5.5 関数の最大値最小値

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

正確な定義を述べる.

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) \text{ .}$$

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という．

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) .$$

f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) .$$

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という．

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) .$$

f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) .$$

関数の最大値・最小値は，各々，あるとしても唯一つだけである．最大値・最小値は無いこともある．

最大値・最小値を調べる問題では，通常，最大値および最小値だけでなく，最大値をとる実数および最小値をとる実数も調べること．

最大値・最小値を調べる問題では，通常，最大値および最小値だけでなく，最大値をとる実数および最小値をとる実数も調べること．また，最大値・最小値を調べる問題では，最大値がないときは “ 最大値はない ” ことを記し，最小値がないときは “ 最小値はない ” ことを記すこと．

例 区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ （ $-1 \leq x \leq 4$ ）と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ($-1 \leq x \leq 4$) と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

区間 $[-1,4]$ の各実数 x について

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$= 3(x-1)(x-3) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[-1, 4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ ($-1 \leq x \leq 4$) と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

区間 $[-1, 4]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 9x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) \\ &= 3(x-1)(x-3)\ .\end{aligned}$$

実数 p について $\varphi'(p) = 0$ とすると，$3(p-1)(p-3) = 0$ なので，$p = 1, 3$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$ ($-1 \leq x \leq 4$) と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

区間 $[-1,4]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3-6x^2+9x) = 3x^2-12x+9 = 3(x^2-4x+3) \\ &= 3(x-1)(x-3)\ .\end{aligned}$$

実数 p について $\varphi'(p)=0$ とすると，$3(p-1)(p-3)=0$ なので，$p=1,3$.
更に，

$$\varphi(-1)=-16\ ,\quad \varphi(1)=4\ ,\quad \varphi(3)=0\ ,\quad \varphi(4)=4\ .$$

$$\varphi(-1) = -16\ ,\quad \varphi(1) = 4\ ,\quad \varphi(3) = 0\ ,\quad \varphi(4) = 4\ .$$

増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x)=3(x-1)(x-3)$							
$\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$	-16		4		0		4

$$\varphi(-1) = -16 \ , \quad \varphi(1) = 4 \ , \quad \varphi(3) = 0 \ , \quad \varphi(4) = 4 \ .$$

増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16		4		0		4

$$\varphi(-1) = -16 \ , \quad \varphi(1) = 4 \ , \quad \varphi(3) = 0 \ , \quad \varphi(4) = 4 \ .$$

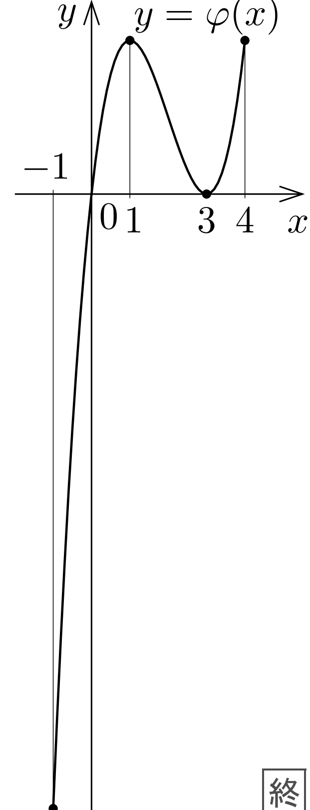
増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

$$\varphi(-1) = -16\ , \quad \varphi(1) = 4\ , \quad \varphi(3) = 0\ , \quad \varphi(4) = 4\ .$$

増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4



関数 φ は, 1 と 4 とにおいて最大値 4 をとり, -1 において最小値 -16 をとる.

終

問5.5.1 区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=8x^2-x^3-5x$ ($2\leq x\leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x)=\qquad\qquad=-(\qquad)(\qquad)$.
$\psi'(x)=0$ とすると, $(\qquad)(\qquad)=0$, $2\leq x\leq 7$ より $x=\quad$. 更に,
$\psi(2)=\quad$, $\psi(\ )=\quad$, $\psi(7)=\quad$. 増減表は次のようになる.

x	2	$\cdots$		$\cdots$	7
$\varphi'(x)=-(\qquad)(\qquad)$					
$\varphi(x)=8x^2-x^3-5x$					

関数 ψ は, において最大値 をとり, と とにおいて最小値 をとる.

$\boxed{問5.5.1}$ 区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = -(3x-1)(x-5)$. $\psi'(x) = 0$ とすると, $(3x-1)(x-5) = 0$, $2 \leq x \leq 7$ より $x = 5$. 更に, $\psi(2) = 14$, $\psi(5) = 50$, $\psi(7) = 14$. 増減表は次のようになる.

x	2	$\cdots$		$\cdots$	7
$3x-1$ $x-5$					
$\varphi'(x) = -(3x-1)(x-5)$					
$\varphi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$					

関数 ψ は, 　において最大値 　をとり, 　と 　とにおいて最小値 　をとる.

$\boxed{\text{問}5.5.1}$ 区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = -(3x-1)(x-5)$. $\psi'(x) = 0$ とすると, $(3x-1)(x-5) = 0$, $2 \leq x \leq 7$ より $x = 5$. 更に, $\psi(2) = 14$, $\psi(5) = 50$, $\psi(7) = 14$. 増減表は次のようになる.

x	2	$\cdots$	5	$\cdots$	7
$3x-1$ $x-5$	$+$ $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$	$+$ $+$
$\varphi'(x) = -(3x-1)(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\varphi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$	14	$\nearrow$	50	$\searrow$	14

関数 ψ は, 　　において最大値　　　をとり, 　　と　　とにおいて最小値　　　をとる.

