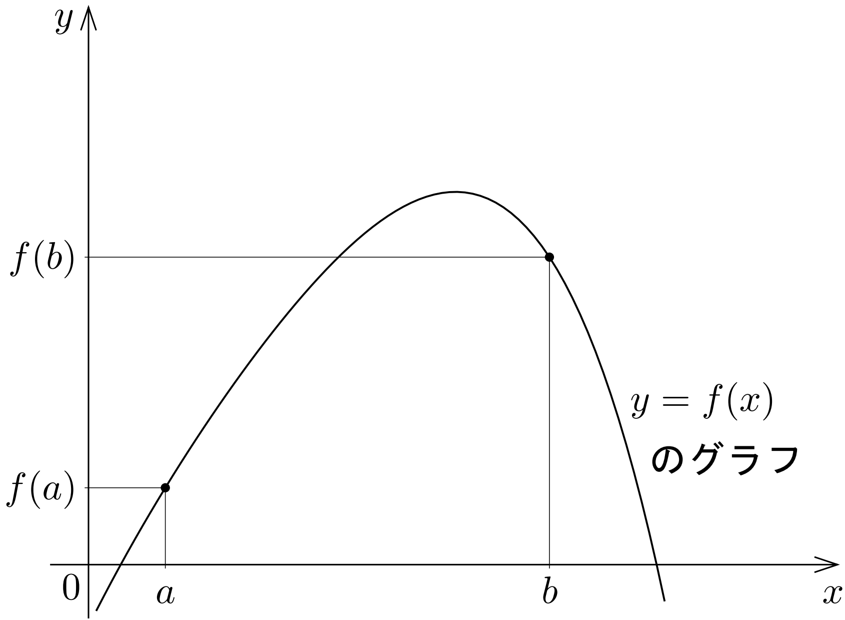
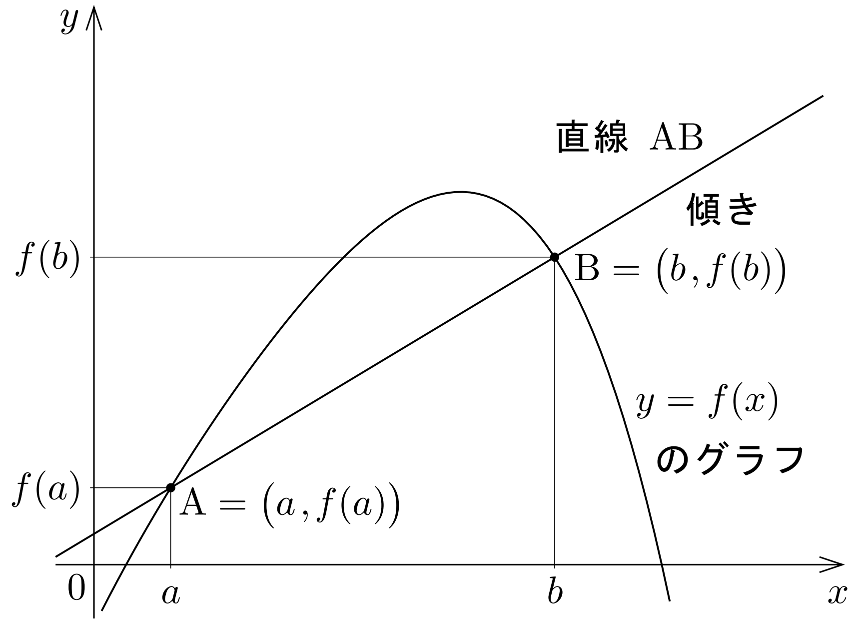
5.2 平均値の定理

