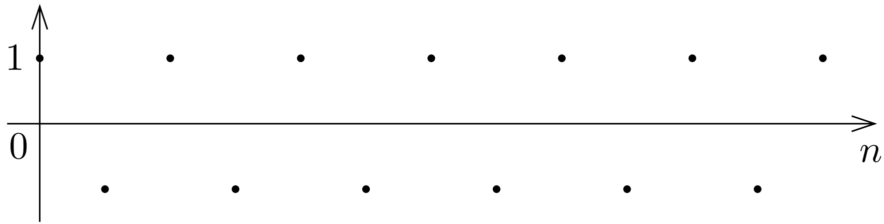


終

例 公比が -1 の等比数列 $\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この等比数列は

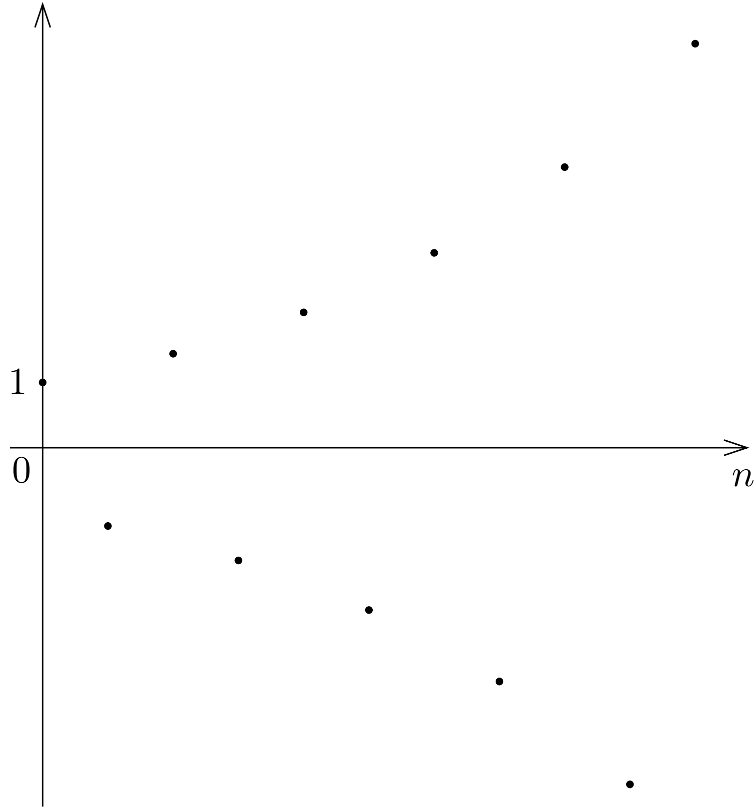


例 公比が -1 の等比数列 $\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この等比数列は発散するが，∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもない；つまりこの数列は振動する．

