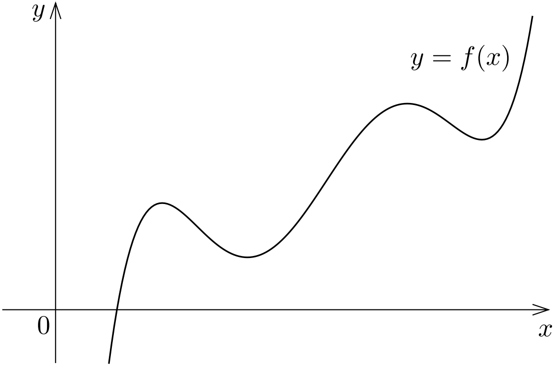
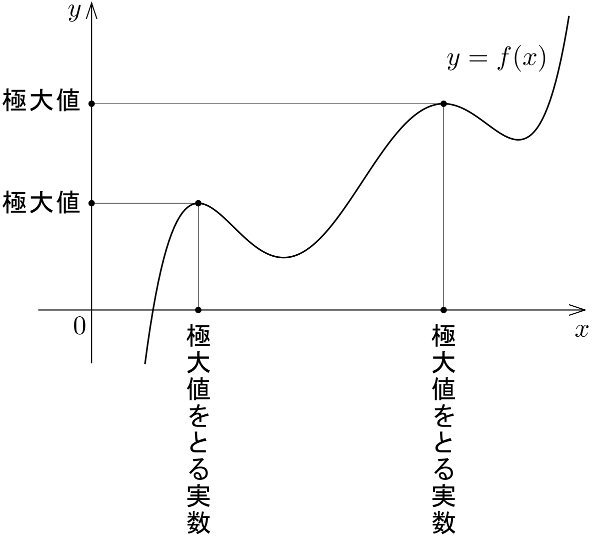
5.1 関数の極値

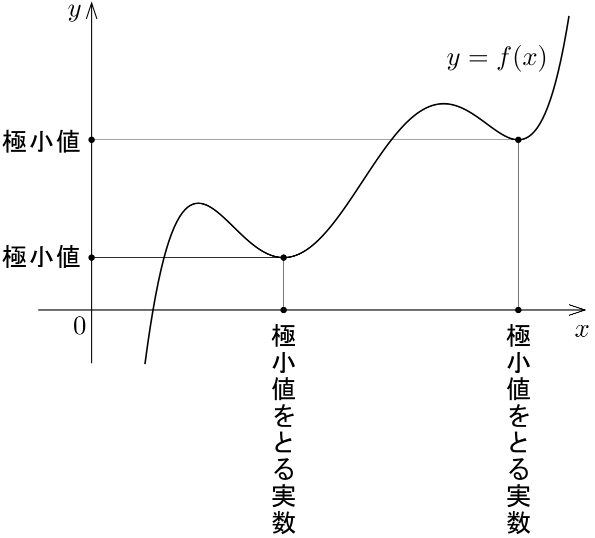
実数 p のすぐ近くの各実数は関数 f の定義域に属すとする.



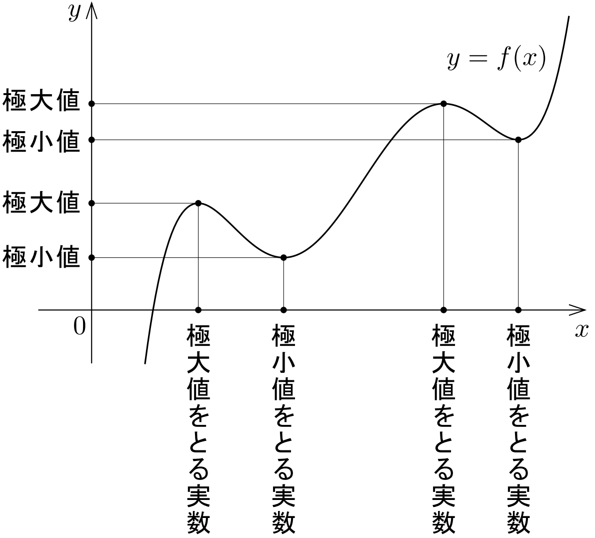
実数 p のすぐ近くの各実数は関数 f の定義域に属すとする．f が p において極大値をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最大になることである．