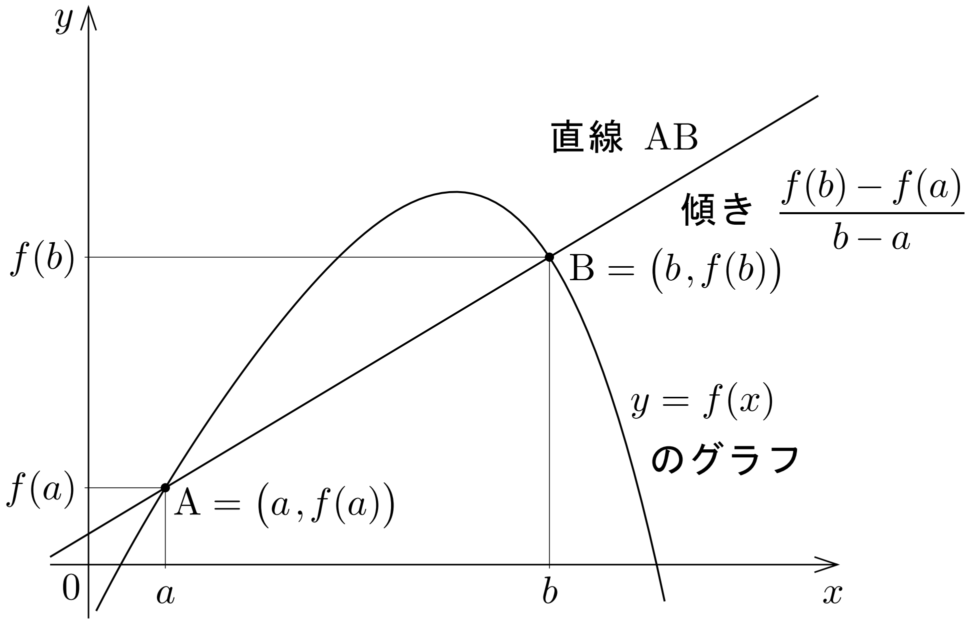
実数 a と b とについて $a < b$ で，関数 f は区間 $[a,b]$ において微分可能であるとする．



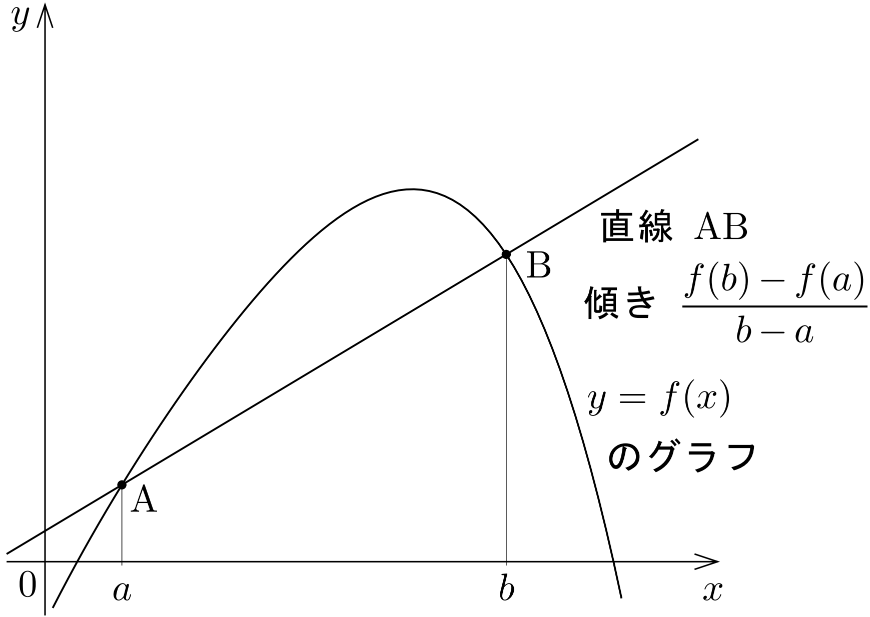
実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f は区間 $[a,b]$ において微分可能であるとする．xy 座標平面において，関数 f のグラフに属す異なる 2 点 $\mathrm{A}=\bigl(a,f(a)\bigr)$ と $\mathrm{B}=\bigl(b,f(b)\bigr)$ とが属す直線 AB の傾きは　　　　　　　である．



