

4.8 級数

無限数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ を順に $+$ でつないだ形の式

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

を（無限）級数という；正確には次のように書き表す：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

無限数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ を順に $+$ でつないだ形の式

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

を（無限）級数という；正確には次のように書き表す：

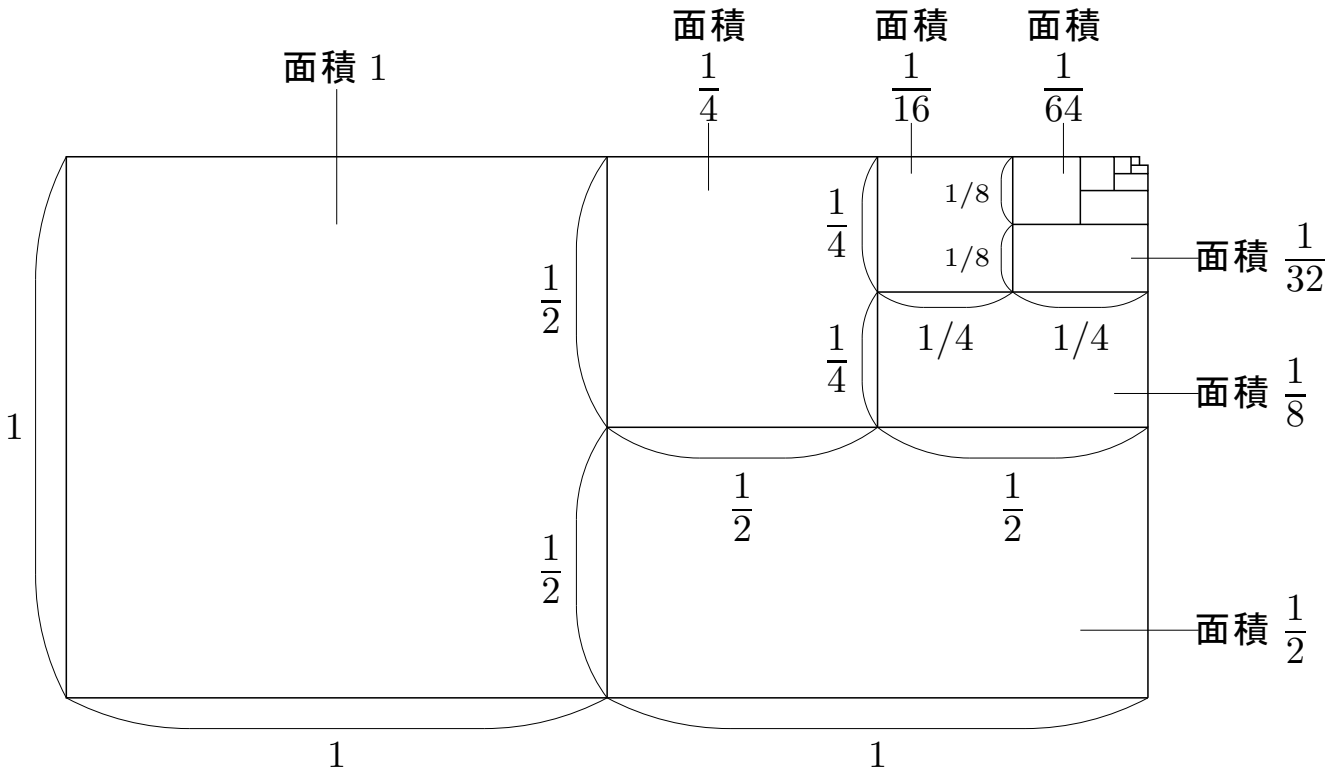
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

この（無限）級数では，無限個の項 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$ の値を合計することを表したい．しかし，無限個の値を合計することは実際にはできない．

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ つまり

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

を考える．次のように，面積が $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$ の正方形または長方形をくっつけていく．



このように正方形または長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

である。このように無限個の値を合計することはできない。

このように正方形または長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

である。このように無限個の値を合計することはできない。しかし、このような正方形または長方形を限りなくくっつけていくと、面積が 2 の長方形に限りなく近づいていく。

このように正方形または長方形をくっつけてできる図形の面積は

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

である。このように無限個の値を合計することはできない。しかし、このような正方形または長方形を限りなくくっつけていくと、面積が 2 の長方形に限りなく近づいていく。このことから次のように思える：

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 2 .$$

次のように考える.

