

## 5.7 不等式の証明

区間  $I$  を定義域とする関数  $f$  と  $g$  に関する述語

“区間  $I$  の任意の実数  $x$  について  $f(x) \geq g(x)$  ”

は次の述語と同値である：

“区間  $I$  の任意の実数  $x$  について  $f(x) - g(x) \geq 0$  ” ；

区間  $I$  を定義域とする関数  $f$  と  $g$  に関する述語

“区間  $I$  の任意の実数  $x$  について  $f(x) \geq g(x)$ ”

は次の述語と同値である：

“区間  $I$  の任意の実数  $x$  について  $f(x) - g(x) \geq 0$ ”；

更にこの述語は次の述語と同値である：

“区間  $I$  を定義域とする関数  $f(x) - g(x)$  の最小値は  $0$  以上である”。

区間  $I$  を定義域とする関数  $f$  と  $g$  に関する述語

“区間  $I$  の任意の実数  $x$  について  $f(x) \geq g(x)$  ”

は次の述語と同値である：

“区間  $I$  の任意の実数  $x$  について  $f(x) - g(x) \geq 0$  ” ；

更にこの述語は次の述語と同値である：

“区間  $I$  を定義域とする関数  $f(x) - g(x)$  の最小値は  $0$  以上である” .

こうして次のことが分かる：

“区間  $I$  の任意の実数  $x$  に付いて  $f(x) \geq g(x)$  である”

ことを示すためには,

“区間  $I$  を定義域とする関数  $f(x) - g(x)$  の最小値は  $0$  以上である”

ことを示せばよい.

例 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  .

**例** 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  .

不等式  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  を導くために、不等式  $\frac{9}{x} - (6 - x) \geq 0$  を導く；

**例** 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  .

不等式  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  を導くために、不等式  $\frac{9}{x} - (6 - x) \geq 0$  を導く；そのために、関数  $f$  を  $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$  とおいて、 $f(x) \geq 0$  であることを示す；

**例** 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  .

不等式  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  を導くために、不等式  $\frac{9}{x} - (6 - x) \geq 0$  を導く；そのために、関数  $f$  を  $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$  とおいて、 $f(x) \geq 0$  であることを示す；つまり、関数  $f$  の最小値が  $0$  以上であることをいう。

**例** 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  . 正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$  ( $x > 0$ ) と定める.

**例** 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  . 正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$  ( $x > 0$ ) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

**例** 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  . 正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$  ( $x > 0$ ) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$  より  $x^2 - 9 = 0$  ,  $x = \pm 3$  ,  $x > 0$  なので  $x = 3$  .

**例** 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  . 正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$  ( $x > 0$ ) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$  より  $x^2 - 9 = 0$  ,  $x = \pm 3$  ,  $x > 0$  なので  $x = 3$  .

$0 < x < 3$  のとき,  $x^2 < 3^2 = 9$  なので  $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} < 0$  .

$x > 3$  のとき,  $x^2 > 3^2 = 9$  なので  $f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} > 0$  .

**例** 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  . 正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$  ( $x > 0$ ) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$  より  $x^2 - 9 = 0$  ,  $x = \pm 3$  ,  $x > 0$  なので  $x = 3$  .

$$0 < x < 3 \text{ のとき, } x^2 < 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} < 0 .$$

$$x > 3 \text{ のとき, } x^2 > 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} > 0 .$$

従って, 関数  $f$  は, 区間  $(0, 3]$  において単調減少であり, 区間  $[3, \infty)$  において単調増加である.

**例** 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  . 正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$  ( $x > 0$ ) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$  より  $x^2 - 9 = 0$ ,  $x = \pm 3$ ,  $x > 0$  なので  $x = 3$  .

$$0 < x < 3 \text{ のとき, } x^2 < 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} < 0 .$$

$$x > 3 \text{ のとき, } x^2 > 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} > 0 .$$

従って, 関数  $f$  は, 区間  $(0, 3]$  において単調減少であり, 区間  $[3, \infty)$  において単調増加である. よって,  $f$  の最小値は  $f(3) = 0$  .