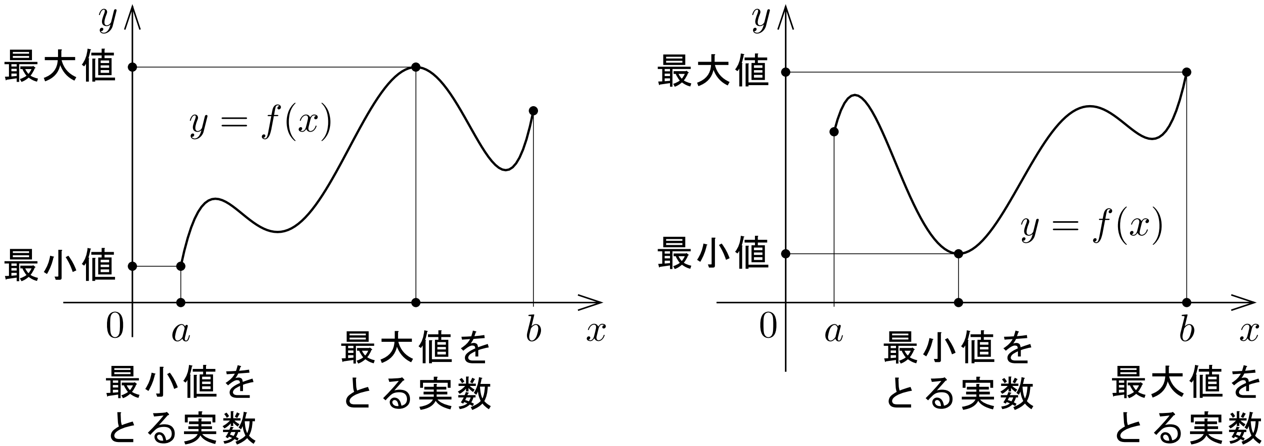
$\boxed{\text{問}5.5.1}$ 区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = -(3x-1)(x-5)$. $\psi'(x) = 0$ とすると, $(3x-1)(x-5) = 0$, $2 \leq x \leq 7$ より $x = 5$. 更に, $\psi(2) = 14$, $\psi(5) = 50$, $\psi(7) = 14$. 増減表は次のようになる.

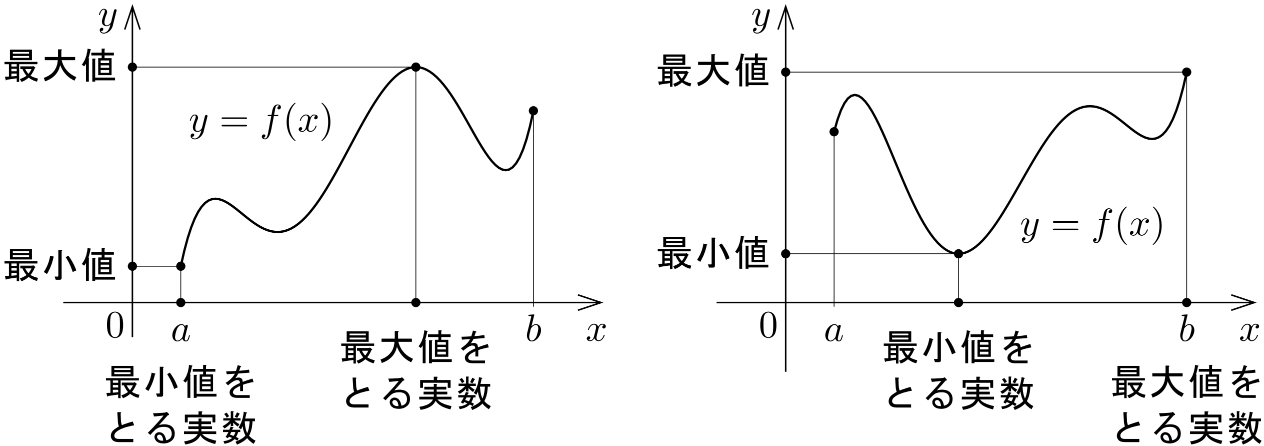
x	2	$\cdots$	5	$\cdots$	7
$3x-1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = -(3x-1)(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\varphi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$	14	$\nearrow$	50	$\searrow$	14

関数 ψ は, 5 において最大値 50 をとり, 2 と 7 とにおいて最小値 14 をとる. $\boxed{\text{終}}$

実数 a,b について $a<b$ とする．区間 $[a,b]$ を定義域とする関数 f は $[a,b]$ において微分可能であるとする．座標平面の f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになる．



実数 a,b について $a<b$ とする．区間 $[a,b]$ を定義域とする関数 f は $[a,b]$ において微分可能であるとする．座標平面の f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになる．



次のことが成り立つ：f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである．

f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである.

f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである.

f が p において極値をとるとき $f'(p)=0$ なので,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

$f'(p)=0$ または $p=a$ または $p=b$.

f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである.

f が p において極値をとるとき $f'(p)=0$ なので,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

$$f'(p)=0 \text{ または } p=a \text{ または } p=b \text{ .}$$

よって, $f'(p)=0$ である p に対する $f(p)$ と $f(a)$ と $f(b)$ との中で, 最大の実数が f の最大値であり, 最小の実数が f の最小値である.

