5.5 関数の最大値最小値

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という．

正確な定義を述べる．

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) \ .$$

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という.

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x) \ .$$

f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x) \ .$$

関数 f の値の範囲（値域）の中で，最も大きい実数のことを f の最大値といい，最も小さい実数のことを f の最小値という．

正確な定義を述べる．関数 f の定義域に属す実数 p について，f が p において最大値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \geq f(x)\ .$$

f が p において最小値をとるとは次の条件が成り立つことである：

$$f \text{ の定義域の各実数 } x \text{ に対して } f(p) \leq f(x)\ .$$

関数の最大値・最小値は，各々，あるとしても唯一つだけである．最大値・最小値は無いこともある．

最大値・最小値を調べる問題では，通常，最大値および最小値だけでなく，最大値をとる実数および最小値をとる実数も調べること．

最大値・最小値を調べる問題では，通常，最大値および最小値だけでなく，最大値をとる実数および最小値をとる実数も調べること．また，最大値・最小値を調べる問題では，最大値がないときは“ 最大値はない ”ことを記し，最小値がないときは“ 最小値はない ”ことを記すこと．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$ ($-1 \leq x \leq 4$) と定める. 関数 φ の最大値・最小値を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$ ($-1\leq x\leq 4$) と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

区間 $[-1,4]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3-6x^2+9x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)\\ &= 3(x-1)(x-3)\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$ ($-1\le x\le 4$) と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

区間 $[-1,4]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{d}{dx}(x^3-6x^2+9x) = 3x^2-12x+9 = 3(x^2-4x+3)\\ &= 3(x-1)(x-3)\ .\end{aligned}$$

実数 p について $\varphi'(p)=0$ とすると，$3(p-1)(p-3)=0$ なので，$p=1,3$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[-1,4]$ を定義域とする関数 φ を $\varphi(x)=x^3-6x^2+9x$ ($-1 \leq x \leq 4$) と定める．関数 φ の最大値・最小値を調べる．

区間 $[-1,4]$ の各実数 x について

$$\begin{aligned}\varphi'(x) = \frac{d}{dx}(x^3-6x^2+9x) &= 3x^2-12x+9 = 3(x^2-4x+3) \\ &= 3(x-1)(x-3) \ .\end{aligned}$$

実数 p について $\varphi'(p)=0$ とすると，$3(p-1)(p-3)=0$ なので，$p=1,3$ ．
更に，

$$\varphi(-1) = -16 \ , \quad \varphi(1) = 4 \ , \quad \varphi(3) = 0 \ , \quad \varphi(4) = 4 \ .$$

$$\varphi(-1) = -16 \ , \quad \varphi(1) = 4 \ , \quad \varphi(3) = 0 \ , \quad \varphi(4) = 4 \ .$$

増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$							
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16		4		0		4

$$\varphi(-1) = -16 \ , \quad \varphi(1) = 4 \ , \quad \varphi(3) = 0 \ , \quad \varphi(4) = 4 \ .$$

増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16		4		0		4

$$\varphi(-1) = -16\ ,\quad \varphi(1) = 4\ ,\quad \varphi(3) = 0\ ,\quad \varphi(4) = 4\ .$$

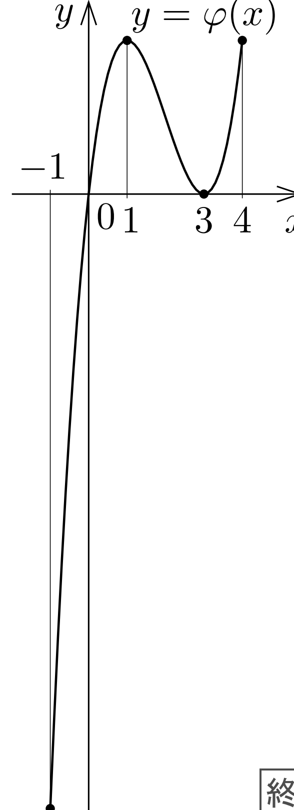
増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$ $x-3$	$-$ $-$	$-$ $-$	0 $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$	$+$ $+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

$$\varphi(-1) = -16\ ,\quad \varphi(1) = 4\ ,\quad \varphi(3) = 0\ ,\quad \varphi(4) = 4\ .$$

増減表は次のようになる.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$x-1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = 3(x-1)(x-3)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	-16	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4



関数 φ は, 1 と 4 とにおいて最大値 4 をとり, -1 において最小値 -16 をとる.

終

$\boxed{\text{問}5.5.1}$ 区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=8x^2-x^3-5x$ ($2\leq x\leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x)=\qquad\qquad=-(\qquad)(\qquad)$.
$\psi'(x)=0$ とすると, $(\qquad)(\qquad)=0$, $2\leq x\leq 7$ より $x=\quad$. 更に,
$\psi(2)=\quad$, $\psi(\ )=\quad$, $\psi(7)=\quad$. 増減表は次のようになる.

x	2	$\cdots$		$\cdots$	7
$\varphi'(x)=-(\qquad)(\qquad)$					
$\varphi(x)=8x^2-x^3-5x$					

関数 ψ は, $\quad$ において最大値 $\quad$ をとり, $\quad$ と $\quad$ とにおいて最小値 $\quad$ をとる.