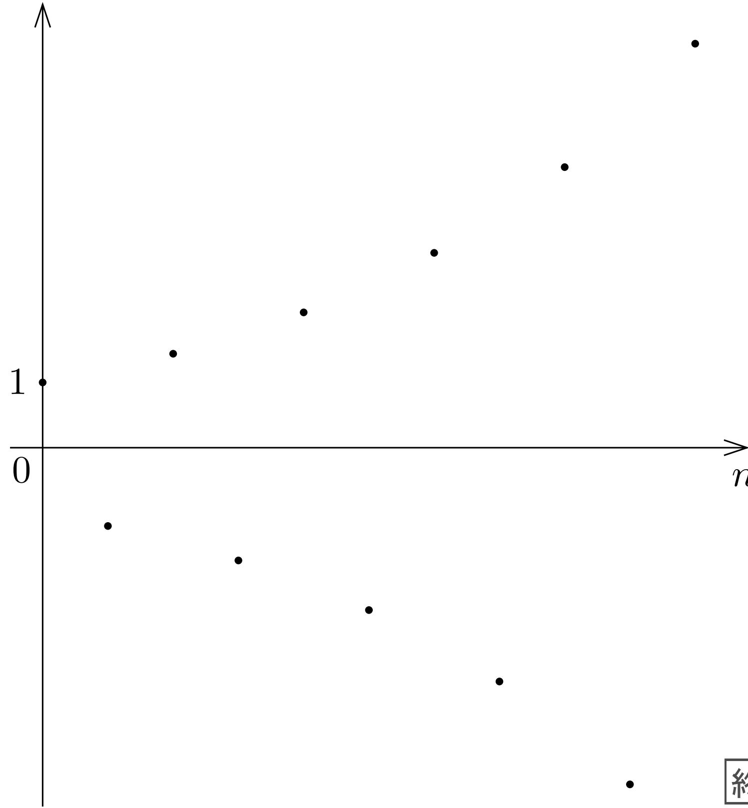


終

例 公比が $-\dfrac{6}{5}$ の等比数列 $\left\{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この数列は



$\boxed{\text{例}}$ 公比が $-\dfrac{6}{5}$ の等比数列 $\left\{\left(-\dfrac{6}{5}\right)^n\right\}_{n\geq 0}$ のグラフは右図のようになる．この数列は発散するが，∞ に発散するのでも $-\infty$ に発散するのでもない；つまりこの数列は振動する．



$\boxed{\text{終}}$

定理　定数 r を公比とする無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限は次のようになる：

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} r^n = \infty \ ;$$
$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} r^n = 1 \ ;$$
$$-1 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \ ;$$

$r \leq -1$ のとき，無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散するが，∞ にも $-\infty$ にも発散しない（振動する）.

無限数列の極限は関数の極限の一種なので，関数の極限値に関する定理の多くは数列の極限にも適用できる．

定理　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが収束するならば，

$$\lim_{x \to a}\{f(x) \pm g(x)\} = \left\{\lim_{x \to a} f(x)\right\} \pm \left\{\lim_{x \to a} g(x)\right\} \quad \text{（複号同順）},$$

$$\lim_{x \to a}\{f(x)g(x)\} = \left\{\lim_{x \to a} f(x)\right\}\left\{\lim_{x \to a} g(x)\right\}\ ;$$

$x \to a$ のとき $f(x)$ と $g(x)$ とが収束して $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ ならば，

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}\ .$$

この定理を数列の極限に適用する．

定理　無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束するならば,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \quad \text{（複号同順）},$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \ ;$$

$b_n \neq 0$ で，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束して $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \ .$$

定理　無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \pm \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \quad （複号同順）\quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \quad ;$$

$b_n \neq 0$ で，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とが収束して $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad .$$

この定理より，例えば次のことが導かれる：自然数を表わす変数 n と無関係な定数 k について，定数関である数列 $\{k\}$ の極限値は $\lim_{n\to\infty} k = k$ なので，無限数列 $\{a_n\}$ が収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + k) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + \lim_{n\to\infty} k = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) + k \quad ,$$

$$\lim_{n\to\infty}(k\, a_n) = \left(\lim_{n\to\infty} k\right) \lim_{n\to\infty} a_n = k \lim_{n\to\infty} a_n \quad .$$

定理　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるとする．定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ は収束してかつ極限値 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g\Bigl(\lim_{x\to a} f(x)\Bigr)\ .$$

この定理を無限数列の極限に適用する．

定理　関数 $f(x)$ と関数 $g(x)$ との合成関数 $g\bigl(f(x)\bigr)$ があるとする．定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x について $x \to a$ のとき $f(x)$ は収束してかつ極限値 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ において関数 g が連続であるならば，

$$\lim_{x\to a} g\bigl(f(x)\bigr) = g\Bigl(\lim_{x\to a} f(x)\Bigr)\ .$$

この定理を無限数列の極限に適用する．

定理　数列 $\{a_n\}$ の項は総て関数 f の定義域に属すとする．$\{a_n\}$ が収束してかつ極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ において関数 f が連続であるならば，

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\Bigl(\lim_{n\to\infty} a_n\Bigr)\ .$$