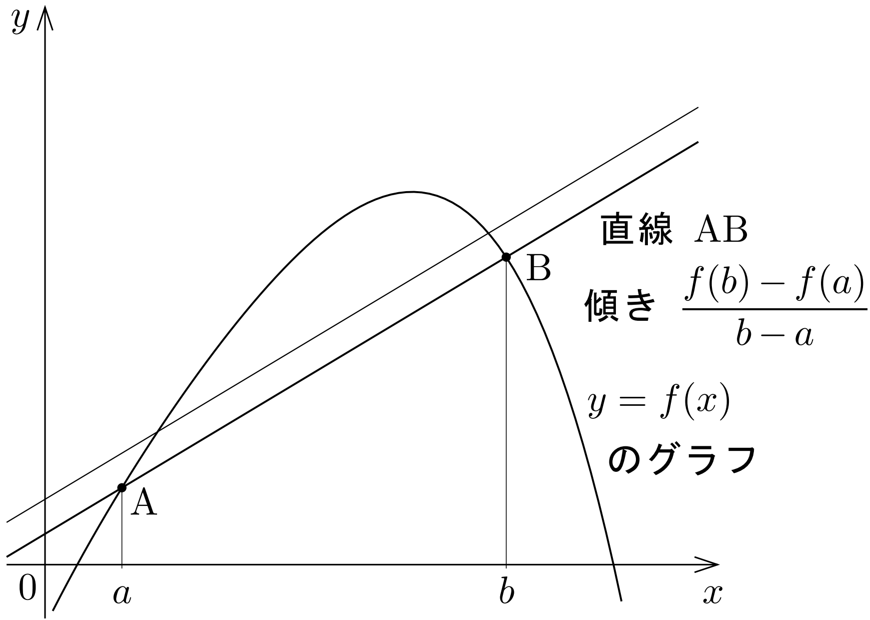
実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f は区間 $[a,b]$ において微分可能であるとする．xy 座標平面において，関数 f のグラフに属す異なる 2 点 $\mathrm{A}=\bigl(a,f(a)\bigr)$ と $\mathrm{B}=\bigl(b,f(b)\bigr)$ とが属す直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ である．



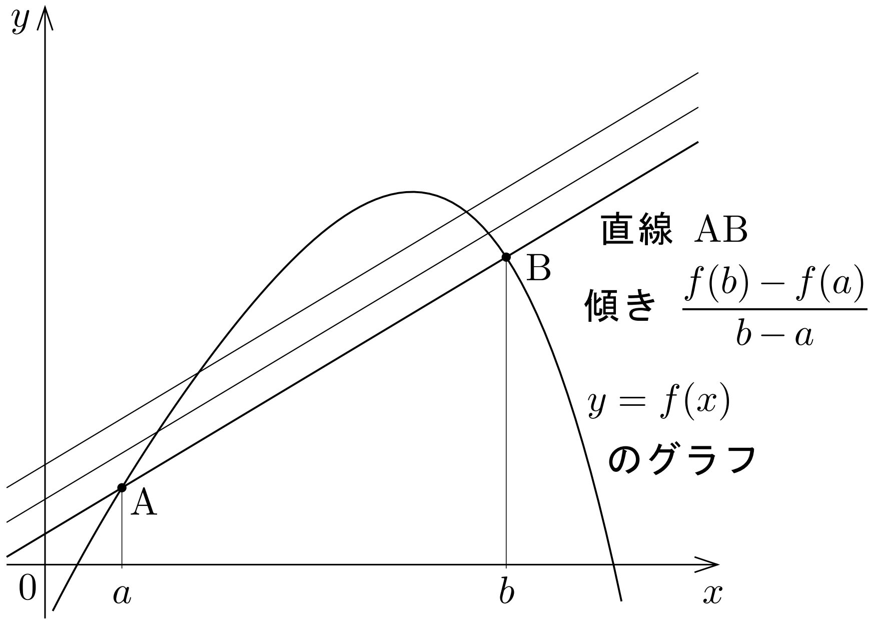
直線 AB に平行な直線を色々考える.



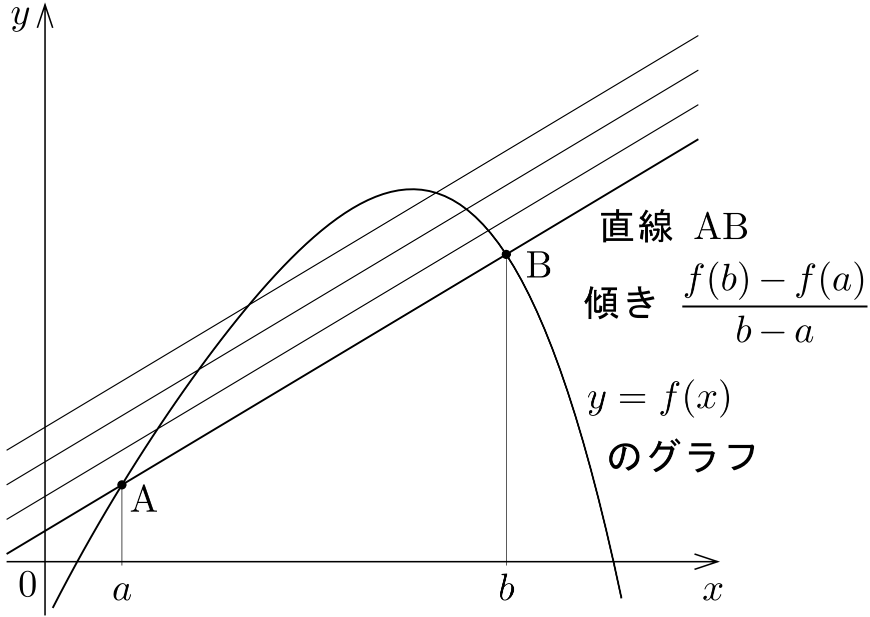
直線 AB に平行な直線を色々考える.