$\boxed{問5.5.1}$ **区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=8x^2-x^3-5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める．ψ の最大値・最小値を調べよ．**

区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x)=-3x^2+16x-5=-(3x-1)(x-5)$ ．$\psi'(x)=0$ とすると，$(3x-1)(x-5)=0$ ，$2 \leq x \leq 7$ より $x=5$ ．更に，$\psi(2)=14$ ，$\psi(5)=50$ ，$\psi(7)=14$ ．増減表は次のようになる．

x	2	$\cdots$		$\cdots$	7
$3x-1$ $x-5$					
$\varphi'(x)=-(3x-1)(x-5)$					
$\varphi(x)=8x^2-x^3-5x$					

関数 ψ は，　　において最大値　　　をとり，　　と　　とにおいて最小値　　　をとる．

$\boxed{\text{問}5.5.1}$ 区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=8x^2-x^3-5x$ ($2\leq x\leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x)=-3x^2+16x-5=-(3x-1)(x-5)$. $\psi'(x)=0$ とすると, $(3x-1)(x-5)=0$, $2\leq x\leq 7$ より $x=5$. 更に, $\psi(2)=14$, $\psi(5)=50$, $\psi(7)=14$. 増減表は次のようになる.

x	2	$\cdots$	5	$\cdots$	7
$3x-1$ $x-5$	$+$ $-$	$+$ $-$	$+$ 0	$+$ $+$	$+$ $+$
$\varphi'(x)=-(3x-1)(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\varphi(x)=8x^2-x^3-5x$	14	$\nearrow$	50	$\searrow$	14

関数 ψ は, 　　において最大値 　　　をとり, 　　と 　　とにおいて最小値 　　　　をとる.

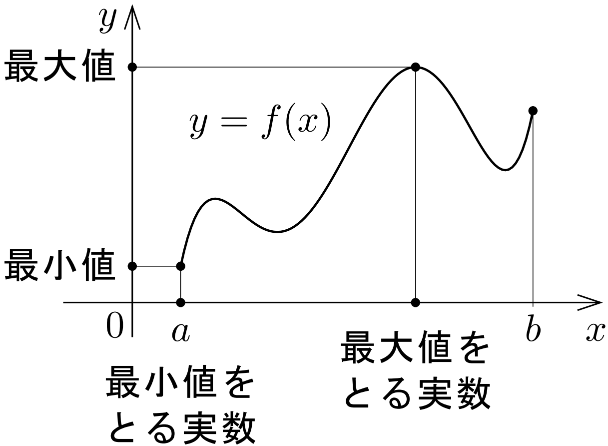
$\boxed{問 5.5.1}$ 区間 $[2,7]$ を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$ ($2 \leq x \leq 7$) と定める. ψ の最大値・最小値を調べよ.

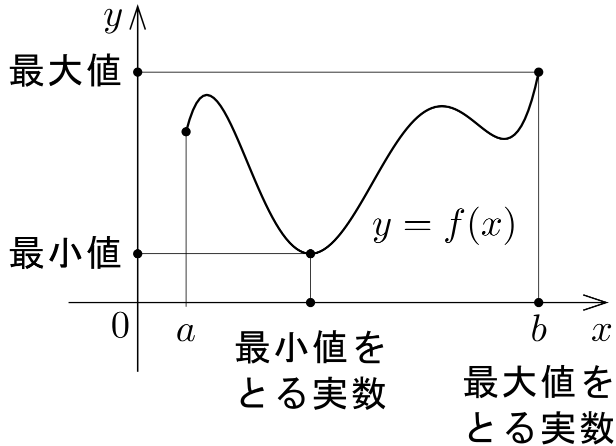
区間 $[2,7]$ の各実数 x について $\psi'(x) = -3x^2 + 16x - 5 = -(3x-1)(x-5)$. $\psi'(x) = 0$ とすると, $(3x-1)(x-5) = 0$, $2 \leq x \leq 7$ より $x = 5$. 更に, $\psi(2) = 14$, $\psi(5) = 50$, $\psi(7) = 14$. 増減表は次のようになる.

x	2	$\cdots$	5	$\cdots$	7
$3x-1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\varphi'(x) = -(3x-1)(x-5)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$\varphi(x) = 8x^2 - x^3 - 5x$	14	$\nearrow$	50	$\searrow$	14

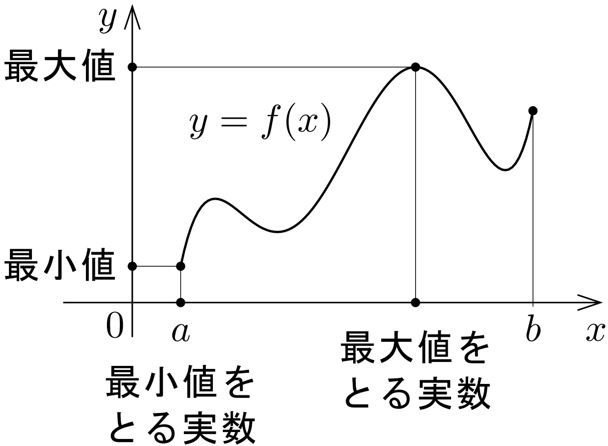
関数 ψ は, 5 において最大値 50 をとり, 2 と 7 とにおいて最小値 14 をとる. $\boxed{終}$

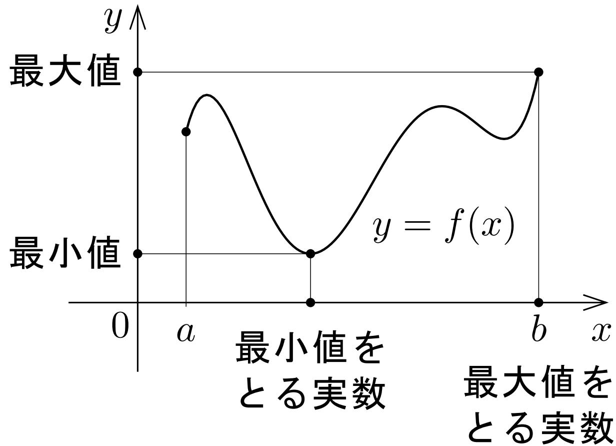
実数 a, b について $a < b$ とする．区間 $[a, b]$ を定義域とする関数 f は $[a, b]$ において微分可能であるとする．座標平面の f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになる．