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

例 区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \dfrac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x\right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right)(-\sin x) - \cos x \\ &= -\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x \ . \end{aligned}$$

$\boxed{例}$ 区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \dfrac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x\right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right)(-\sin x) - \cos x \\ &= -\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x \ . \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ とする：

$\boxed{例}$ 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 g の最大値・最小値を調べる.

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x\right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right)(-\sin x) - \cos x \\
&= -\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x \ .
\end{aligned}
$$

$g'(x) = 0$ とする : $-\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x = 0$ より $x - \frac{6}{5} = 0$ または $\sin x = 0$;

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので, $x = \frac{6}{5}$ または $x = 0$.

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x\right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right)(-\sin x) - \cos x$$
$$= -\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x\ .$$

$g'(x) = 0$ とする： $-\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x = 0$ より $x - \frac{6}{5} = 0$ または $\sin x = 0$ ； $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので， $x = \frac{6}{5}$ または $x = 0$ ．従って，関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{6}{5}, \frac{\pi}{2}$ ．

$\boxed{例}$ 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x\right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right)(-\sin x) - \cos x$$
$$= -\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x \ .$$

$g'(x) = 0$ とする： $-\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x = 0$ より $x - \frac{6}{5} = 0$ または $\sin x = 0$ ； $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので， $x = \frac{6}{5}$ または $x = 0$ ．従って，関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{6}{5}, \frac{\pi}{2}$ ．

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ , \qquad g(0) = -\frac{6}{5} \ , \qquad g\left(\frac{6}{5}\right) = -\sin\frac{6}{5} \ , \qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ .$$

区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$

は単調増加なので，$0 < \dfrac{6}{5} < \dfrac{\pi}{2}$

より $\sin 0 < \sin \dfrac{6}{5} < \sin \dfrac{\pi}{2}$ な

ので $0 < \sin \dfrac{6}{5} < 1$ ，よって

$-1 < -\sin \dfrac{6}{5} < 0$ なので，

$$g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{6}{5}\right) < g\left(-\frac{\pi}{2}\right) .$$

区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$

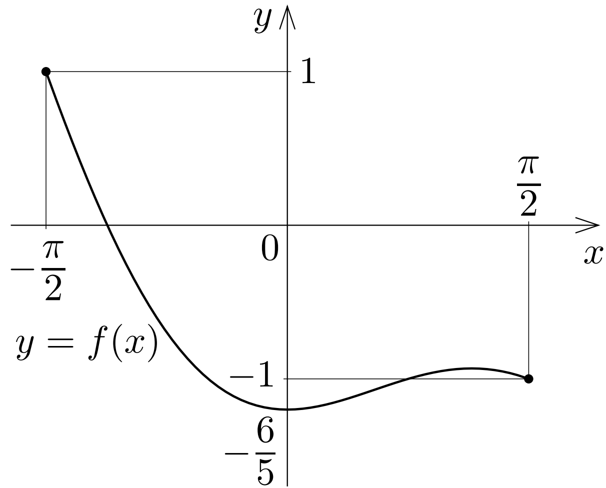
は単調増加なので，$0 < \dfrac{6}{5} < \dfrac{\pi}{2}$

より $\sin 0 < \sin\dfrac{6}{5} < \sin\dfrac{\pi}{2}$ な

ので $0 < \sin\dfrac{6}{5} < 1$ ，よって

$-1 < -\sin\dfrac{6}{5} < 0$ なので，

$$g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{6}{5}\right) < g\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$



関数 g は，$-\dfrac{\pi}{2}$ において最大値 1

をとり，0 において最小値 $-\dfrac{6}{5}$ をとる．

終

$\boxed{問5.5.2}$ **区間** $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x) = \left(x + \dfrac{4}{3}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$ **と定める．関数** f **の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right)\cos x\right\} = $$

$$= \qquad\qquad\qquad .$$

$f'(x) = 0$ **とする：** $\qquad = 0$ **より** $\qquad = 0$ **または** $\qquad = 0$ ；

$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ **なので，** $x = \qquad$ **または** $x = \qquad$ ．

$$f\left(\qquad\right) = \qquad , \qquad f(\quad) = \qquad , \qquad f\left(\quad\right) = \qquad , \qquad f\left(\quad\right) = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}5.5.2}$ **区間** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x) = \left(x + \frac{4}{3}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ **と定める．関数** f **の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right)\cos x\right\} = \cos x - \left(\frac{5}{4} - x\right)\sin x - \cos x$$

$$= \left(x - \frac{5}{4}\right)\sin x \ .$$

$f'(x) = 0$ **とする：** $\left(x - \frac{5}{4}\right)\sin x = 0$ **より** $\qquad = 0$ **または** $\qquad = 0$;

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ **なので，** $x = \qquad$ **または** $x = \qquad$.

$$f\left(\qquad \right) = \qquad , \quad f(\ ) = \qquad , \quad f\left(\ \right) = \qquad , \quad f\left(\ \right) = \qquad .$$