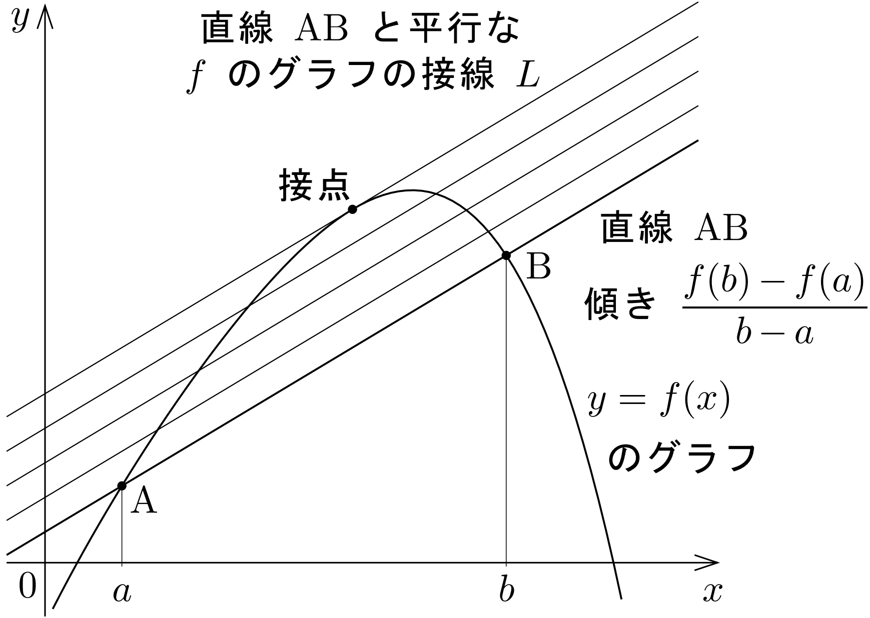
直線 AB に平行な直線を色々考える.



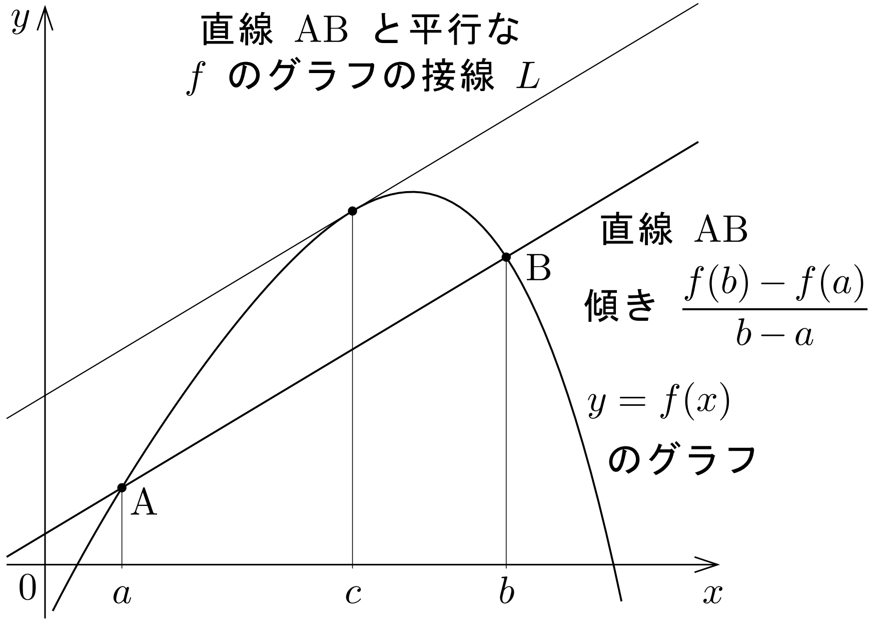
直線 AB に平行な直線を色々考える.