定理　定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x) = g(y)$ で，$x \to a$ のとき $y \to b$ ，$y \neq b$ とする．$y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{y \to b} g(y) \ .$$

この定理を無限数列の極限に適用する．

定理　定数 a と b とは実数または ∞ または $-\infty$ とする．変数 x の関数 $f(x)$ と変数 y の関数 $g(y)$ とについて，$f(x)=g(y)$ で，$x \to a$ のとき $y \to b$，$y \neq b$ とする．$y \to b$ のとき $g(y)$ が収束するならば，

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{y\to b} g(y) .$$

この定理を無限数列の極限に適用する．

定理　定数 a は実数または ∞ または $-\infty$ とする．自然数を表す変数 n 及び数列 $\{a_n\}$ と，変数 x の関数 $f(x)$ とについて，$a_n = f(x)$ で，$n \to \infty$ のとき $x \to a$，$x \neq a$ とする．$x \to a$ のとき $f(x)$ が収束するならば，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{x\to a} f(x) .$$

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\left\{\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}}-8\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

例 数列 $\left\{\sqrt{\frac{2n+5}{3}}-8\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

変数 x を $x=\frac{2n+5}{3}$ とおく. $\sqrt{\frac{2n+5}{3}}=\sqrt{x}$. $n\to\infty$ のとき

$x\to\infty$.

例 数列 $\left\{\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}}-8\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

変数 x を $x=\dfrac{2n+5}{3}$ とおく. $\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}}=\sqrt{x}$. $n\to\infty$ のとき $x\to\infty$. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$ なので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+5}{3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$,

例 数列 $\left\{\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}}-8\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

変数 x を $x=\dfrac{2n+5}{3}$ とおく. $\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}}=\sqrt{x}$. $n\to\infty$ のとき $x\to\infty$. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$ なので, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{2n+5}{3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$, よって

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+5}{3}}-8\right)=\infty .$$

例 数列 $\left\{\sqrt{\frac{2n+5}{3}}-8\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

変数 x を $x=\frac{2n+5}{3}$ とおく. $\sqrt{\frac{2n+5}{3}}=\sqrt{x}$. $n\to\infty$ のとき $x\to\infty$. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$ なので, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+5}{3}}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$, よって

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+5}{3}}-8\right)=\infty\ .$$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+5}{3}}=\infty$ は発散しているので $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{2n+5}{3}}-8\right)$ を $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+5}{3}}-8$ に変形しないこと. 終

$\boxed{問 4.7.1}$ 数列 $\left\{\dfrac{7}{\sqrt{n+3}}+4\right\}_{n\geq 0}$ について，収束するか発散するかを調べ，収束するならばその極限値を求めよ．

$\dfrac{7}{\sqrt{n+3}}+4=7(n+3)\qquad +4$ ． $\lim\limits_{n\to\infty}(n+3)\qquad =\qquad$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{\sqrt{n+3}}+4\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{7(n+3)\qquad +4\right\}=\qquad\qquad =\quad .$$

$\boxed{問 4.7.1}$ 数列 $\left\{\dfrac{7}{\sqrt{n+3}}+4\right\}_{n\geq 0}$ について，収束するか発散するかを調べ，収束するならばその極限値を求めよ．

$\dfrac{7}{\sqrt{n+3}}+4=7(n+3)^{-\frac{1}{2}}+4$ ． $\lim_{n\to\infty}(n+3)^{-\frac{1}{2}}=0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{\sqrt{n+3}}+4\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{7(n+3)^{-\frac{1}{2}}+4\right\}=7\cdot 0+4=4\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 数列 $\left\{7-\dfrac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n\geq 1}$ の極限を調べる.

$$7-\frac{5}{2^{n-3}}=7-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$$. 変数 m を $m=n-3$ とおく.

例 数列 $\left\{7-\dfrac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n\geq 1}$ の極限を調べる.

$7-\dfrac{5}{2^{n-3}}=7-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$. 変数 m を $m=n-3$ とおく. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}=$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m}$. $n\to\infty$ のとき $m\to\infty$.