問5.5.2 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \left(x + \frac{4}{3}\right)\cos x - \sin x$ $\left(\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\ \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right)\cos x\right\} = \cos x - \left(\frac{5}{4} - x\right)\sin x - \cos x \\
&= \left(x - \frac{5}{4}\right)\sin x\ .
\end{aligned}
$$

$f'(x) = 0$ とする： $\left(x - \frac{5}{4}\right)\sin x = 0$ より $x - \frac{5}{4} = 0$ または $\sin x = 0$ ；

$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ なので， $x = \frac{5}{4}$ または $x = 0$ ．

$$
f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \qquad , \qquad f(0) = \qquad , \qquad f\left(\frac{5}{4}\right) = \qquad , \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \qquad .
$$

$\boxed{問5.5.2}$ **区間** $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \left(x + \dfrac{4}{3}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right)\cos x\right\} = \cos x - \left(\frac{5}{4} - x\right)\sin x - \cos x$$

$$= \left(x - \frac{5}{4}\right)\sin x \ .$$

$f'(x) = 0$ とする： $\left(x - \dfrac{5}{4}\right)\sin x = 0$ より $x - \dfrac{5}{4} = 0$ または $\sin x = 0$ ；

$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので， $x = \dfrac{5}{4}$ または $x = 0$ ．

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ , \qquad f(0) = \frac{5}{4} \ , \qquad f\left(\frac{5}{4}\right) = \sin\frac{5}{4} \ , \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ .$$

$0 < \dfrac{5}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ で，区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので，
$\sin 0 < \sin\dfrac{5}{4} < \sin\dfrac{\pi}{2}$ ，つまり $0 < \sin\dfrac{4}{3} < 1$ ．よって

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) < f\left(\frac{5}{4}\right) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(0) \ .$$

関数 f は，0 において最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとり，$-\dfrac{\pi}{2}$ において最小値 -1 をとる．

終

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない．

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない．関数 f が実数 p において最小値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \leq f(x)$ であることを示さなければならない．

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない．関数 f が実数 p において最小値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \leq f(x)$ であることを示さなければならない．

例えば，定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f の最大値・最小値を調べるには，$f(x)$ の値の極限 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ を考える必要がある．

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない．関数 f が実数 p において最小値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \leq f(x)$ であることを示さなければならない．

例えば，定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f の最大値・最小値を調べるには，$f(x)$ の値の極限 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ を考える必要がある．$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ のときは f の最大値はない．$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ のときは f の最小値はない．$x \to \infty$ のとき $f(x)$ が収束するときは，f の最大値・最小値はあったり無かったりする．

$\boxed{\text{例}}$ **区間** $[0,\infty)$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ $(\ x \geq 0\ )$ **と定める．関数** f **の最大値・最小値を調べる．**

$\boxed{\text{例}}$ **区間** $[0,\infty)$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ **(** $x\geq 0$ **) と定める． 関数** f **の最大値・最小値を調べる．**

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{4x^2-2x+7}{2x+1}=\frac{(8x-2)(2x+1)-(4x^2-2x+7)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}\ .$$

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ （ $x \geq 0$ ） と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x^2-2x+7}{2x+1} = \frac{(8x-2)(2x+1)-(4x^2-2x+7)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$
$$= \frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x \geq 0$ のとき， $2x+1 \geq 1$ なので $(2x+1)^2 > 0$ ．

$\boxed{例}$ **区間** $[0,\infty)$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ （ $x \geq 0$ ） **と定める．関数** f **の最大値・最小値を調べる．**

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{4x^2-2x+7}{2x+1}=\frac{(8x-2)(2x+1)-(4x^2-2x+7)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x \geq 0$ **のとき，** $2x+1 \geq 1$ **なので** $(2x+1)^2>0$ ． $0<x<1$ **のとき，** $(x-1)(x+2)<0$ **なので** $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}<0$ ． $x>1$ **のとき，** $(x-1)(x+2)>0$ **なので** $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}>0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ ($x \geq 0$) と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{4x^2-2x+7}{2x+1}=\frac{(8x-2)(2x+1)-(4x^2-2x+7)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x \geq 0$ のとき， $2x+1 \geq 1$ なので $(2x+1)^2>0$ ． $0<x<1$ のとき， $(x-1)(x+2)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}<0$ ． $x>1$ のとき， $(x-1)(x+2)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}>0$ ．関数 f は，区間 $[0,1]$ において単調減少であり，区間 $[1,\infty)$ において単調増加である．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ ($x\geq 0$) と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べる.

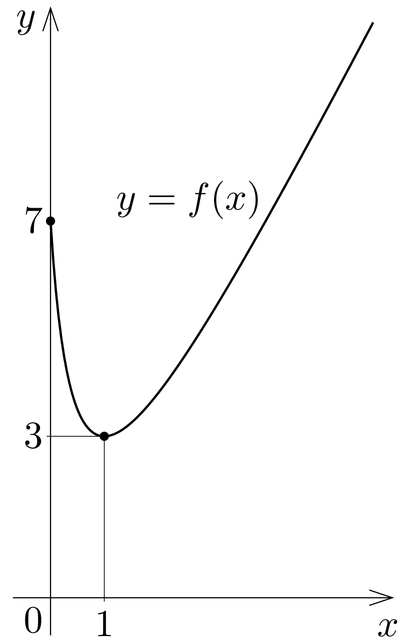
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{4x^2-2x+7}{2x+1}=\frac{(8x-2)(2x+1)-(4x^2-2x+7)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$

$$=\frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2} .$$

$x\geq 0$ のとき, $2x+1\geq 1$ なので $(2x+1)^2>0$. $0<x<1$ のとき, $(x-1)(x+2)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}<0$. $x>1$ のとき, $(x-1)(x+2)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}>0$. 関数 f は, 区間 $[0,1]$ において単調減少であり, 区間 $[1,\infty)$ において単調増加である. $f(1)=3$. f は 1 において最小値 3 をとる.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+7}{2x+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \frac{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}} \right) \\
&= \infty \quad .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+7}{2x+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}\right)}{x\left(2+\dfrac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \frac{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{7}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}} \right) \\
&= \infty \ .
\end{aligned}
$$