実数 a,b について $a<b$ とする．区間 $[a,b]$ を定義域とする関数 f は $[a,b]$ において微分可能であるとする．座標平面の f のグラフにおいて，最大値・最小値は例えば次の図のようになる．





次のことが成り立つ：f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである．

f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである.

f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである.

f が p において極値をとるとき $f'(p)=0$ なので,

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば,

$f'(p)=0$ または $p=a$ または $p=b$.

f の定義域 $[a,b]$ の実数 p について，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

p で f は極値をとるかまたは p は定義域の端点の実数 a か b かである．

f が p において極値をとるとき $f'(p)=0$ なので，

f が p において最大値あるいは最小値をとるならば，

$$f'(p)=0 \text{ または } p=a \text{ または } p=b \ .$$

よって，$f'(p)=0$ である p に対する $f(p)$ と $f(a)$ と $f(b)$ との中で，最大の実数が f の最大値であり，最小の実数が f の最小値である．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める. 関数 g の最大値・最小値を調べる.

$\boxed{例}$ 区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \dfrac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x\right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right)(-\sin x) - \cos x \\ &= -\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x \ . \end{aligned}$$

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\left(x-\frac{6}{5}\right)\cos x-\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\left(x-\frac{6}{5}\right)\cos x-\sin x\right\}=\cos x+\left(x-\frac{6}{5}\right)(-\sin x)-\cos x \\ &= -\left(x-\frac{6}{5}\right)\sin x\ . \end{aligned}$$

$g'(x)=0$ とする：

$\boxed{\text{例}}$ **区間** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x\right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right)(-\sin x) - \cos x \\
&= -\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x\ .
\end{aligned}
$$

$g'(x) = 0$ とする： $-\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x = 0$ より $x - \frac{6}{5} = 0$ または $\sin x = 0$ ；

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので， $x = \frac{6}{5}$ または $x = 0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ **区間** $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x) = \left(x - \dfrac{6}{5}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\left(x - \frac{6}{5}\right)\cos x - \sin x\right\} = \cos x + \left(x - \frac{6}{5}\right)(-\sin x) - \cos x \\ &= -\left(x - \frac{6}{5}\right)\sin x \ . \end{aligned}$$

$g'(x) = 0$ とする： $-\left(x - \dfrac{6}{5}\right)\sin x = 0$ より $x - \dfrac{6}{5} = 0$ または $\sin x = 0$ ； $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので， $x = \dfrac{6}{5}$ または $x = 0$ ．従って，関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p = -\dfrac{\pi}{2}, 0, \dfrac{6}{5}, \dfrac{\pi}{2}$ ．

例 区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 g を $g(x)=\left(x-\frac{6}{5}\right)\cos x-\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$ と定める．関数 g の最大値・最小値を調べる．

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\left(x-\frac{6}{5}\right)\cos x-\sin x\right\}=\cos x+\left(x-\frac{6}{5}\right)(-\sin x)-\cos x$$
$$=-\left(x-\frac{6}{5}\right)\sin x\ .$$

$g'(x)=0$ とする： $-\left(x-\frac{6}{5}\right)\sin x=0$ より $x-\frac{6}{5}=0$ または $\sin x=0$ ； $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ なので， $x=\frac{6}{5}$ または $x=0$ ．従って，関数 g が実数 p において最大値または最小値をとるならば $p=-\frac{\pi}{2},0,\frac{6}{5},\frac{\pi}{2}$ ．

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1\ ,\qquad g(0)=-\frac{6}{5}\ ,\qquad g\left(\frac{6}{5}\right)=-\sin\frac{6}{5}\ ,\qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1\ .$$

区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$

は単調増加なので, $0 < \dfrac{6}{5} < \dfrac{\pi}{2}$

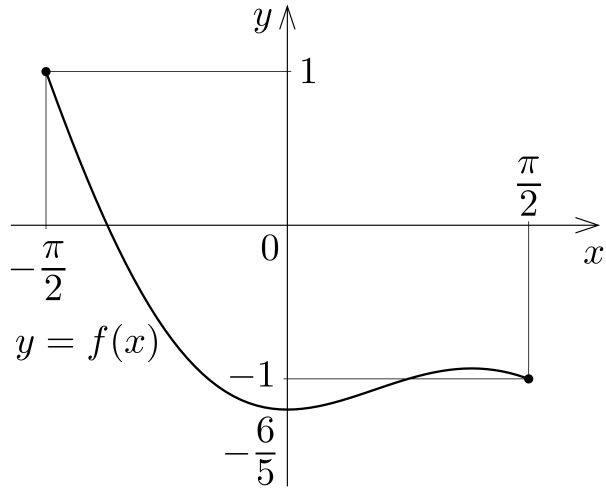
より $\sin 0 < \sin \dfrac{6}{5} < \sin \dfrac{\pi}{2}$ な

ので $0 < \sin \dfrac{6}{5} < 1$, よって

$-1 < -\sin \dfrac{6}{5} < 0$ なので,

$$g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{6}{5}\right) < g\left(-\frac{\pi}{2}\right) .$$

区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので，$0 < \dfrac{6}{5} < \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin 0 < \sin\dfrac{6}{5} < \sin\dfrac{\pi}{2}$ なので $0 < \sin\dfrac{6}{5} < 1$，よって $-1 < -\sin\dfrac{6}{5} < 0$ なので，



$$g(0) < g\left(\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{6}{5}\right) < g\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

関数 g は，$-\dfrac{\pi}{2}$ において最大値 1 をとり，0 において最小値 $-\dfrac{6}{5}$ をとる．

終

$\boxed{問5.5.2}$ 区間 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \left(x + \dfrac{4}{3}\right)\cos x - \sin x$ $\left(\ -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\ \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right)\cos x\right\} =$$

$$= \qquad\qquad\qquad .$$

$f'(x) = 0$ とする： $\qquad\qquad = 0$ より $\qquad = 0$ または $\qquad = 0$ ；

$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので， $x = \qquad$ または $x = \quad$ ．

$$f\left(\qquad\right) = \qquad, \qquad f(\quad) = \qquad, \qquad f\left(\quad\right) = \qquad, \qquad f\left(\quad\right) = \quad .$$