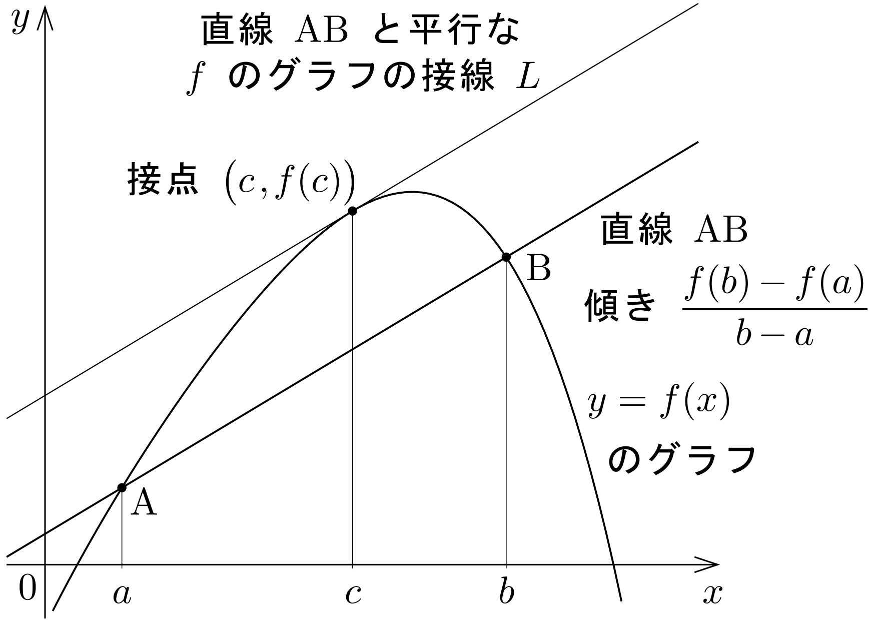
直線 AB に平行な直線を色々考えると，それらの中に f のグラフの接線 L がある.



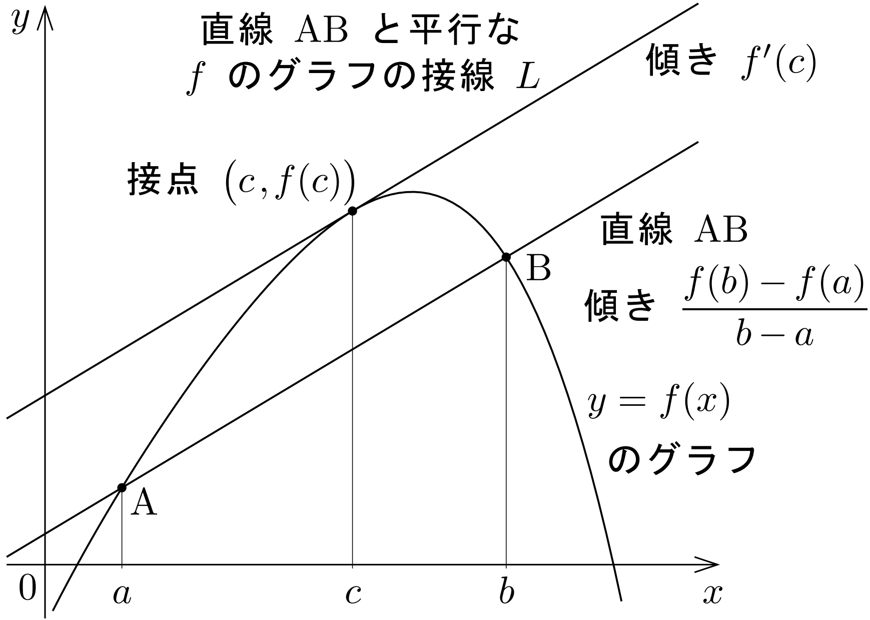
直線 AB に平行な直線を色々考えると，それらの中に f のグラフの接線 L がある．f のグラフとその接線 L との接点の x 座標を c とおく．