関数 f は 1 において最小値 3 をとる. f の最大値はない.

終

$\boxed{\text{問}5.5.3}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{12x-x^2}{2x+1}$ と定める.
関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{12x-x^2}{2x+1}=$$

$$.$$

$x\geq 0$ のとき $\qquad\qquad > 0$. $0<x<\quad$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}$ $\quad$ 0 . $x>\quad$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}\quad$ 0 . f は, 区間 $[0,\ ]$ において単調 $\qquad$ であり, 区間 $[\ ,\infty)$ において単調 $\qquad$ である.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\quad\cdot\frac{\quad}{\quad}\right)=\qquad.$$

$f(\ )=\quad$. 関数 f は $\quad$ において最 $\quad$ 値 $\qquad$ をとる. f の最 $\quad$ 値はない.

$\boxed{\text{問}5.5.3}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{12x-x^2}{2x+1}$ と定める.
関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{12x-x^2}{2x+1} = \frac{(12-2x)(2x+1)-(12x-x^2)\cdot 2}{(2x+1)^2} = -\frac{2(x^2+x-6)}{(2x+1)^2}$$
$$= -\frac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2} \quad .$$

$x \geq 0$ のとき $(2x+1)^2 > 0$. $0 < x <$ 　 のとき $f'(x) = -\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}$ 　 0 . $x >$ 　 のとき $f'(x) = -\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}$ 　 0 . f は, 区間 $[0,\ ]$ において単調 　 であり, 区間 $[\ ,\infty)$ において単調 　 である.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{12x-x^2}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad \cdot \frac{\quad}{\quad}\right) = \qquad .$$

$f(\ ) =$ 　 . 関数 f は 　 において最 　 値 　 をとる. f の最 　 値はない.

$\boxed{問 5.5.3}$ 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{12x - x^2}{2x+1}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{12x - x^2}{2x+1} = \frac{(12-2x)(2x+1) - (12x - x^2)\cdot 2}{(2x+1)^2} = -\frac{2(x^2+x-6)}{(2x+1)^2}$$
$$= -\frac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2} \ .$$

$x \geq 0$ のとき $(2x+1)^2 > 0$ ． $0 < x < 2$ のとき $f'(x) = -\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2} > 0$ ． $x > 2$ のとき $f'(x) = -\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2} < 0$ ． f は，区間 $[0, 2]$ において単調増加であり，区間 $[2, \infty)$ において単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{12x - x^2}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad \cdot \frac{\quad}{\quad} \right) = \qquad .$$

$f(\quad) = \quad$ ．関数 f は　　において最　値　　をとる．f の最　値はない．

$\boxed{問 5.5.3}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{12x-x^2}{2x+1}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\frac{(12-2x)(2x+1)-(12x-x^2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=-\frac{2(x^2+x-6)}{(2x+1)^2}$$
$$=-\frac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x\geq 0$ のとき $(2x+1)^2>0$ ． $0<x<2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}>0$ ． $x>2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}<0$ ． f は，区間 $[0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,\infty)$ において単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{\frac{12}{x}-1}{2+\frac{1}{x}}\right)=-\infty\ .$$

$f(\quad)=\quad$ ． 関数 f は　において最　値　をとる． f の最　値はない．

$\boxed{\text{問}5.5.3}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{12x-x^2}{2x+1}$ と定める. 関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\frac{(12-2x)(2x+1)-(12x-x^2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=-\frac{2(x^2+x-6)}{(2x+1)^2}$$
$$=-\frac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x\geq 0$ のとき $(2x+1)^2>0$. $0<x<2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}>0$. $x>2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}<0$. f は, 区間 $[0,2]$ において単調増加であり, 区間 $[2,\infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{\frac{12}{x}-1}{2+\frac{1}{x}}\right)=-\infty\ .$$

$f(2)=4$. 関数 f は 2 において最大値 4 をとる. f の最小値はない. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$\boxed{例}$ 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0<x<2$ のとき, $(x-2)(2x+1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}<0$.

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$0<x<2$ のとき, $(x-2)(2x+1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}<0$.

$x>2$ のとき, $(x-2)(2x+1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}>0$.

