

5.7 不等式の証明

区間 I を定義域とする関数 f と g に関する述語

“ 区間 I の任意の実数 x について $f(x) \geq g(x)$ ”

は次の述語と同値である：

“ 区間 I の任意の実数 x について $f(x) - g(x) \geq 0$ ” ；

区間 I を定義域とする関数 f と g に関する述語

“ 区間 I の任意の実数 x について $f(x) \geq g(x)$ ”

は次の述語と同値である：

“ 区間 I の任意の実数 x について $f(x) - g(x) \geq 0$ ” ；

更にこの述語は次の述語と同値である：

“ 区間 I を定義域とする関数 $f(x) - g(x)$ の最小値は 0 以上である ” .

区間 I を定義域とする関数 f と g に関する述語

“ 区間 I の任意の実数 x について $f(x) \geq g(x)$ ”

は次の述語と同値である：

“ 区間 I の任意の実数 x について $f(x) - g(x) \geq 0$ ” ；

更にこの述語は次の述語と同値である：

“ 区間 I を定義域とする関数 $f(x) - g(x)$ の最小値は 0 以上である ” .

こうして次のことが分かる：

“ 区間 I の任意の実数 x に付いて $f(x) \geq g(x)$ である ”

ことを示すためには,

“ 区間 I を定義域とする関数 $f(x) - g(x)$ の最小値は 0 以上である ”

ことを示せばよい.

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

不等式 $\frac{9}{x} \geq 6 - x$ を導くために，不等式 $\frac{9}{x} - (6 - x) \geq 0$ を導く；

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

不等式 $\frac{9}{x} \geq 6 - x$ を導くために、不等式 $\frac{9}{x} - (6 - x) \geq 0$ を導く；そのために、関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$ とおいて、 $f(x) \geq 0$ であることを示す；

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

不等式 $\frac{9}{x} \geq 6 - x$ を導くために、不等式 $\frac{9}{x} - (6 - x) \geq 0$ を導く；そのために、関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$ とおいて、 $f(x) \geq 0$ であることを示す；つまり、関数 f の最小値が 0 以上であることをいう。

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$
($x > 0$) と定める.

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$
($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$ ($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$ より $x^2 - 9 = 0$, $x = \pm 3$, $x > 0$ なので $x = 3$.

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$ ($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$ より $x^2 - 9 = 0$, $x = \pm 3$, $x > 0$ なので $x = 3$.

$0 < x < 3$ のとき, $x^2 < 3^2 = 9$ なので $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} < 0$.

$x > 3$ のとき, $x^2 > 3^2 = 9$ なので $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} > 0$.

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$ ($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$ より $x^2 - 9 = 0$, $x = \pm 3$, $x > 0$ なので $x = 3$.

$0 < x < 3$ のとき, $x^2 < 3^2 = 9$ なので $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} < 0$.

$x > 3$ のとき, $x^2 > 3^2 = 9$ なので $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} > 0$.

従って, 関数 f は, 区間 $(0, 3]$ において単調減少であり, 区間 $[3, \infty)$ において単調増加である.

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$ ($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$ より $x^2 - 9 = 0$, $x = \pm 3$, $x > 0$ なので $x = 3$.

$0 < x < 3$ のとき, $x^2 < 3^2 = 9$ なので $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} < 0$.

$x > 3$ のとき, $x^2 > 3^2 = 9$ なので $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} > 0$.

従って, 関数 f は, 区間 $(0, 3]$ において単調減少であり, 区間 $[3, \infty)$ において単調増加である. よって, f の最小値は $f(3) = 0$.

例 次のことを証明する：任意の正の実数 x について $\frac{9}{x} \geq 6 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$ ($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$ より $x^2 - 9 = 0$, $x = \pm 3$, $x > 0$ なので $x = 3$.

$$0 < x < 3 \text{ のとき, } x^2 < 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} < 0 .$$

$$x > 3 \text{ のとき, } x^2 > 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} > 0 .$$

従って, 関数 f は, 区間 $(0, 3]$ において単調減少であり, 区間 $[3, \infty)$ において単調増加である. よって, f の最小値は $f(3) = 0$. 故に, 任意の正の実数 x について, $f(x) \geq 0$ つまり $\frac{9}{x} - (6 - x) \geq 0$ なので, $\frac{9}{x} \geq 6 - x$. **終**

問5.7.1 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4}{x^2} - (3 - x)$ ($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{x^2} - (3 - x) \right) = \frac{-8}{x^3} + 1 .$$

$f'(x) = 0$ とすると、 $\frac{-8}{x^3} + 1 = 0$, $\frac{-8}{x^3} = -1$, x は実数なので $x = 2$.