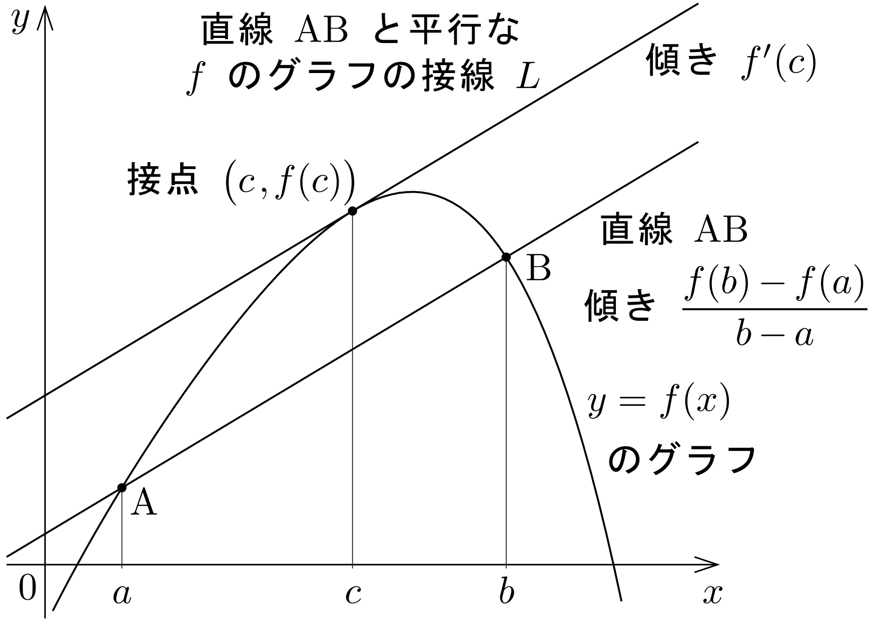
直線 AB に平行な直線を色々考えると，それらの中に f のグラフの接線 L がある．f のグラフとその接線 L との接点の x 座標を c とおく．接点の座標は $(c, f(c))$ である．



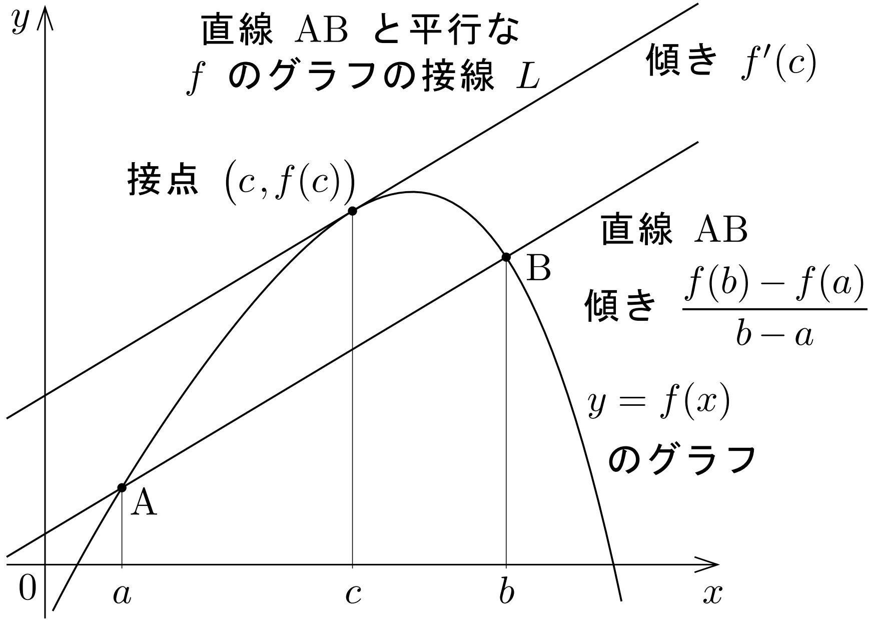
f のグラフの接線 L の接点の x 座標を c とおく. f のグラフの点 $\bigl(c, f(c)\bigr)$ における接線 L の傾きは, c における f の微分係数 $f'(c)$ である.