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める．f の最大値と最小値とを調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$0<x<2$ のとき，$(x-2)(2x+1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}<0$ ．

$x>2$ のとき，$(x-2)(2x+1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}>0$ ．f は，区間 $[0,2]$ において単調減少であり，区間 $[2,\infty)$ において単調増加である．

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

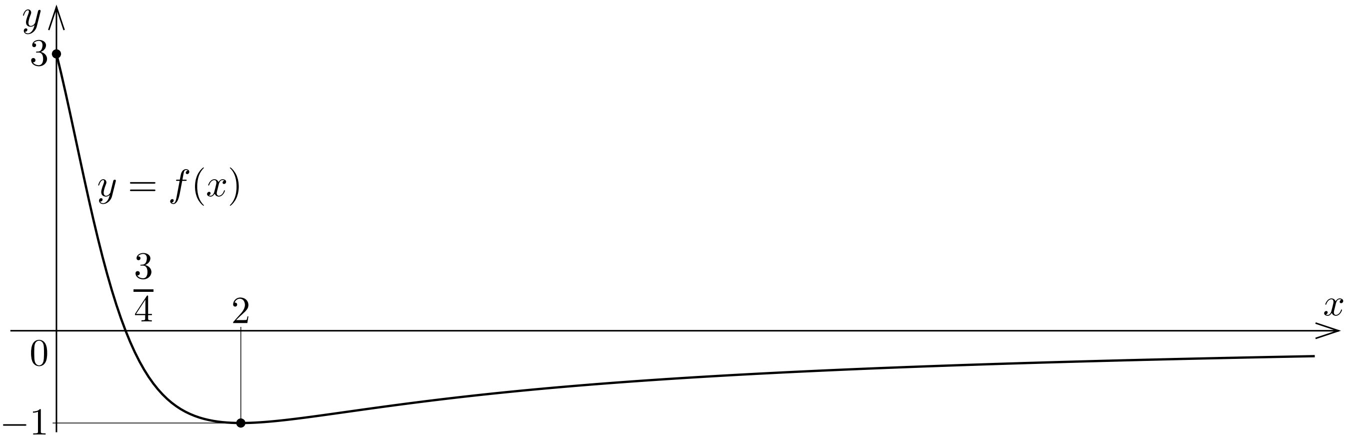
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right)=\frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}\ .$$

$0<x<2$ のとき, $(x-2)(2x+1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}<0$. $x>2$ のとき, $(x-2)(2x+1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}>0$. f は, 区間 $[0,2]$ において単調減少であり, 区間 $[2,\infty)$ において単調増加である. $f(2)=1$. f は 2 において最小値 1 をとる.

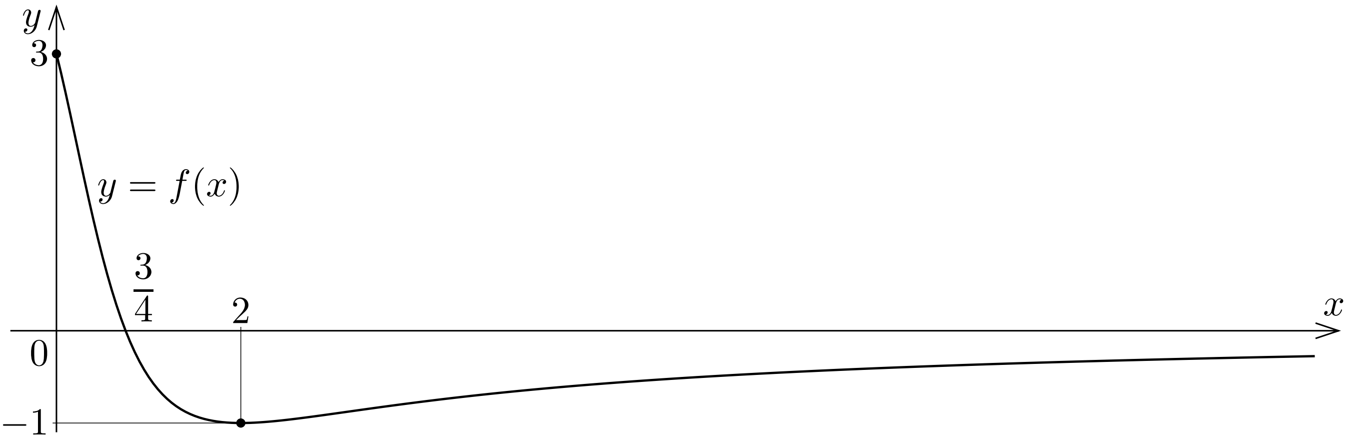
$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{x\left(4-\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\frac{4-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$$

$$=0\ .$$

$f(0)=3$ ． $x>\dfrac{3}{4}$ のとき $3x-4>0$ なので $f(x)=-\dfrac{4x-3}{x^2+1}<0$ ． f は 0 において最大値 3 をとる.



$f(0)=3$ ． $x>\dfrac{3}{4}$ のとき $3x-4>0$ なので $f(x)=-\dfrac{4x-3}{x^2+1}<0$ ． f は 0 において最大値 3 をとる.