$\boxed{\text{問}5.5.2}$ **区間** $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\left(x+\frac{4}{3}\right)\cos x-\sin x$ $\left(\ -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\ \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\sin x+\left(\frac{5}{4}-x\right)\cos x\right\}=\cos x-\left(\frac{5}{4}-x\right)\sin x-\cos x$$
$$=\left(x-\frac{5}{4}\right)\sin x\ .$$

$f'(x)=0$ とする：$\left(x-\frac{5}{4}\right)\sin x=0$ より $\qquad=0$ または $\qquad=0$ ；

$-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ なので， $x=\qquad$ または $x=\qquad$.

$$f\left(\qquad\right)=\qquad,\qquad f(\quad)=\qquad,\qquad f\left(\quad\right)=\qquad,\qquad f\left(\quad\right)=\qquad.$$

$\boxed{\text{問}5.5.2}$ **区間** $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x) = \left(x + \frac{4}{3}\right)\cos x - \sin x$ $\left(\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\ \right)$ **と定める．関数** f **の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right)\cos x\right\} = \cos x - \left(\frac{5}{4} - x\right)\sin x - \cos x$$

$$= \left(x - \frac{5}{4}\right)\sin x \ .$$

$f'(x) = 0$ とする： $\left(x - \frac{5}{4}\right)\sin x = 0$ より $x - \frac{5}{4} = 0$ または $\sin x = 0$;

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ なので， $x = \frac{5}{4}$ または $x = 0$.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \qquad , \qquad f(0) = \qquad , \qquad f\left(\frac{5}{4}\right) = \qquad , \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \qquad .$$

$\boxed{\text{問}5.5.2}$ **区間** $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \left(x + \dfrac{4}{3}\right)\cos x - \sin x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \right)$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left\{\sin x + \left(\frac{5}{4} - x\right)\cos x\right\} = \cos x - \left(\frac{5}{4} - x\right)\sin x - \cos x$$
$$= \left(x - \frac{5}{4}\right)\sin x \ .$$

$f'(x) = 0$ とする： $\left(x - \dfrac{5}{4}\right)\sin x = 0$ より $x - \dfrac{5}{4} = 0$ または $\sin x = 0$ ；

$-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ なので， $x = \dfrac{5}{4}$ または $x = 0$ ．

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \ , \qquad f(0) = \frac{5}{4} \ , \qquad f\left(\frac{5}{4}\right) = \sin\frac{5}{4} \ , \qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \ .$$

$0<\dfrac{5}{4}<\dfrac{\pi}{2}$ で，区間 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので，

$\sin 0<\sin\dfrac{5}{4}<\sin\dfrac{\pi}{2}$ ，つまり $0<\sin\dfrac{4}{3}<1$ ．よって

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)<f\left(\frac{5}{4}\right)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(0)\ .$$

関数 f は，0 において最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとり，$-\dfrac{\pi}{2}$ において最小値 -1 をとる．

終

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない．

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない．関数 f が実数 p において最小値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \leq f(x)$ であることを示さなければならない．

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない．関数 f が実数 p において最小値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \leq f(x)$ であることを示さなければならない．

例えば，定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f の最大値・最小値を調べるには，$f(x)$ の値の極限 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ を考える必要がある．

関数 f が実数 p において最大値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \geq f(x)$ であることを示さなければならない．関数 f が実数 p において最小値をとることを示すためには，f の定義域の各実数 x に対して $f(p) \leq f(x)$ であることを示さなければならない．

例えば，定義域が区間 $[0, \infty)$ である関数 f の最大値・最小値を調べるには，$f(x)$ の値の極限 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x)$ を考える必要がある．$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ のときは f の最大値はない．$\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$ のときは f の最小値はない．$x \to \infty$ のとき $f(x)$ が収束するときは，f の最大値・最小値はあったり無かったりする．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ ($x\geq 0$) と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$\boxed{\text{例}}$ **区間** $[0,\infty)$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ **(** $x \geq 0$ **) と定める. 関数** f **の最大値・最小値を調べる.**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x^2-2x+7}{2x+1} = \frac{(8x-2)(2x+1)-(4x^2-2x+7)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2} \ .$$

例 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ （ $x\geq 0$ ） と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\frac{4x^2-2x+7}{2x+1} = \frac{(8x-2)(2x+1)-(4x^2-2x+7)\cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2} \ . \end{aligned}$$

$x\geq 0$ のとき， $2x+1\geq 1$ なので $(2x+1)^2>0$ ．

$\boxed{例}$ **区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ （ $x\ge 0$ ） と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．**

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{4x^2-2x+7}{2x+1}=\frac{(8x-2)(2x+1)-(4x^2-2x+7)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x\ge 0$ **のとき，** $2x+1\ge 1$ **なので** $(2x+1)^2>0$ ． $0<x<1$ **のとき，** $(x-1)(x+2)<0$ **なので** $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}<0$ ． $x>1$ **のとき，** $(x-1)(x+2)>0$ **なので** $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}>0$ ．

例 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ （ $x\geq 0$ ） と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{4x^2-2x+7}{2x+1}=\frac{(8x-2)(2x+1)-(4x^2-2x+7)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x\geq 0$ のとき， $2x+1\geq 1$ なので $(2x+1)^2>0$ ． $0<x<1$ のとき，$(x-1)(x+2)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}<0$ ． $x>1$ のとき，$(x-1)(x+2)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}>0$ ．関数 f は，区間 $[0,1]$ において単調減少であり，区間 $[1,\infty)$ において単調増加である．