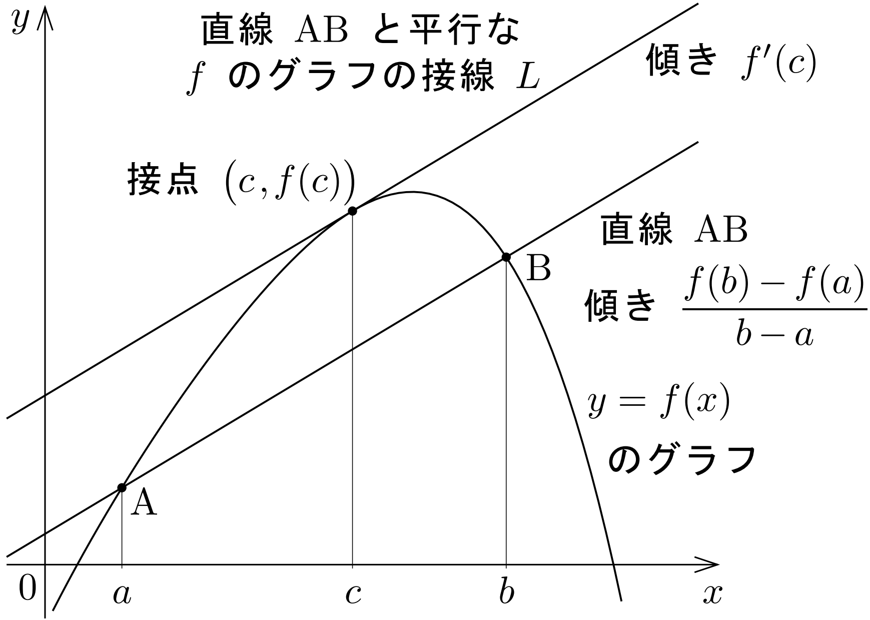
f のグラフの接線 L の接点の x 座標を c とおく．f のグラフの点 $\bigl(c, f(c)\bigr)$ における接線 L の傾きは，c における f の微分係数 $f'(c)$ である．直線 AB と接線 L とは平行なので，直線 AB の傾き $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ と接線 L の傾き $f'(c)$ とは等しい：$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ ；



f のグラフの接線 L の接点の x 座標を c とおく．f のグラフの点 $\big(c,f(c)\big)$ における接線 L の傾きは，c における f の微分係数 $f'(c)$ である．直線 AB と接線 L とは平行なので，直線 AB の傾き $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ と接線 L の傾き $f'(c)$ とは等しい：$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ ；よって $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ ．



f のグラフの接線 L の接点の x 座標を c とおく．f のグラフの点 $\bigl(c, f(c)\bigr)$ における接線 L の傾きは，c における f の微分係数 $f'(c)$ である．直線 AB と接線 L とは平行なので，直線 AB の傾き $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ と接線 L の傾き $f'(c)$ とは等しい：$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ ；よって $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ ．このように，$a < c < b$ かつ $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ である実数 c がある．



定理（平均値の定理） 実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f が区間 $[a,b]$ において微分可能であるならば，次のような実数 c がある：

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \quad \text{かつ} \quad a < c < b\ .$$

区間 I において関数 f が微分可能であるとは，I の各実数において f が微分可能であることであった．

区間 I において関数 f が微分可能であるとは，I の各実数において f が微分可能であることであった．

定義域が区間 I である関数 f は微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x) = 0$ とする．u, v は I に属す任意の実数とする．

区間 I において関数 f が微分可能であるとは，I の各実数において f が微分可能であることであった．

定義域が区間 I である関数 f は微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x) = 0$ とする．u, v は I に属す任意の実数とする．

$u < v$ とする．f は I で微分可能なので，f は区間 $[u,v]$ で微分可能である．従って平均値の定理より次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v-u)\ , \qquad u < w < v\ .$$

区間 I において関数 f が微分可能であるとは，I の各実数において f が微分可能であることであった.

定義域が区間 I である関数 f は微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x)=0$ とする. u,v は I に属す任意の実数とする.

$u<v$ とする. f は I で微分可能なので，f は区間 $[u,v]$ で微分可能である. 従って平均値の定理より次のような実数 w がある：

$$f(v)-f(u) = f'(w)(v-u) \ , \qquad u < w < v \ .$$

$u<w<v$ より実数 w は区間 I に属すので，仮定より $f'(w)=0$ ；よって $f(v)-f(u)=f'(w)(v-u)=0$ なので，$f(u)=f(v)$.