　実数 p のすぐ近くの各実数は関数 f の定義域に属すとする．f が p において極大値をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最大になることである．f が p において極小値をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最小になることである．



実数 p のすぐ近くの各実数は関数 f の定義域に属すとする．f が p において極大値をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最大になることである．f が p において極小値をとるというのは，p のすぐ近くだけをみると f の値が p で最小になることである．

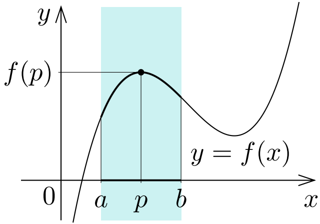


正確な定義を述べる.

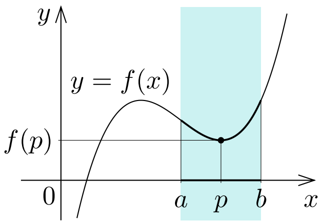
　正確な定義を述べる．関数 f 及び実数 p について，f が p において極大値をとるとは次の条件が成り立つことである：$a < p < b$ である実数 a, b を適切に選ぶと，$a < x < b$ である各実数 x について $f(p) \geq f(x)$ ．

正確な定義を述べる．関数 f 及び実数 p について，f が p において極大値をとるとは次の条件が成り立つことである：$a < p < b$ である実数 a, b を適切に選ぶと，$a < x < b$ である各実数 x について $f(p) \geq f(x)$ ．f が p において極小値をとるとは次の条件が成り立つことである：$a < p < b$ である実数 a, b を適切に選ぶと，$a < x < b$ である各実数 x について $f(p) \leq f(x)$ ．

正確な定義を述べる．関数 f 及び実数 p について，f が p において極大値をとるとは次の条件が成り立つことである：$a<p<b$ である実数 a,b を適切に選ぶと，$a<x<b$ である各実数 x について $f(p) \geq f(x)$ ．f が p において極小値をとるとは次の条件が成り立つことである：$a<p<b$ である実数 a,b を適切に選ぶと，$a<x<b$ である各実数 x について $f(p) \leq f(x)$ ．



f が p において極大値をとる．
水色の部分だけを考えると f は p において最大値をとる．



f が p において極小値をとる．
水色の部分だけを考えると f は p において最小値をとる．

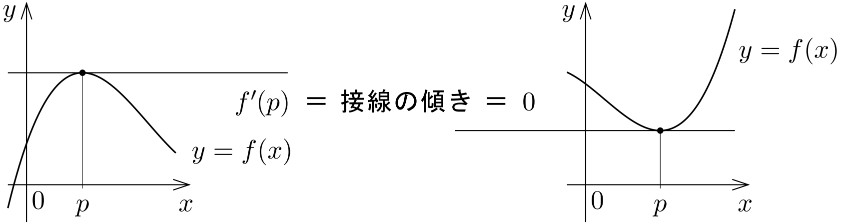
極大値と極小値を併せて極値という.

極大値と極小値を併せて極値という.

関数の最大値・最小値はあるとしても 1 つだけである. 関数の極大値・極小値は, 数多くあることがあるし, 一つもないこともある.

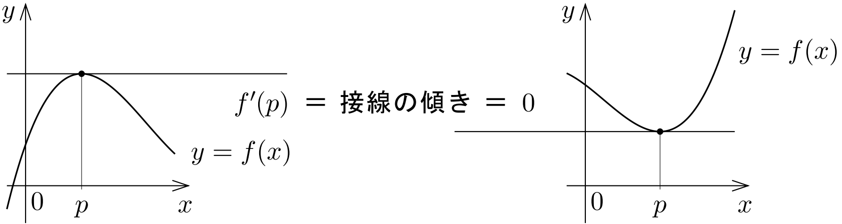
実数 p において微分可能である関数 f の微分係数 $f'(p)$ は f のグラフの点 $\big(p, f(p)\big)$ における接線の傾きである.