関数 f は，0 において最大値 3 をとり，2 において最小値 -1 をとる. 終

$\boxed{\text{問}5.5.4}$ **区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x-1}{x^2+3} =$$

$0 < x <$ 　 のとき $f'(x) =$ 　　　　　　　　0 ． $x >$ 　 のとき

$f'(x) =$ 　　　　　　　　0 ． f は，区間 $[0,\ ]$ において単調　　であり，

区間 $[\ ,\infty)$ において単調　　である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\qquad\right)}{\left(\qquad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad\cdot\frac{\qquad}{\qquad}\right) = \quad .$$

$f(\ ) =$ 　． $f(\ ) =$ 　　． $x >$ 　 のとき $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3} > 0$ ．

$\boxed{問 5.5.4}$ 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x-1}{x^2+3} = -\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2} = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} \ .$$

$0 < x <$ 　 のとき $f'(x) = -\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}$ 　 0 ． $x >$ 　 のとき $f'(x) = -\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}$ 　 0 ． f は，区間 $[0, \ ]$ において単調 　 であり，区間 $[\ , \infty)$ において単調 　 である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\quad \right)}{\left(\quad \right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad \cdot \frac{\quad}{\quad} \right) = \quad .$$

$f(\ ) =$ 　 ． $f(\ ) =$ 　 ． $x >$ 　 のとき $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2+3} > 0$ ．

$\boxed{問 5.5.4}$ **区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x-1}{x^2+3} = -\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2} = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}\ .$$

$0<x<2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}>0$ ． $x>2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}<0$ ． f は，区間 $[0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,\infty)$ において単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\qquad\right)}{\left(\qquad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad\cdot\frac{\qquad}{\qquad}\right) = \qquad .$$

$f(2)=\qquad$ ． $f(0)=\qquad$ ． $x>\qquad$ のとき $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}>0$ ．

$\boxed{\text{問}5.5.4}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{4x-1}{x^2+3}=-\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2}=-\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}\ .$$

$0<x<2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}>0$ ． $x>2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}<0$ ． f は，区間 $[0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,\infty)$ において単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{4-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x^2}}\right)=0\ .$$

$f(2)=\quad$ ． $f(0)=\quad$ ． $x>\quad$ のとき $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}>0$ ．

$\boxed{問5.5.4}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{4x-1}{x^2+3}=-\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2}=-\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}\ .$$

$0<x<2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}>0$ ． $x>2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}<0$ ． f は，区間 $[0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,\infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{4-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x^2}}\right)=0\ .$$

$f(2)=1$ ． $f(0)=-\dfrac{1}{3}$ ． $x>\dfrac{1}{4}$ のとき $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}>0$ ．

関数 f は，2 において最大値 1 をとり，0 において最小値 $-\dfrac{1}{3}$ をとる．$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$\boxed{\text{例}}$ **区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}<0$.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める． f の最大値と最小値とを調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき， $(x+2)(2x-1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}<0$.

$x>\dfrac{1}{2}$ のとき， $(x+2)(2x-1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}>0$.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める．f の最大値と最小値とを調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき，$(x+2)(2x-1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}<0$ ．$x>\dfrac{1}{2}$ のとき，$(x+2)(2x-1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}>0$ ．f は，区間 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ において単調減少であり，区間 $\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$ において単調増加である．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める．f の最大値と最小値とを調べる．

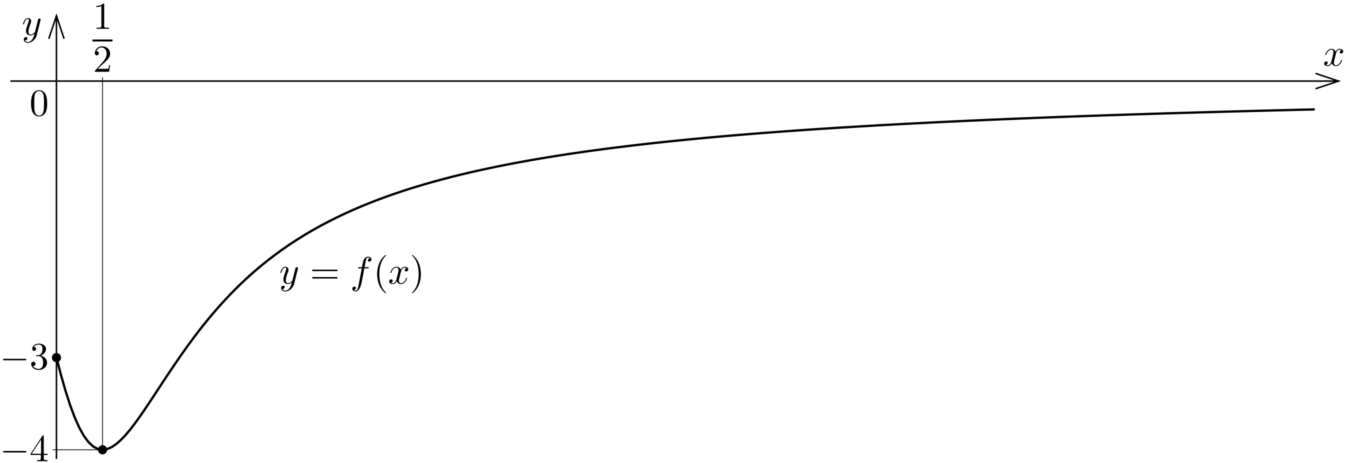
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right)=\frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}\ .$$

$0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき，$(x+2)(2x-1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}<0$ ．