区間 I において関数 f が微分可能であるとは，I の各実数において f が微分可能であることであった．

定義域が区間 I である関数 f は微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x) = 0$ とする．u, v は I に属す任意の実数とする．

$u < v$ とする．f は I で微分可能なので，f は区間 $[u,v]$ で微分可能である．従って平均値の定理より次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v-u)\ ,\qquad u < w < v\ .$$

$u < w < v$ より実数 w は区間 I に属すので，仮定より $f'(w) = 0$ ；よって $f(v) - f(u) = f'(w)(v-u) = 0$ なので，$f(u) = f(v)$ ．

同様に，$u > v$ のとき も $f(u) = f(v)$ ．

区間 I において関数 f が微分可能であるとは，I の各実数において f が微分可能であることであった．

定義域が区間 I である関数 f は微分可能であり，I の各実数 x について $f'(x) = 0$ とする．u, v は I に属す任意の実数とする．

$u < v$ とする．f は I で微分可能なので，f は区間 $[u, v]$ で微分可能である．従って平均値の定理より次のような実数 w がある：

$$f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) \ , \qquad u < w < v \ .$$

$u < w < v$ より実数 w は区間 I に属すので，仮定より $f'(w) = 0$ ；よって $f(v) - f(u) = f'(w)(v - u) = 0$ なので，$f(u) = f(v)$ ．

同様に，$u > v$ のときも $f(u) = f(v)$ ．

定理　区間 I を定義域とする関数 f について，I において $f'(x) = 0$ ならば，関数 f は定数関数である．

関数 f と g とは区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $g'(x) = f'(x)$ とする．区間 I を定義域とする関数 h を次のように定める：

$$h(x) = g(x) - f(x) \ .$$

関数 f と g とは区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $g'(x) = f'(x)$ とする．区間 I を定義域とする関数 h を次のように定める：

$$h(x) = g(x) - f(x) \ .$$

I において，$g'(x) - f'(x) = 0$ なので，

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}\{g(x) - f(x)\} = \frac{d}{dx}g(x) - \frac{d}{dx}f(x) = g'(x) - f'(x) = 0 \ .$$

関数 f と g とは区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $g'(x) = f'(x)$ とする．区間 I を定義域とする関数 h を次のように定める：

$$h(x) = g(x) - f(x) \ .$$

I において，$g'(x) - f'(x) = 0$ なので，

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}\{g(x) - f(x)\} = \frac{d}{dx}g(x) - \frac{d}{dx}f(x) = g'(x) - f'(x) = 0 \ .$$

従って，先述の定理より関数 h は定数関数なので，ある定数 c をとると，I において $h(x) = c$ ；

関数 f と g とは区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $g'(x)=f'(x)$ とする．区間 I を定義域とする関数 h を次のように定める：

$$h(x) = g(x)-f(x) \ .$$

I において，$g'(x)-f'(x)=0$ なので，

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}\{g(x)-f(x)\} = \frac{d}{dx}g(x)-\frac{d}{dx}f(x) = g'(x)-f'(x) = 0 \ .$$

従って，先述の定理より関数 h は定数関数なので，ある定数 c をとると，I において $h(x)=c$ ；$h(x)=g(x)-f(x)$ なので，I において $g(x)-f(x)=c$ つまり $g(x)=f(x)+c$ ．

関数 f と g とは区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $g'(x) = f'(x)$ とする．区間 I を定義域とする関数 h を次のように定める：

$$h(x) = g(x) - f(x) \ .$$

I において，$g'(x) - f'(x) = 0$ なので，

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}\{g(x) - f(x)\} = \frac{d}{dx}g(x) - \frac{d}{dx}f(x) = g'(x) - f'(x) = 0 \ .$$

従って，先述の定理より関数 h は定数関数なので，ある定数 c をとると，I において $h(x) = c$ ；$h(x) = g(x) - f(x)$ なので，I において $g(x) - f(x) = c$ つまり $g(x) = f(x) + c$ ．

定理　関数 f と g とが区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $g'(x) = f'(x)$ ならば，ある定数 c をとると I の各実数 x について $g(x) = f(x) + c$ ．

関数 f と g とは区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $g'(x)=f'(x)$ とする．区間 I を定義域とする関数 h を次のように定める：

$$h(x) = g(x)-f(x) \ .$$

I において，$g'(x)-f'(x)=0$ なので，

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{d}{dx}\{g(x)-f(x)\} = \frac{d}{dx}g(x)-\frac{d}{dx}f(x) = g'(x)-f'(x) = 0 \ .$$

従って，先述の定理より関数 h は定数関数なので，ある定数 c をとると，I において $h(x)=c$ ；$h(x)=g(x)-f(x)$ なので，I において $g(x)-f(x)=c$ つまり $g(x)=f(x)+c$ ．

定理　関数 f と g とが区間 I において微分可能であり，I の各実数 x について $g'(x)=f'(x)$ ならば，ある定数 c をとると I の各実数 x について $g(x)=f(x)+c$ ．

この定理は後に重要になる．