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x^2-2x+7}{2x+1}$ ($x\geq 0$) と定める．関数 f の最大値・最小値を調べる．

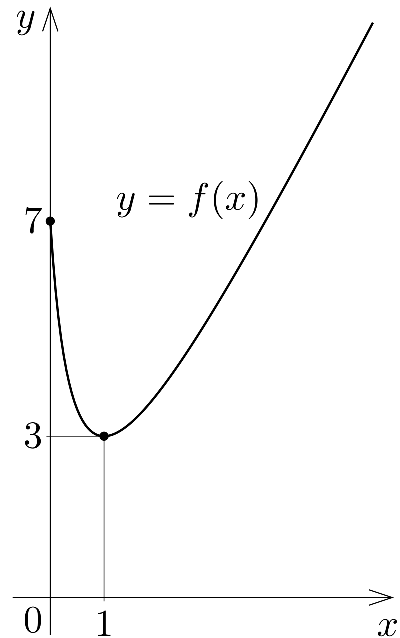
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{4x^2-2x+7}{2x+1}=\frac{(8x-2)(2x+1)-(4x^2-2x+7)\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{8(x^2+x-2)}{(2x+1)^2}$$
$$=\frac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x\geq 0$ のとき，$2x+1\geq 1$ なので $(2x+1)^2>0$ ． $0<x<1$ のとき，$(x-1)(x+2)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}<0$ ． $x>1$ のとき，$(x-1)(x+2)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{8(x-1)(x+2)}{(2x+1)^2}>0$ ．関数 f は，区間 $[0,1]$ において単調減少であり，区間 $[1,\infty)$ において単調増加である．$f(1)=3$ ． f は 1 において最小値 3 をとる．

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - 2x + 7}{2x+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{x^2}\right)}{x\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \frac{4 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{7}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x}} \right) \\
&= \infty \quad .
\end{aligned}
$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-2x+7}{2x+1}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(4-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \frac{4-\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}\right)$$
$$= \infty \ .$$

関数 f は 1 において最小値 3 をとる.
f の最大値はない.



終

$\boxed{問 5.5.3}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{12x-x^2}{2x+1}$ と定める．
関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{12x-x^2}{2x+1}=$$

$$.$$

$x\geq 0$ のとき $\qquad >0$． $0<x<\quad$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}$

0． $x>\quad$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}\quad 0$． f は，区間 $[0,\ ]$ において単調　　であり，区間 $[\ ,\infty)$ において単調　　である．

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\quad\cdot\frac{\quad}{\quad}\right)=\qquad.$$

$f(\ )=\quad$． f は　において最　値　をとる． f の最　値はない．

$\boxed{\text{問}5.5.3}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{12x-x^2}{2x+1}$ と定める.
関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\frac{(12-2x)(2x+1)-(12x-x^2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=-\frac{2(x^2+x-6)}{(2x+1)^2}$$
$$=-\frac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}\quad .$$

$x\geq 0$ のとき $(2x+1)^2>0$. $0<x<\quad$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}$ $\quad 0$. $x>\quad$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}\quad 0$. f は, 区間 $[0,\ ]$ において単調　　であり, 区間 $[\ ,\infty)$ において単調　　である.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\quad\cdot\frac{\quad}{\quad}\right)=\qquad .$$

$f(\ )=\quad$. f は　　において最　値　　をとる. f の最　値はない.

$\boxed{\text{問}5.5.3}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{12x-x^2}{2x+1}$ と定める.
関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\frac{(12-2x)(2x+1)-(12x-x^2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=-\frac{2(x^2+x-6)}{(2x+1)^2}$$
$$=-\frac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x\geq 0$ のとき $(2x+1)^2>0$. $0<x<2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}>0$. $x>2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}<0$. f は, 区間 $[0,2]$ において単調増加であり, 区間 $[2,\infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\quad\cdot\frac{\quad}{\quad}\right)=\qquad .$$

$f(\quad)=\quad$. 関数 f は　において最　値　をとる. f の最　値はない.

$\boxed{\text{問}5.5.3}$ **区間** $[0,\infty)$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x)=\dfrac{12x-x^2}{2x+1}$ **と定める．関数** f **の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\frac{(12-2x)(2x+1)-(12x-x^2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=-\frac{2(x^2+x-6)}{(2x+1)^2}$$
$$=-\frac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x\geq 0$ のとき $(2x+1)^2>0$ ． $0<x<2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}>0$ ． $x>2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}<0$ ． f は，区間 $[0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,\infty)$ において単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{\frac{12}{x}-1}{2+\frac{1}{x}}\right)=-\infty\ .$$

$f(\quad)=\quad$ ．関数 f は　において最　値　をとる．f の最　値はない．

$\boxed{\text{問}5.5.3}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{12x-x^2}{2x+1}$ と定める.
関数 f の最大値・最小値を調べよ.

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\frac{(12-2x)(2x+1)-(12x-x^2)\cdot 2}{(2x+1)^2}=-\frac{2(x^2+x-6)}{(2x+1)^2}$$
$$=-\frac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}\ .$$

$x\geq 0$ のとき $(2x+1)^2>0$. $0<x<2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}>0$. $x>2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(x+3)}{(2x+1)^2}<0$. f は, 区間 $[0,2]$ において単調増加であり, 区間 $[2,\infty)$ において単調減少である.

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-x^2}{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot\frac{\dfrac{12}{x}-1}{2+\dfrac{1}{x}}\right)=-\infty\ .$$

$f(2)=4$. 関数 f は 2 において最大値 4 をとる. f の最小値はない. $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める．f の最大値と最小値とを調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$0 < x < 2$ のとき，$(x-2)(2x+1) < 0$ なので $f'(x) = \dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0$ ．

例 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める．f の最大値と最小値とを調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0<x<2$ のとき，$(x-2)(2x+1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}<0$.