次のように考える. $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ とおくと,

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n},$$

次のように考える. $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ とおくと,

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n},$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと $S = 2 - \frac{1}{2^n}$ なので,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

次のように考える. $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ とおくと,

$$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n},$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと $S = 2 - \frac{1}{2^n}$ なので,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

$n \rightarrow \infty$ のときの極限を考える:

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n} \right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

一般的に、無限数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して（無限）級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k .\end{aligned}$$

一般的に、無限数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して（無限）級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値を次のように定義する：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k .\end{aligned}$$

この極限值を級数の和という。

定義 自然数 m に対する値から始まる無限数列 $\{a_n\}_{n \geq m}$ に対して、数列 $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は収束するといい、数列 $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$ を級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ の値とする：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k .$$

定義 自然数 m に対する値から始まる無限数列 $\{a_n\}_{n \geq m}$ に対して、数列 $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は収束するといひ、数列

$\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$ を級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ の値とする：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k .$$

この極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$ を級数の和という.

定義 自然数 m に対する値から始まる無限数列 $\{a_n\}_{n \geq m}$ に対して、数列 $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は収束するといひ、数列 $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$ を級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ の値とする：

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k .$$

この極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$ を級数の和という。また、数列 $\left\{ \sum_{k=m}^n a_k \right\}_{n \geq m}$ が発散するとき、級数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ は発散するという。

つまり、例えば数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ があるときに

限り級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値があつて、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k .$$

極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$ がないときは級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の値もない。

例 級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$ の和を調べる.

例 級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$ の和を調べる.

級数の和の定義より
$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right) .$$

例 級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right)$. まず総和

$\sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right)$ を計算する.

例 級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right)$. まず総和

$\sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right)$ を計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right) &= \frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - \frac{5}{5} + \cdots + \frac{5}{n-1} - \frac{5}{n} + \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{5}{n+1}. \end{aligned}$$

例 級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right)$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right)$. まず総和

$\sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right)$ を計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right) &= \frac{5}{2} - \frac{5}{3} + \frac{5}{3} - \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - \frac{5}{5} + \cdots + \frac{5}{n-1} - \frac{5}{n} + \frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{5}{n+1}. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} = 0$ なので,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5}{n} - \frac{5}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{5}{k} - \frac{5}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{n+1} \right) = \frac{5}{2}. \quad \boxed{\text{終}}$$

問4.8.1 級数 $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right)$ の和を調べよ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \left(\frac{6}{k} - \frac{6}{k+1} \right) &= \\ &= \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n+1} =$ なので,

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \left(\quad \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\quad \right) \\ &= \end{aligned}$$

問4.8.1 級数 $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right)$ の和を調べよ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \left(\frac{6}{k} - \frac{6}{k+1} \right) &= \frac{6}{3} - \frac{6}{4} + \frac{6}{4} - \frac{6}{5} + \cdots + \frac{6}{n-1} - \frac{6}{n} + \frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \\ &= 2 - \frac{6}{n+1}. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n+1} = 0$ なので,

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \left(\frac{6}{k} - \frac{6}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{6}{n+1} \right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

問4.8.1 級数 $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right)$ の和を調べよ.

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n \left(\frac{6}{k} - \frac{6}{k+1} \right) &= \frac{6}{3} - \frac{6}{4} + \frac{6}{4} - \frac{6}{5} + \cdots + \frac{6}{n-1} - \frac{6}{n} + \frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \\ &= 2 - \frac{6}{n+1}. \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n+1} = 0$ なので,

$$\begin{aligned} \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{6}{n} - \frac{6}{n+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=3}^n \left(\frac{6}{k} - \frac{6}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{6}{n+1} \right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

終

実数の定数 a, r 及び自然数の定数 m に対して, 等比数列 $\{ar^n\}_{n \geq m}$ からできる級数 $\sum_{n=m}^{\infty} (ar^n)$ を等比級数という.

例 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

例 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$.

例 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$. まず総和

$\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する.

例 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$. まず総和

$\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する. $S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ とおく.