**例** 次のことを証明する：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  . 正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{9}{x} - (6 - x)$  ( $x > 0$ ) と定める.

$$f'(x) = -\frac{9}{x^2} - (-1) = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2} \quad (x > 0) .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $\frac{x^2 - 9}{x^2} = 0$  より  $x^2 - 9 = 0$ ,  $x = \pm 3$ ,  $x > 0$  なので  $x = 3$  .

$$0 < x < 3 \text{ のとき, } x^2 < 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} < 0 .$$

$$x > 3 \text{ のとき, } x^2 > 3^2 = 9 \text{ なので } f'(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} > 0 .$$

従って, 関数  $f$  は, 区間  $(0, 3]$  において単調減少であり, 区間  $[3, \infty)$  において単調増加である. よって,  $f$  の最小値は  $f(3) = 0$  . 故に, 任意の正の実数  $x$  について,  $f(x) \geq 0$  つまり  $\frac{9}{x} - (6 - x) \geq 0$  なので,  $\frac{9}{x} \geq 6 - x$  . **終**

**問5.7.1** 次のことを証明せよ：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$  .

正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{4}{x^2} - (3 - x)$  ( $x > 0$ ) と定める.

$$f'(x) = \quad = \quad .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $\quad = 0$ ,  $\quad = 0$ ,  $(\quad)(\quad) = 0$ ,

$x$  は実数なので  $x = \quad$ .  $0 < x < \quad$  のとき,  $x^3 < \quad = \quad$  なので

$f'(x) = \quad < 0$ .  $x > \quad$  のとき,  $x^3 > \quad = \quad$  なので  $f'(x) = \quad > 0$ .

関数  $f$  は, 区間  $(0, \quad]$  において単調  $\quad$  であり, 区間  $[\quad, \infty)$  において単調

である. よって,  $f$  の最 値は  $f(\quad) = \quad$ . 故に, 任意の正の実数  $x$  につい

て,  $f(x) \quad$  つまり  $\quad \geq 0$  なので,  $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$  .

**問5.7.1** 次のことを証明せよ：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$  .

正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{4}{x^2} - (3 - x)$  ( $x > 0$ ) と定める.

$$f'(x) = -\frac{8}{x^3} + 1 = \frac{x^3 - 8}{x^3} .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $\frac{x^3 - 8}{x^3} = 0$  ,  $x^3 - 8 = 0$  ,  $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$  ,

$x$  は実数なので  $x = 2$  .  $0 < x < 2$  のとき,  $x^3 < 8 = 2^3$  なので

$f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3} < 0$  .  $x > 2$  のとき,  $x^3 > 8 = 2^3$  なので  $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3} > 0$  .

関数  $f$  は, 区間  $(0, 2]$  において単調減少であり, 区間  $[2, \infty)$  において単調

増加である. よって,  $f$  の最大値は  $f(2) = \frac{4}{2^2} - (3 - 2) = 0$  . 故に, 任意の正の実数  $x$  につい

て,  $f(x) \geq 0$  であり, つまり  $\frac{4}{x^2} - (3 - x) \geq 0$  なので,  $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$  .

**問5.7.1** 次のことを証明せよ：任意の正の実数  $x$  について  $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$  .

正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \frac{4}{x^2} - (3 - x)$  ( $x > 0$ ) と定める.

$$f'(x) = -\frac{8}{x^3} + 1 = \frac{x^3 - 8}{x^3} .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $\frac{x^3 - 8}{x^3} = 0$  ,  $x^3 - 8 = 0$  ,  $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 0$  ,

$x$  は実数なので  $x = 2$  .  $0 < x < 2$  のとき,  $x^3 < 2^3 = 8$  なので

$f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3} < 0$  .  $x > 2$  のとき,  $x^3 > 2^3 = 8$  なので  $f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3} > 0$  .