$x>2$ のとき，$(x-2)(2x+1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}>0$.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める．f の最大値と最小値とを調べる．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$0 < x < 2$ のとき，$(x-2)(2x+1) < 0$ なので $f'(x) = \dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} < 0$ ．

$x > 2$ のとき，$(x-2)(2x+1) > 0$ なので $f'(x) = \dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} > 0$ ． f は，区間 $[0,2]$ において単調減少であり，区間 $[2, \infty)$ において単調増加である．

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x-3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

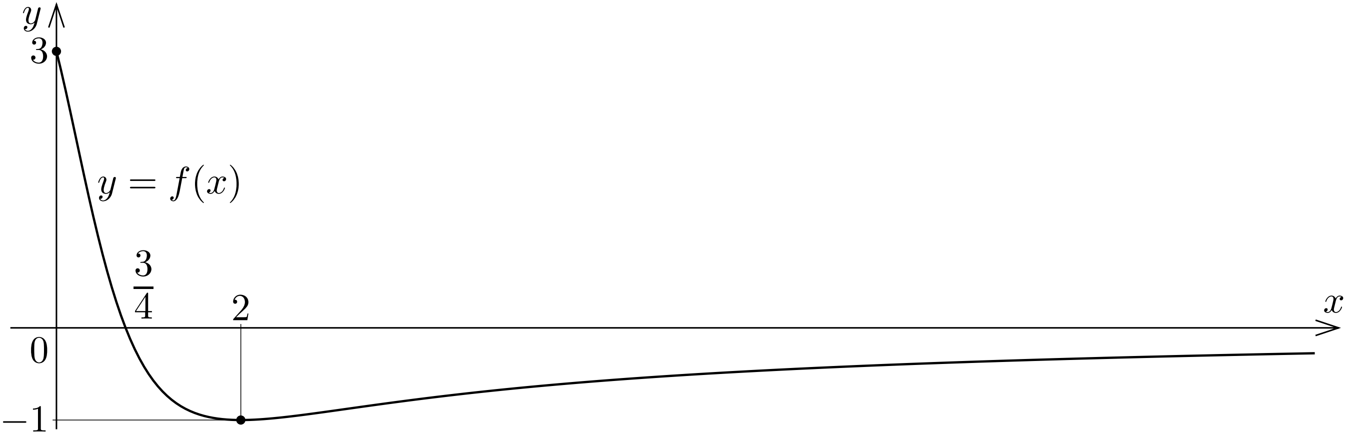
$0<x<2$ のとき, $(x-2)(2x+1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}<0$.

$x>2$ のとき, $(x-2)(2x+1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(2x+1)}{(x^2+1)^2}>0$. f は, 区間 $[0,2]$ において単調減少であり, 区間 $[2,\infty)$ において単調増加である. $f(2)=1$. f は 2 において最小値 1 をとる.

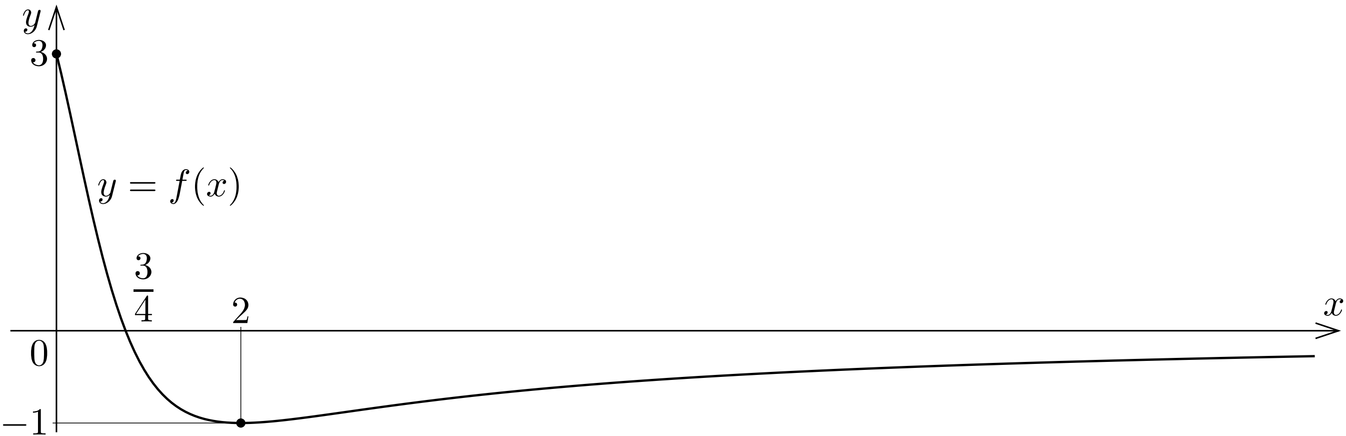
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4x-3}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{x\left(4-\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\frac{4-\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$$

$$= 0 \ .$$

$f(0) = 3$ ． $x > \dfrac{3}{4}$ のとき $3x - 4 > 0$ なので $f(x) = -\dfrac{4x-3}{x^2+1} < 0$ ． f は 0 において最大値 3 をとる.



$f(0)=3$ ． $x>\dfrac{3}{4}$ のとき $3x-4>0$ なので $f(x)=-\dfrac{4x-3}{x^2+1}<0$ ． f は 0 において最大値 3 をとる.