例 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$. まず総和

$\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する. $S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ とおく.

$$S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n,$$

$$\frac{3}{5} S_n = 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1};$$

例 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$. まず総和

$\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する. $S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ とおく.

$$S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n,$$

$$\frac{3}{5} S_n = 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1};$$

この2個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$\frac{2}{5} S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} - 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1},$$

例 等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$. まず総和 $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ を計算する. $S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\}$ とおく.

$$S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n,$$

$$\frac{3}{5} S_n = 4 \left(\frac{3}{5} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^3 + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^4 + \cdots + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n + 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1};$$

この2個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$\frac{2}{5} S_n = 4 \cdot \frac{3}{5} - 4 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1},$$

よって $S_n = 6 - 10 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}$ つまり $\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} = 6 - 10 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}$.

$$\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} = 6 - 10 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} = 6 - 10 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} = 0$ **なので,**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ 4 \left(\frac{3}{5} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 6 - 10 \left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} \right\} = 6 - 10 \cdot 0 \\ &= 6 . \end{aligned}$$

終

問4.8.2 等比級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} . \quad S_n = \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S_n = \quad ,$$

$$\frac{2}{3} S_n = \quad ,$$

$$\frac{1}{3} S_n = \quad , \quad S_n = \quad , \quad \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} = \quad .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} = \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 10 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \quad \right\} = \\ &= \quad . \end{aligned}$$

問4.8.2 等比級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} . \quad S_n = \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S_n = \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \frac{64}{81} + \cdots + 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n ,$$

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \frac{64}{81} + \cdots + 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n + 6 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} ,$$

$$\frac{1}{3} S_n = \frac{8}{3} - 6 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} , \quad S_n = 8 - 18 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} , \quad \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} = 8 - 18 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} = \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 10 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \quad \quad \quad \right\} = \\ &= \quad . \end{aligned}$$

問4.8.2 等比級数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} . \quad S_n = \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} \quad \text{とおく.}$$

$$S_n = \frac{8}{3} + \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \frac{64}{81} + \cdots + 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n ,$$

$$\frac{2}{3} S_n = \frac{16}{9} + \frac{32}{27} + \frac{64}{81} + \cdots + 6 \left(\frac{2}{3} \right)^n + 6 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} ,$$

$$\frac{1}{3} S_n = \frac{8}{3} - 6 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} , \quad S_n = 8 - 18 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} , \quad \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} = 8 - 18 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 10 \left(\frac{3}{5} \right)^n \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \left\{ 6 \left(\frac{2}{3} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 8 - 18 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \right\} = 8 - 18 \cdot 0 \\ &= 8 . \end{aligned}$$

終

例 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

例 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$.

例 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$. まず総和

$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$ を計算する.

例 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$. まず総和

$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$ を計算する.

等比数列の項の総和の公式を用いる : 正の自然数 n 及び実数 a 及び実数 r について, $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} .$$

例 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$. まず総和

$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$ を計算する.

等比数列の項の総和の公式を用いる: 正の自然数 n 及び実数 a 及び実数 r について, $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\} = \underbrace{3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^3 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n}_{\text{最初の項が } 3 \text{ で公比が } \frac{5}{7} \text{ で項数が } n+1} = \frac{3 \left\{ 1 - \left(\frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{5}{7}}$$

例 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$. まず総和

$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\}$ を計算する.

等比数列の項の総和の公式を用いる: 正の自然数 n 及び実数 a 及び実数 r について, $r \neq 1$ のとき

$$\underbrace{a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1}}_{\text{最初の項が } a \text{ で公比が } r \text{ で項数が } n} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}.$$

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\} = 3 + 3 \cdot \frac{5}{7} + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^2 + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^3 + \cdots + 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n = \frac{3 \left\{ 1 - \left(\frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{5}{7}}$$

$$= \frac{21}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\}.$$

等比数列の項の総和の公式より

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\} = \frac{21}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\} .$$

等比数列の項の総和の公式より

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\} = \frac{21}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\} .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{7} \right)^{n+1} = 0$ なので,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^n \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{5}{7} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{21}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{5}{7} \right)^{n+1} \right\} \right] = \frac{21}{2} (1 - 0) \\ &= \frac{21}{2} . \end{aligned}$$