$0 < x < 2$ のとき、 $x^3 < 8 = 2^3$ なので $f'(x) = \frac{-8}{x^3} + 1 > 0$. $x > 2$ のとき、

$x^3 > 8 = 2^3$ なので $f'(x) = \frac{-8}{x^3} + 1 < 0$. 従って、関数 f は、区間 $(0, 2]$ に

おいて単調増加であり、区間 $[2, \infty)$ において単調減少である. よって、 f の

最大値は $f(2) = \frac{4}{2^2} - (3 - 2) = 1 - 1 = 0$. 故に、任意の正の実数 x について、 $f(x) \leq 0$ つまり

$$\frac{4}{x^2} - (3 - x) \leq 0 \text{ なので, } \frac{4}{x^2} \geq 3 - x .$$

問5.7.1 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4}{x^2} - (3 - x)$ ($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = -\frac{8}{x^3} + 1 = \frac{x^3 - 8}{x^3} .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $\frac{x^3 - 8}{x^3} = 0$, $x^3 - 8 = 0$, x は実数なので $x = 2$.

$0 < x < 2$ のとき, $x^3 < 8$ であるので $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3} < 0$. $x > 2$ のとき,

$x^3 > 8$ であるので $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3} > 0$. 従って, 関数 f は, 区間 $(0, 2]$ に

おいて単調減少であり, 区間 $[2, \infty)$ において単調増加である. よって, f の
最値は $f(2) = \frac{4}{2^2} - (3 - 2) = 1 - 1 = 0$. 故に, 任意の正の実数 x について, $f(x) \geq 0$ つまり

$$\frac{4}{x^2} - (3 - x) \geq 0 \text{ であるので, } \frac{4}{x^2} \geq 3 - x .$$

問5.7.1 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = \frac{4}{x^2} - (3 - x)$ ($x > 0$) と定める.

$$f'(x) = -\frac{8}{x^3} + 1 = \frac{x^3 - 8}{x^3} .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $\frac{x^3 - 8}{x^3} = 0$, $x^3 - 8 = 0$, x は実数なので $x = 2$.

$0 < x < 2$ のとき, $x^3 < 2^3 = 8$ なので $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3} < 0$. $x > 2$ のとき,

$x^3 > 2^3 = 8$ なので $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3} > 0$. 従って, 関数 f は, 区間 $(0, 2]$ に

おいて単調減少であり, 区間 $[2, \infty)$ において単調増加である. よって, f の最小値は $f(2) = 0$. 故に, 任意の正の実数 x について, $f(x) \geq 0$ つまり

$\frac{4}{x^2} - (3 - x) \geq 0$ なので, $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$.

終

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

不等式 $e^x \geq \frac{x+2}{e}$ を導くために、不等式 $e^x - \frac{x+2}{e} \geq 0$ を導く；

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

不等式 $e^x \geq \frac{x+2}{e}$ を導くために、不等式 $e^x - \frac{x+2}{e} \geq 0$ を導く；そのために、関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ とおいて、 $f(x) \geq 0$ であることを示す；

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

不等式 $e^x \geq \frac{x+2}{e}$ を導くために、不等式 $e^x - \frac{x+2}{e} \geq 0$ を導く；そのために、関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ とおいて、 $f(x) \geq 0$ であることを示す；つまり、関数 f の最小値が 0 以上であることを示す.

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ と定める.

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $e^x - \frac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \frac{1}{e}$, よって $x = \ln \frac{1}{e} = -1$.

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $e^x - \frac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \frac{1}{e}$, よって $x = \ln \frac{1}{e} = -1$.

$x < -1$ のとき, $e^x < e^{-1} = \frac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0$.

$x > -1$ のとき, $e^x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0$.

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $e^x - \frac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \frac{1}{e}$, よって $x = \ln \frac{1}{e} = -1$.

$x < -1$ のとき, $e^x < e^{-1} = \frac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0$.

$x > -1$ のとき, $e^x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0$.

従って, 関数 f は, 区間 $(-\infty, -1]$ において単調減少であり, 区間 $[-1, \infty)$ において単調増加である.

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $e^x - \frac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \frac{1}{e}$, よって $x = \ln \frac{1}{e} = -1$.

$x < -1$ のとき, $e^x < e^{-1} = \frac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0$.