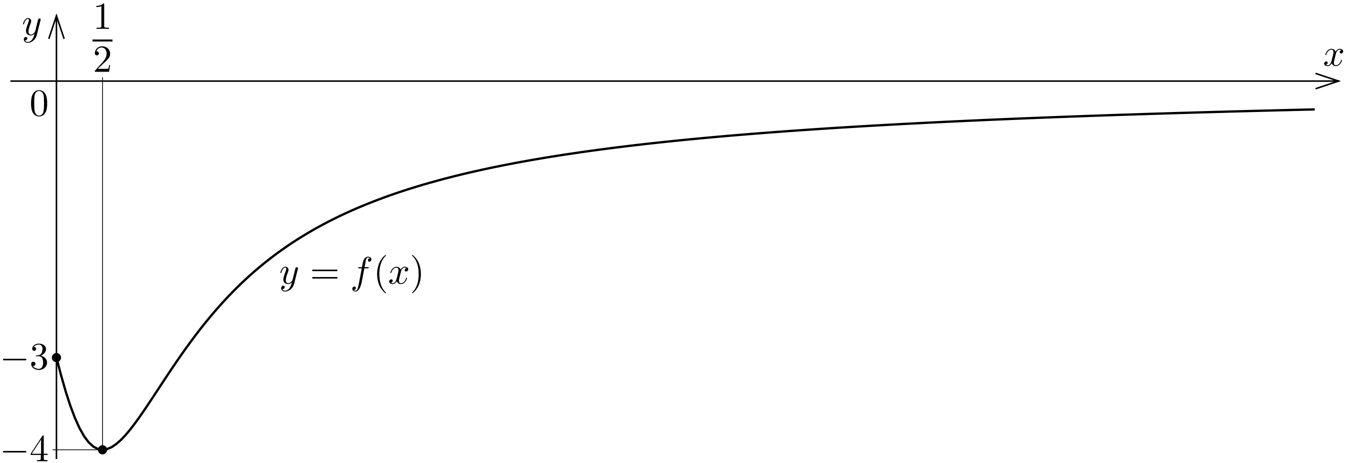
$x>\dfrac{1}{2}$ のとき，$(x+2)(2x-1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}>0$ ．f は，区間 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ において単調減少であり，区間 $\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$ において単調増加である．$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4$ ．f は $\dfrac{1}{2}$ において最小値 -4 をとる．

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{x\left(4+\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\frac{4+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$$
$$=0\ .$$

$f(0) = -3$ なので $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 > f(0)$. f の最大値はない.



$f(0)=-3$ なので $\lim_{x\to\infty} f(x)=0>f(0)$ ． f の最大値はない.



関数 f は $\frac{1}{2}$ において最小値 -4 をとる. f の最大値はない. 終

$\boxed{\text{問}5.5.5}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{3x+1}{3x^2+1} =$$

$0<x<\quad$ のとき $f'(x)=\qquad\qquad\qquad\qquad 0$ ． $x>\quad$ のとき

$f'(x)=\qquad\qquad\qquad\qquad 0$ ． f は，区間 $\left[0,\quad\right]$ において単調　　であり，

区間 $\left[\quad,\infty\right)$ において単調　　である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\qquad\right)}{\left(\qquad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad\cdot\frac{}{\qquad}\right) = \quad .$$

$f\left(\quad\right)=\quad$ ． $f(0)=\qquad \lim_{x\to\infty} f(x)$ ．

$\boxed{問 5.5.5}$ **区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} \ .$$

$0 < x < \quad$ **のとき** $f'(x) = -\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} \quad 0$ ． $x > \quad$ **のとき** $f'(x) = -\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} \quad 0$ ． f **は，区間** $\left[0, \quad\right]$ **において単調　　であり，区間** $\left[\quad ,\infty\right)$ **において単調　　である．**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\quad\right)}{\left(\quad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad \cdot \frac{}{}\right) = \quad .$$

$f\left(\quad\right) = \quad$ ． $f(0) = \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)$ ．

$\boxed{\text{問}5.5.5}$ **区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} \ .$$

$0 < x < \dfrac{1}{3}$ **のとき** $f'(x) = -\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} > 0$ ． $x > \dfrac{1}{3}$ **のとき** $f'(x) = -\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} < 0$ ． f **は，区間** $\left[0, \dfrac{1}{3}\right]$ **において単調増加であり，区間** $\left[\dfrac{1}{3}, \infty\right)$ **において単調減少である．**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\qquad\right)}{\left(\qquad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad \cdot \frac{\quad}{\quad}\right) = \quad .$$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \quad$ ． $f(0) = \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ．

$\boxed{\text{問}5.5.5}$ **区間** $[0,\infty)$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x^2+1}$ **と定める．関数** f **の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} \ .$$

$0<x<\dfrac{1}{3}$ **のとき** $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}>0$ ． $x>\dfrac{1}{3}$ **のとき** $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}<0$ ． f **は，区間** $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ **において単調増加であり，区間** $\left[\dfrac{1}{3},\infty\right)$ **において単調減少である．**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{3+\frac{1}{x}}{3+\frac{1}{x^2}}\right) = 0 \ .$$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) =$ ． $f(0) =$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ ．

$\boxed{問5.5.5}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} \ .$$

$0<x<\dfrac{1}{3}$ のとき $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}>0$ ． $x>\dfrac{1}{3}$ のとき $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}<0$ ． f は，区間 $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ において単調増加であり，区間 $\left[\dfrac{1}{3},\infty\right)$ において単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{3+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x^2}}\right) = 0 \ .$$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$ ． $f(0)=1>\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ．

関数 f は $\frac{1}{3}$ において最大値 $\frac{3}{2}$ をとる． f の最小値はない． $\boxed{\text{終}}$