関数  $f$  は, 区間  $(0, 2]$  において単調減少であり, 区間  $[2, \infty)$  において単調増加である. よって,  $f$  の最小値は  $f(2) = 0$  . 故に, 任意の正の実数  $x$  について,

$f(x) \geq 0$  つまり  $\frac{4}{x^2} - (3 - x) \geq 0$  なので,  $\frac{4}{x^2} \geq 3 - x$  .

□

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  .

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  .

不等式  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  を導くために、不等式  $e^x - \frac{x+2}{e} \geq 0$  を導く；

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  .

不等式  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  を導くために、不等式  $e^x - \frac{x+2}{e} \geq 0$  を導く；そのために、関数  $f$  を  $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$  とおいて、 $f(x) \geq 0$  であることを示す；

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  .

不等式  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  を導くために、不等式  $e^x - \frac{x+2}{e} \geq 0$  を導く；そのために、関数  $f$  を  $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$  とおいて、 $f(x) \geq 0$  であることを示す；つまり、関数  $f$  の最小値が  $0$  以上であることを示す.

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  . 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$  と定める.

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  . 実数全体を定

義域とする関数  $f$  を  $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$  と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  . 実数全体を定

義域とする関数  $f$  を  $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$  と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $e^x - \frac{1}{e} = 0$  なので  $e^x = \frac{1}{e}$  , よって  $x = \ln \frac{1}{e} = -1$  .

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  . 実数全体を定

義域とする関数  $f$  を  $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$  と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $e^x - \frac{1}{e} = 0$  なので  $e^x = \frac{1}{e}$  , よって  $x = \ln \frac{1}{e} = -1$  .

$x < -1$  のとき,  $e^x < e^{-1} = \frac{1}{e}$  なので  $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0$  .

$x > -1$  のとき,  $e^x > e^{-1} = \frac{1}{e}$  なので  $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0$  .

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  . 実数全体を定

義域とする関数  $f$  を  $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$  と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $e^x - \frac{1}{e} = 0$  なので  $e^x = \frac{1}{e}$  , よって  $x = \ln \frac{1}{e} = -1$  .

$x < -1$  のとき,  $e^x < e^{-1} = \frac{1}{e}$  なので  $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0$  .

$x > -1$  のとき,  $e^x > e^{-1} = \frac{1}{e}$  なので  $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0$  .

従って, 関数  $f$  は, 区間  $(-\infty, -1]$  において単調減少であり, 区間  $[-1, \infty)$  において単調増加である.

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  . 実数全体を定

義域とする関数  $f$  を  $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$  と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $e^x - \frac{1}{e} = 0$  なので  $e^x = \frac{1}{e}$  , よって  $x = \ln \frac{1}{e} = -1$  .

$x < -1$  のとき,  $e^x < e^{-1} = \frac{1}{e}$  なので  $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0$  .

$x > -1$  のとき,  $e^x > e^{-1} = \frac{1}{e}$  なので  $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0$  .

従って, 関数  $f$  は, 区間  $(-\infty, -1]$  において単調減少であり, 区間  $[-1, \infty)$  において単調増加である. よって,  $f$  の最小値は  $f(-1) = e^{-1} - \frac{1}{e} = 0$  .

**例** 次のことを証明する：任意の実数  $x$  について  $e^x \geq \frac{x+2}{e}$  . 実数全体を定

義域とする関数  $f$  を  $f(x) = e^x - \frac{x+2}{e}$  と定める.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( e^x - \frac{x+2}{e} \right) = e^x - \frac{1}{e} .$$

$f'(x) = 0$  とすると,  $e^x - \frac{1}{e} = 0$  なので  $e^x = \frac{1}{e}$  , よって  $x = \ln \frac{1}{e} = -1$  .

$x < -1$  のとき,  $e^x < e^{-1} = \frac{1}{e}$  なので  $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} < 0$  .

$x > -1$  のとき,  $e^x > e^{-1} = \frac{1}{e}$  なので  $f'(x) = e^x - \frac{1}{e} > 0$  .