$\boxed{例}$ 数列 $\left\{7-\dfrac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n\geq 1}$ の極限を調べる.

$7-\dfrac{5}{2^{n-3}}=7-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$. 変数 m を $m=n-3$ とおく. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m}$. $n\to\infty$ のとき $m\to\infty$. $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m}=0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m}=0\ .$$

例 数列 $\left\{7-\dfrac{5}{2^{n-3}}\right\}_{n\geq 1}$ の極限を調べる.

$7-\dfrac{5}{2^{n-3}}=7-5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$. 変数 m を $m=n-3$ とおく. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m}$. $n\to\infty$ のとき $m\to\infty$. $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m}=0$ なので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}=\lim_{m\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{m}=0$. よって

$$\lim_{n\to\infty}\left(7-\frac{5}{2^{n-3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{7-5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}=7-5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=7-5\cdot 0$$

$$=7\ .$$

終

$\boxed{問 4.7.2}$ 数列 $\left\{8-5\left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3}\right\}_{n\geq 1}$ の極限を調べよ.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3} =$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{8-5\left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3}\right\} = \qquad = \quad .$$

$\boxed{問 4.7.2}$ 数列 $\left\{8-5\left(-\dfrac{6}{7}\right)^{n-3}\right\}_{n\geq 1}$ の極限を調べよ.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3}=0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{8-5\left(-\frac{6}{7}\right)^{n-3}\right\}=8-5\cdot 0=8\ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}4.7.3}$ 数列 $\left\{\dfrac{8}{3^{n+2}}-4\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}=\qquad$$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3^{n+2}}-4\right)=\qquad\qquad=\qquad.$$

$\boxed{\text{問}4.7.3}$ 数列 $\left\{ \dfrac{8}{3^{n+2}} - 4 \right\}_{n \geq 0}$ の極限を調べよ.

$\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} = 0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{8}{3^{n+2}} - 4 \right) = 8 \cdot 0 - 4 = -4 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 数列 $\left\{\dfrac{3^{n+2}}{4^n}\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

例 数列 $\left\{\dfrac{3^{n+2}}{4^n}\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

$$\frac{3^{n+2}}{4^n} = \frac{3^2 3^n}{4^n} = 3^2\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad .$$

例 数列 $\left\{\dfrac{3^{n+2}}{4^n}\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

$$\frac{3^{n+2}}{4^n} = \frac{3^2 3^n}{4^n} = 3^2\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad . \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$ なので,

例 数列 $\left\{\dfrac{3^{n+2}}{4^n}\right\}_{n\geq 0}$ の極限を調べる.

$\dfrac{3^{n+2}}{4^n} = \dfrac{3^2 3^n}{4^n} = 3^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}}{4^n} = \lim_{n\to\infty}\left\{3^2\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\} = 3^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 3^2\cdot 0 = 0 \ .$$

終

$\boxed{問4.7.4}$ 数列 $\left\{\dfrac{5^n}{4^{n+3}}\right\}_{n\geq 0}$ 　　について，収束するか発散するかを調べ，収束するならばその極限値を求めなさい.

$\dfrac{5^n}{4^{n+3}} =$ 　　 $\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n =$ 　　 なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{4^{n+3}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\quad\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\} = \quad .$$

$\boxed{問4.7.4}$ 数列 $\left\{\dfrac{5^n}{4^{n+3}}\right\}_{n\geq 0}$ について，収束するか発散するかを調べ，収束するならばその極限値を求めなさい．

$\dfrac{5^n}{4^{n+3}} = \dfrac{1}{4^3}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ ． $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n = \infty$ なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{4^{n+3}} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4^3}\left(\frac{5}{4}\right)^n\right\} = \infty \ .$$

$\boxed{終}$

もう一つ定理を述べる（証明は省略する）.

定理　無限数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ とは収束するとする．これらの両方の定義域に属す任意の自然数 n について $a_n \geq b_n$ ならば， $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n$ ．