終

問4.8.3 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^k \right\} = \quad .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} = \quad \text{なので,}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\quad \right] = \quad .$$

問4.8.3 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^k \right\} = \frac{3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{2}{5}} = 5 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right\} .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} = \quad \text{なので,}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\quad \right] = \quad .$$

問4.8.3 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^k \right\} = \frac{3 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{2}{5}} = 5 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right\} .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} = 0$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^k \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[5 \left\{ 1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right\} \right] = 5 .$$

終

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ と定める.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ と定める. 正の自然数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ と定める. 正の自然数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n .$$

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ と定める. 正の自然数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n .$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定する. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の和 S がある.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ と定める. 正の自然数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n .$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定する. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の和 S がある.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S .$$

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ に対して, $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ と定める. 正の自然数 n に対して,

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n ,$$

$$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} ;$$

これら 2 個の等式の左辺どうし右辺どうし引くと

$$S_n - S_{n-1} = a_n .$$

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束すると仮定する. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の和 S がある.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S .$$

従って更に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S .$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ , } \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S \text{ .}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \right) = S - S = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \right) = S - S = 0.$$

故に、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S.$$

$a_n = S_n - S_{n-1}$ なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \right) - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \right) = S - S = 0.$$

故に、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

定理 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について、級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は 0 に収束する.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について,

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は 0 に収束する.

この対偶をとると次のことが分かる:

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が 0 に収束しないならば 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について,

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は 0 に収束する.

この対偶をとると次のことが分かる:

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が 0 に収束しないならば 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が 0 に収束しないのは次の二つの場合がある:

- (1) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は収束しないつまり発散する;
- (2) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は収束するけれど $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について,

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は 0 に収束する.

この対偶をとると次のことが分かる:

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が 0 に収束しないならば級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が 0 に収束しないのは次の二つの場合がある:

- (1) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は収束しないつまり発散する;
- (2) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は収束するけれど $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

このどちらの場合も級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しないつまり発散する.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について,

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は 0 に収束する.

この対偶をとると次のことが分かる:

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が 0 に収束しないならば 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しない.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が 0 に収束しないのは次の二つの場合がある:

- (1) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は収束しないつまり発散する;
- (2) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ は収束するけれど $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

このどちらの場合も級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しないつまり発散する.

定理

- (1) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が発散するならば, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.
- (2) 数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ならば, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ が収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ ならば, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する.

しかし, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ でも級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとは限らない; $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

でも級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散することがある.

例 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$ の和を調べる.

例 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$ の和を調べる.

公比 $\frac{6}{5}$ の等比数列 $\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は発散するので, 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{5}\right)^n$ は発散する.

問4.8.4 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{6}\right)^n$ の和を調べよ.

問4.8.4 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{6}\right)^n$ の和を調べよ.

公比 $-\frac{7}{6}$ の等比数列 $\left\{\left(-\frac{7}{6}\right)^n\right\}_{n \geq 0}$ は発散するので, 等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{6}\right)^n$ は発散する.

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1} \right)$ の和を調べる.

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$ の和を調べる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) = 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 5 - 0 = 5 .$$

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$ の和を調べる.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 \quad \text{なので,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) = 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 5 - 0 = 5 .$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right) \neq 0$ なので, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(5 - \frac{3}{n+1}\right)$ は発散する. 終

問4.8.5 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{n^2+3} - 7 \right)$ の和を調べよ.

問4.8.5 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{n^2+3} - 7 \right)$ の和を調べよ.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^2+3} = 0$ なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{n^2+3} - 7 \right) = 0 - 7 = -7$. よって

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{n^2+3} - 7 \right) \neq 0$ なので, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{n^2+3} - 7 \right)$ は発散する.

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$.

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$. まず $\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$ を計算する.

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$. まず $\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$ を計算する.

$$\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} = \underbrace{5 + 5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n}_{\text{最初の項が } 5 \text{ で公比が } \frac{1}{3} \text{ で項数が } n+1} = \frac{5 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{1}{3}}$$

最初の項が 5 で公比が $\frac{1}{3}$ で項数が $n+1$

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$. まず $\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$ を計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} &= 5 + 5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{15}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) . \end{aligned}$$

例 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$ の和を調べる.