実数 p において微分可能である関数 f の微分係数 $f'(p)$ は f のグラフの点 $\bigl(p, f(p)\bigr)$ における接線の傾きである．関数のグラフにおいて，関数が極値をとるところで，接線は“水平”である，つまり接線の傾きは 0 である．



関数 f が実数 p において極値をとるときのグラフの状態

実数 p において微分可能である関数 f の微分係数 $f'(p)$ は f のグラフの点 $(p, f(p))$ における接線の傾きである．関数のグラフにおいて，関数が極値をとるところで，接線は“水平”である，つまり接線の傾きは 0 である．



関数 f が実数 p において極値をとるときのグラフの状態

このように考えると次の定理が分かる．

定理　関数 f が実数 p において微分可能であるとき，f が p において極値をとるならば $f'(p) = 0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ より

$$f'(x) = 3x^2-6x-9 \ .$$

実数 p において f が極値をとるとすると， $f'(p)=0$ なので，

関数 f が実数 p において微分可能であるとき，f が p において極値をとるならば $f'(p)=0$.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$f(x)=x^3-3x^2-9x+20$ より

$$f'(x) = 3x^2-6x-9\ .$$

実数 p において f が極値をとるとすると， $f'(p)=0$ なので，

$$3p^2-6p-9=0\ ,$$

$$3(p+1)(p-3)=0\ ,$$

$$p=3 \text{ または } p=-1\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \ .$$

実数 p において f が極値をとるとすると，$f'(p) = 0$ なので，

$$3p^2 - 6p - 9 = 0 \ ,$$

$$3(p+1)(p-3) = 0 \ ,$$

$$p = 3 \text{ または } p = -1 \ .$$

関数 f には異なる 2 個の極値があるので，f は 3 と -1 とにおいて極値をとる．

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \ .$$

実数 p において f が極値をとるとすると，$f'(p) = 0$ なので，

$$3p^2 - 6p - 9 = 0 \ ,$$

$$3(p+1)(p-3) = 0 \ ,$$

$$p = 3 \ \text{または}\ p = -1 \ .$$

関数 f には異なる 2 個の極値があるので，f は 3 と -1 とにおいて極値をとる．$f(-1) = 25$ ．$f(3) = -7$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求める．

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 20$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 \ .$$

実数 p において f が極値をとるとすると，$f'(p) = 0$ なので，

$$3p^2 - 6p - 9 = 0 \ ,$$

$$3(p+1)(p-3) = 0 \ ,$$

$$p = 3 \ \text{または} \ p = -1 \ .$$

関数 f には異なる 2 個の極値があるので，f は 3 と -1 とにおいて極値をとる．$f(-1) = 25$ ．$f(3) = -7$ ．関数 f の極値は 25 と -7 との 2 個である $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ と定める．この関数 f には異なる 2 つの極値がある．その 2 個の極値を求めよ．

$f'(x) =$ ．実数 p において f が極値をとるとすると，$f'(p) = 0$ なので，$= 0$ ，$(\quad)(\quad) = 0$ ，$p =$ または $p =$ ．

$f(\ ) =$ と $f\left(\quad\right) =$ 以外に f の極値は無い．f には異なる 2 個の極値があるので，2 個の極値は と とである．

$\boxed{問5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求めよ．

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$ ．実数 p において f が極値をとるとすると， $f'(p) = 0$ なので， $3p^2 - 4p - 4 = 0$ ， $(\qquad)(\qquad) = 0$ ， $p = \qquad$ または $p = \qquad$ ．

$f(\ ) = \qquad$ と $f\left(\qquad\right) = \qquad$ 以外に f の極値は無い． f には異なる 2 個の極値があるので， 2 個の極値は $\qquad$ と $\qquad$ とである．

$\boxed{問 5.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ と定める．この関数 f には異なる 2 個の極値がある．その 2 個の極値を求めよ．

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$ ．実数 p において f が極値をとるとすると，$f'(p) = 0$ なので，$3p^2 - 4p - 4 = 0$ ，$(3p+2)(p-2) = 0$ ，$p = 2$ または $p = -\dfrac{2}{3}$ ．$f(2) = -8$ と $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{40}{27}$ 以外に f の極値は無い．f には異なる 2 個の極値があるので，2 個の極値は -8 と $\dfrac{40}{27}$ とである． $\boxed{終}$