従って, 関数  $f$  は, 区間  $(-\infty, -1]$  において単調減少であり, 区間  $[-1, \infty)$  において単調増加である. よって,  $f$  の最小値は  $f(-1) = e^{-1} - \frac{1}{e} = 0$  .

故に, 任意の実数  $x$  について,  $f(x) \geq 0$  つまり  $e^x - \frac{x+2}{e} \geq 0$  なので,

$$e^x \geq \frac{x+2}{e} .$$

**終**

**問5.7.2** 次のことを証明せよ：任意の正の実数  $x$  について  $\ln x \leq ex - 2$  .

正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = ex - 2 - \ln x$  ( $x > 0$ ) と定める.  $f'(x) =$  ( $x > 0$ ) .  $f'(x) = 0$  とすると,

$$= 0, \quad x = \quad . \quad 0 < x < \quad \text{のとき, } \frac{1}{x} \quad \text{なので } f'(x) = \quad 0 .$$

$x > \quad$  のとき,  $\frac{1}{x} \quad$  なので  $f'(x) = \quad 0$  . 関数  $f$  は, 区間  $(0, \quad]$

において単調  $\quad$  であり, 区間  $[\quad, \infty)$  において単調  $\quad$  である. よって関数

$f$  は  $\quad$  において最  $\quad$  値  $f(\quad) = \quad$  をとる. 故に, 任意の正の実数  $x$  につい

て,  $f(x) \geq 0$  つまり  $ex - 2 - \ln x \geq 0$  なので,  $\ln x \leq ex - 2$  .

**問5.7.2** 次のことを証明せよ：任意の正の実数  $x$  について  $\ln x \leq ex - 2$  .

正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = ex - 2 - \ln x$  ( $x > 0$ ) と定める.  $f'(x) = e - \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) .  $f'(x) = 0$  とすると,  $e - \frac{1}{x} = 0$  ,  $x = \frac{1}{e}$  .  $0 < x < \frac{1}{e}$  のとき,  $\frac{1}{x} > e$  なので  $f'(x) = e - \frac{1}{x} < 0$  .  $x > \frac{1}{e}$  のとき,  $\frac{1}{x} < e$  なので  $f'(x) = e - \frac{1}{x} > 0$  . 関数  $f$  は, 区間  $(0, \frac{1}{e}]$  において単調減少であり, 区間  $[\frac{1}{e}, \infty)$  において単調増加である. よって関数  $f$  は  $x = \frac{1}{e}$  において最小値  $f(\frac{1}{e}) = e \cdot \frac{1}{e} - 2 - \ln \frac{1}{e} = 1 - 2 - (-1) = 0$  をとる. 故に, 任意の正の実数  $x$  について,  $f(x) \geq 0$  つまり  $ex - 2 - \ln x \geq 0$  なので,  $\ln x \leq ex - 2$  .

**問5.7.2** 次のことを証明せよ：任意の正の実数  $x$  について  $\ln x \leq ex - 2$  .

正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = ex - 2 - \ln x$  ( $x > 0$ ) と定める.  $f'(x) = e - \frac{1}{x}$  ( $x > 0$ ) .  $f'(x) = 0$  とすると,  
 $e - \frac{1}{x} = 0$  ,  $x = \frac{1}{e}$  .  $0 < x < \frac{1}{e}$  のとき,  $\frac{1}{x} > e$  なので  $f'(x) = e - \frac{1}{x} < 0$  .  
 $x > \frac{1}{e}$  のとき,  $\frac{1}{x} < e$  なので  $f'(x) = e - \frac{1}{x} > 0$  . 関数  $f$  は, 区間  $(0, \frac{1}{e}]$  において単調減少であり, 区間  $[\frac{1}{e}, \infty)$  において単調増加である. よって関数  $f$  は  $\frac{1}{e}$  において最小値  $f(\frac{1}{e}) = 0$  をとる. 故に, 任意の正の実数  $x$  について,  $f(x) \geq 0$  つまり  $ex - 2 - \ln x \geq 0$  なので,  $\ln x \leq ex - 2$  . **終**