関数 f は, 0 において最大値 3 をとり, 2 において最小値 -1 をとる. 終

$\boxed{\text{問}5.5.4}$ 区間 $[0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x-1}{x^2+3} =$$

$0 < x <$ 　のとき $f'(x) =$ 　　　　　　　　　0 ．$x >$ 　のとき

$f'(x) =$ 　　　　　　　　　0 ．f は，区間 $[0,\ ]$ において単調　　であり，

区間 $[\ , \infty)$ において単調　　である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\qquad\right)}{\left(\qquad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad \cdot \frac{\quad}{\quad}\right) = \quad .$$

$f(\ ) =$ 　．$f(\ ) =$ 　　．$x >$ 　のとき $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2+3} > 0$ ．

$\boxed{\text{問}5.5.4}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x-1}{x^2+3} = -\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2} = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} .$$

$0<x<\quad$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}\quad 0$． $x>\quad$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}\quad 0$． f は，区間 $[0,\quad]$ において単調　　であり，区間 $[\quad,\infty)$ において単調　　である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\qquad\right)}{\left(\qquad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad\cdot\frac{\quad}{\quad}\right) = \quad .$$

$f(\quad)=\quad$． $f(\quad)=\quad$． $x>\quad$ のとき $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}>0$ ．

$\boxed{\text{問}5.5.4}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x-1}{x^2+3} = -\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2} = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}\ .$$

$0<x<2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}>0$ ． $x>2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}<0$ ． f は，区間 $[0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,\infty)$ において単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\qquad\quad\right)}{\left(\qquad\quad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\qquad \cdot \frac{\qquad}{\qquad}\right) = \qquad .$$

$f(2)=\qquad$ ． $f(0)=\qquad\qquad$ ． $x>\qquad$ のとき $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}>0$ ．

$\boxed{問5.5.4}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{4x-1}{x^2+3}=-\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2}=-\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}\ .$$

$0<x<2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}>0$ ． $x>2$ のとき $f'(x)=-\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2}<0$ ． f は，区間 $[0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,\infty)$ において単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{4-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}\right)=0\ .$$

$f(2)=\quad$ ． $f(0)=\qquad$ ． $x>\quad$ のとき $f(x)=\dfrac{4x-1}{x^2+3}>0$ ．

$\boxed{\text{問}5.5.4}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2+3}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{4x-1}{x^2+3} = -\frac{2(2x^2-x-6)}{(x^2+3)^2} = -\frac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} \ .$$

$0 < x < 2$ のとき $f'(x) = -\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} > 0$ ． $x > 2$ のとき $f'(x) = -\dfrac{2(x-2)(2x+3)}{(x^2+3)^2} < 0$ ． f は，区間 $[0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,\infty)$ において単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(4-\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{4-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x^2}}\right) = 0 \ .$$

$f(2) = 1$ ． $f(0) = -\dfrac{1}{3}$ ． $x > \dfrac{1}{4}$ のとき $f(x) = \dfrac{4x-1}{x^2+3} > 0$ ．

関数 f は，2 において最大値 1 をとり，0 において最小値 $-\dfrac{1}{3}$ をとる．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = -\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}<0$.

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}<0$.

$x>\dfrac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}>0$.

$\boxed{\text{例}}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める. f の最大値と最小値とを調べる.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2} .$$

$0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}<0$. $x>\dfrac{1}{2}$ のとき, $(x+2)(2x-1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}>0$. f は, 区間 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ において単調減少であり, 区間 $\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$ において単調増加である.

$\boxed{例}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=-\dfrac{4x+3}{x^2+1}$ と定める．f の最大値と最小値とを調べる．

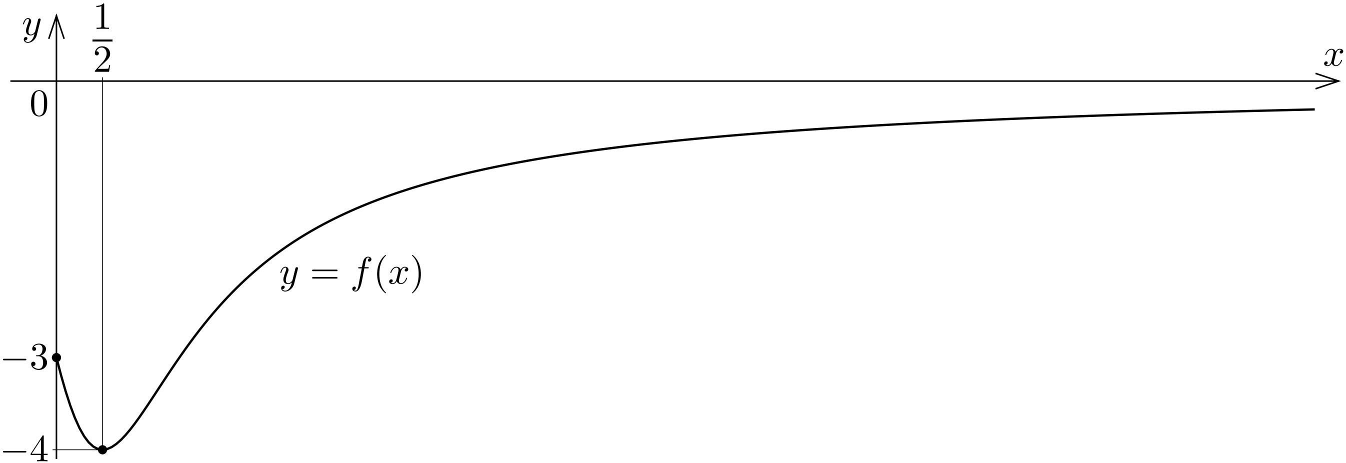
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}\ .$$

$0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき，$(x+2)(2x-1)<0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}<0$.