$x > -1$ のとき, $e^x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0$.

従って, 関数 f は, 区間 $(-\infty, -1]$ において単調減少であり, 区間 $[-1, \infty)$ において単調増加である. よって, f の最小値は $f(-1) = e^{-1} - \frac{1}{e} = 0$.

例 次のことを証明する：任意の実数 x について $e^x \geq \frac{x+2}{e}$.

実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$ と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$ とすると, $e^x - \frac{1}{e} = 0$ なので $e^x = \frac{1}{e}$, よって $x = \ln \frac{1}{e} = -1$.

$x < -1$ のとき, $e^x < e^{-1} = \frac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0$.

$x > -1$ のとき, $e^x > e^{-1} = \frac{1}{e}$ なので $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0$.

従って, 関数 f は, 区間 $(-\infty, -1]$ において単調減少であり, 区間 $[-1, \infty)$ において単調増加である. よって, f の最小値は $f(-1) = e^{-1} - \frac{1}{e} = 0$.

故に, 任意の実数 x について, $f(x) \geq 0$ つまり $e^x - \frac{x+2}{e} \geq 0$ なので,

$$e^x \geq \frac{x+2}{e} .$$

終

問5.7.2 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\ln x \leq ex - 2$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = ex - 2 - \ln x$ ($x > 0$) と定める. $f'(x) =$ ($x > 0$) . $f'(x) = 0$ とすると,

$$= 0, \quad x = \quad . \quad 0 < x < \quad \text{のとき, } \frac{1}{x} \quad \text{なので } f'(x) = \quad 0 .$$

$x > \quad$ のとき, $\frac{1}{x} \quad$ なので $f'(x) = \quad 0$. 関数 f は, 区間 $(0, \quad]$

において単調 \quad であり, 区間 $[\quad, \infty)$ において単調 \quad である. よって関数

f は \quad において最 \quad 値 $f(\quad) = \quad$ をとる. 故に, 任意の正の実数 x につい

て, $f(x) \quad 0$ つまり $ex - 2 - \ln x \quad 0$ なので, $\ln x \leq ex - 2$.

問5.7.2 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\ln x \leq ex - 2$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = ex - 2 - \ln x$ ($x > 0$) と定める. $f'(x) = e - \frac{1}{x}$ ($x > 0$) . $f'(x) = 0$ とすると, $e - \frac{1}{x} = 0$, $x = \frac{1}{e}$. $0 < x < \frac{1}{e}$ のとき, $\frac{1}{x} > e$ なので $f'(x) = e - \frac{1}{x} < 0$. $x > \frac{1}{e}$ のとき, $\frac{1}{x} < e$ なので $f'(x) = e - \frac{1}{x} > 0$. 関数 f は, 区間 $(0, \frac{1}{e}]$ において単調減少であり, 区間 $[\frac{1}{e}, \infty)$ において単調増加である. よって関数 f は $x = \frac{1}{e}$ において最小値 $f(\frac{1}{e}) = e \cdot \frac{1}{e} - 2 - \ln \frac{1}{e} = 1 - 2 - (-1) = 0$ をとる. 故に, 任意の正の実数 x について, $f(x) \geq 0$ つまり $ex - 2 - \ln x \geq 0$ なので, $\ln x \leq ex - 2$.

問5.7.2 次のことを証明せよ：任意の正の実数 x について $\ln x \leq ex - 2$.

正の実数の全体 $(0, \infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x) = ex - 2 - \ln x$ ($x > 0$) と定める. $f'(x) = e - \frac{1}{x}$ ($x > 0$) . $f'(x) = 0$ とすると, $e - \frac{1}{x} = 0$, $x = \frac{1}{e}$. $0 < x < \frac{1}{e}$ のとき, $\frac{1}{x} > e$ なので $f'(x) = e - \frac{1}{x} < 0$. $x > \frac{1}{e}$ のとき, $\frac{1}{x} < e$ なので $f'(x) = e - \frac{1}{x} > 0$. 関数 f は, 区間 $(0, \frac{1}{e}]$ において単調減少であり, 区間 $[\frac{1}{e}, \infty)$ において単調増加である. よって関数 f は $\frac{1}{e}$ において最小値 $f(\frac{1}{e}) = 0$ をとる. 故に, 任意の正の実数 x について, $f(x) \geq 0$ つまり $ex - 2 - \ln x \geq 0$ なので, $\ln x \leq ex - 2$. **終**