級数の和の定義より $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$. まず $\sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k}$ を計算する.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} &= 5 + 5 \cdot \frac{1}{3} + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \cdots + 5 \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{5 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{15}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) . \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{5}{3^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{15}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}} \right) \right\} = \frac{15}{2} .$$

終

問4.8.6 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$ の和を調べよ.

$$\sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} =$$

.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{n+1}} = \quad \text{なので,}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \quad \quad \quad \right\} = \quad .$$

問4.8.6 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$ の和を調べよ.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} &= \sum_{k=0}^n \left\{ 6 \left(\frac{1}{4} \right)^k \right\} = \frac{6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right\}}{\frac{3}{4}} \\ &= 8 \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) .\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{n+1}} = \quad \text{なので,}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \quad \quad \quad \right\} = \quad .$$

問4.8.6 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n}$ の和を調べよ.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} &= \sum_{k=0}^n \left\{ 6 \left(\frac{1}{4} \right)^k \right\} = \frac{6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right\}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{6 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right\}}{\frac{3}{4}} \\ &= 8 \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) .\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{n+1}} = 0$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{6}{4^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 8 \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) \right\} = 8 .$$

終

正の自然数 n 及び実数 a 及び 1 以外の実数 r について,

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} ;$$

次の定理があった：定数 r を公比とする無限等比数列 $\{r^n\}$ について、

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty ;$$

$$r = 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1 ;$$

$$-1 < r < 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 ;$$

$r \leq -1$ のとき、無限等比数列 $\{r^n\}$ は発散するが、 ∞ にも $-\infty$ にも発散しない（振動する）。

正の自然数 n 及び実数 a 及び 1 以外の実数 r について,

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} ;$$

$-1 < r < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ar^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{a(1 - 0)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} .$$

正の自然数 n 及び実数 a 及び 1 以外の実数 r について,

$$\sum_{k=0}^n (ar^k) = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r};$$

$-1 < r < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ なので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (ar^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} = \frac{a(1 - 0)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}.$$

このようにして次の定理が導かれる.

定理 最初の項が a で公比が r である無限等比数列に対する級数は, $|r| < 1$ のとき収束して

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (ar^n) = \frac{a}{1 - r},$$

$|r| \geq 1$ かつ $a \neq 0$ のとき発散する.

例 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \left(\frac{3}{7} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

例 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \left(\frac{3}{7} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

等比数列 $\left\{ 2 \left(\frac{3}{7} \right)^n \right\}_{n \geq 1}$ の公比 $\frac{3}{7}$ について $\left| \frac{3}{7} \right| < 1$ なのでこの級数は収束する.

例 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \left(\frac{3}{7} \right)^n \right\}$ の和を調べる.

等比数列 $\left\{ 2 \left(\frac{3}{7} \right)^n \right\}_{n \geq 1}$ の公比 $\frac{3}{7}$ について $\left| \frac{3}{7} \right| < 1$ なのでこの級数は収束する.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \left(\frac{3}{7} \right)^n \right\} &= \frac{6}{7} + \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{6}{7} \left(\frac{3}{7} \right)^2 + \frac{6}{7} \left(\frac{3}{7} \right)^3 + \frac{6}{7} \left(\frac{3}{7} \right)^4 + \cdots = \frac{\frac{6}{7}}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{6}{4} \\ &= \frac{3}{2} . \end{aligned}$$

終

問4.8.7 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べよ.

問4.8.7 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\}$ の和を調べよ.

等比数列 $\left\{ 2 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\}_{n \geq 1}$ の公比 $\frac{2}{5}$ について $\left| \frac{2}{5} \right| < 1$ なのでこの級数は収束する.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 3 \left(\frac{2}{5} \right)^n \right\} = \frac{6}{5} + \frac{6}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{6}{5} \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \frac{6}{5} \left(\frac{2}{5} \right)^3 + \cdots = \frac{\frac{6}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{6}{3} = 2 .$$

級数について次の定理が成り立つ.

定理 定数 c 及び数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ について, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するならば,

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n)$ も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ca_n) = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n .$$

数列 $\{a_n\}_{n \geq 0}$ と $\{b_n\}_{n \geq 0}$ とについて, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ とが収束する

ならば, 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ も収束して

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (\text{複号同順}) .$$