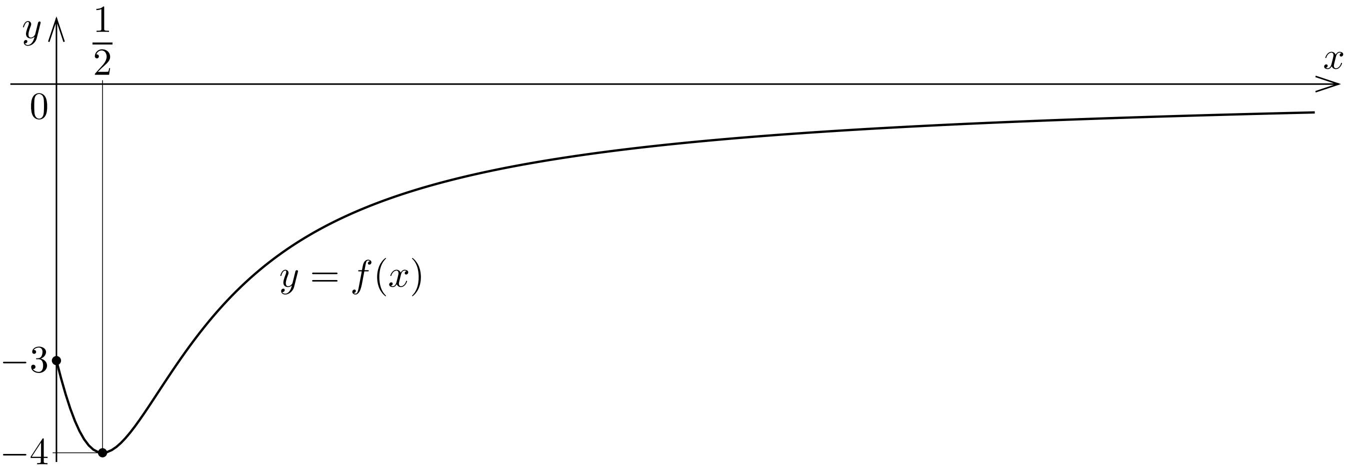
$x>\dfrac{1}{2}$ のとき，$(x+2)(2x-1)>0$ なので $f'(x)=\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+1)^2}>0$. f は，区間 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ において単調減少であり，区間 $\left[\dfrac{1}{2},\infty\right)$ において単調増加である．$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-4$. f は $\dfrac{1}{2}$ において最小値 -4 をとる．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4x+3}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left\{-\frac{x\left(4+\dfrac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\frac{4+\dfrac{3}{x}}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$$
$$= 0\ .$$

$f(0) = -3$ なので $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 > f(0)$. f の最大値はない.



$f(0)=-3$ なので $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=0>f(0)$ ． f の最大値はない.



関数 f は $\frac{1}{2}$ において最小値 -4 をとる. f の最大値はない. 終

$\boxed{問5.5.5}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{3x+1}{3x^2+1} =$$

$0 < x < \quad$ のとき $f'(x) = \qquad\qquad 0$ ． $x > \quad$ のとき

$f'(x) = \qquad\qquad 0$ ． f は，区間 $\left[0, \quad\right]$ において単調　　であり，

区間 $\left[\quad, \infty\right)$ において単調　　である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\qquad\right)}{\left(\qquad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad \cdot \frac{\quad}{\quad}\right) = \quad .$$

$f\left(\quad\right) = \quad$ ． $f(0) = \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)$ ．

$\boxed{\text{問}5.5.5}$ 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}\ .$$

$0<x<\qquad$ のとき $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}\qquad 0$．$x>\qquad$ のとき $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}\qquad 0$．$f$ は，区間 $\left[0,\qquad\right]$ において単調　　であり，区間 $\left[\qquad,\infty\right)$ において単調　　である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\qquad\right)}{\left(\qquad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\qquad\cdot\frac{\qquad}{\qquad}\right) = \qquad.$$

$f\left(\qquad\right)=\qquad$．$f(0)=\qquad\qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$．

問5.5.5 区間 $[0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x^2+1}$ と定める．関数 f の最大値・最小値を調べよ．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} .$$

$0<x<\dfrac{1}{3}$ のとき $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}>0$ ． $x>\dfrac{1}{3}$ のとき $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}<0$ ． f は，区間 $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ において単調増加であり，区間 $\left[\dfrac{1}{3},\infty\right)$ において単調減少である．

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\qquad\right)}{\left(\qquad\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\quad\cdot\frac{\qquad}{\qquad}\right) = \quad .$$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \quad$ ． $f(0) = \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ．

$\boxed{\text{問}5.5.5}$ **区間** $[0,\infty)$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x^2+1}$ **と定める．関数** f **の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{3x+1}{3x^2+1} = -\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2} = -\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2} \ .$$

$0<x<\dfrac{1}{3}$ **のとき** $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}>0$ ． $x>\dfrac{1}{3}$ **のとき** $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}<0$ ． f **は，区間** $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ **において単調増加であり，区間** $\left[\dfrac{1}{3},\infty\right)$ **において単調減少である．**

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{3+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x^2}}\right) = 0 \ .$$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \qquad$ ． $f(0) = \qquad \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ ．

$\boxed{\text{問}5.5.5}$ **区間** $[0,\infty)$ **を定義域とする関数** f **を** $f(x)=\dfrac{3x+1}{3x^2+1}$ **と定める．関数** f **の最大値・最小値を調べよ．**

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\frac{3x+1}{3x^2+1}=-\frac{3(3x^2+2x-1)}{(3x^2+1)^2}=-\frac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}\ .$$

$0<x<\dfrac{1}{3}$ **のとき** $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}>0$ ． $x>\dfrac{1}{3}$ **のとき** $f'(x)=-\dfrac{3(x+1)(3x-1)}{(3x^2+1)^2}<0$ ． f **は，区間** $\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$ **において単調増加であり，区間** $\left[\dfrac{1}{3},\infty\right)$ **において単調減少である．**

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{3x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{3+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x^2}}\right)=0\ .$$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$ ． $f(0)=1>\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ ．

関数 f は $\frac{1}{3}$ において最大値 $\frac{3}{2}$ をとる． f の最小値はない． $\boxed{\text{終}}$