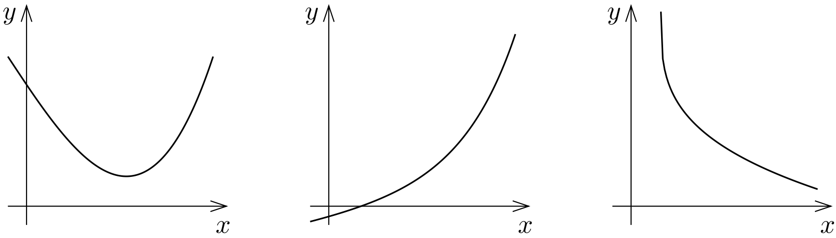
5.8 関数のグラフの凹凸

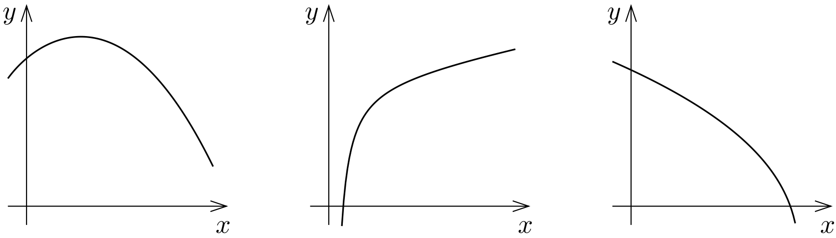
まず直観的な話から始める.

xy 座標平面における関数 $y=f(x)$ のグラフについて，次の図のように，下側に出張っているとき，言い替えると，下方に膨らんでいるとき，$y=f(x)$ のグラフは下に凸であるという.



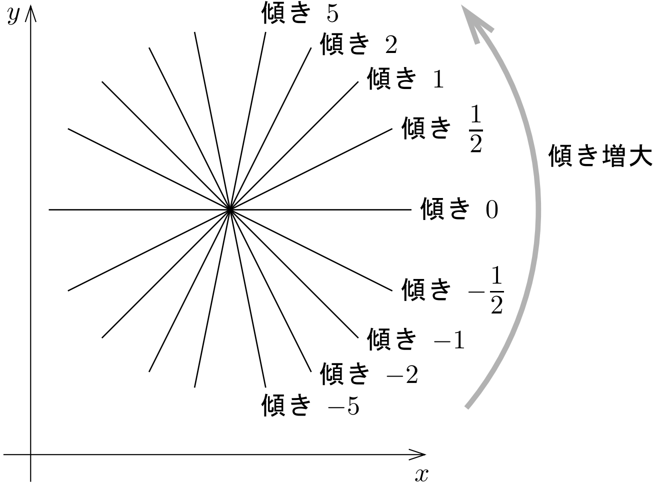
グラフが下に凸の状態

　xy 座標平面における関数 $y=f(x)$ のグラフについて，次の図のように，上側に出張っているとき，言い替えると，上方に膨らんでいるとき，$y=f(x)$ のグラフは上に凸であるという.

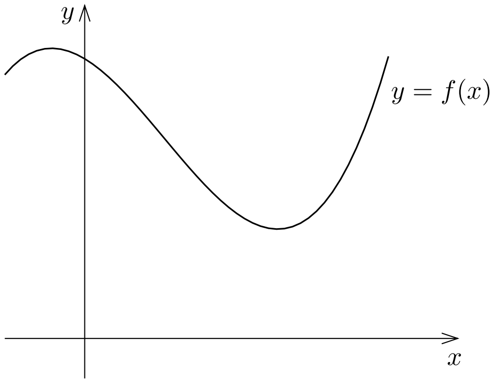


グラフが上に凸の状態

もう少しきちんと考える．次のことを注意する：座標平面における直線について，傾きが大きいほど右上がりになり，傾きが小さいほど右下がりになる．



区間 I が関数 f の定義に含まれているとする. 関数 f のグラフが区間 I において下に凸であるとは次のことを意味する:

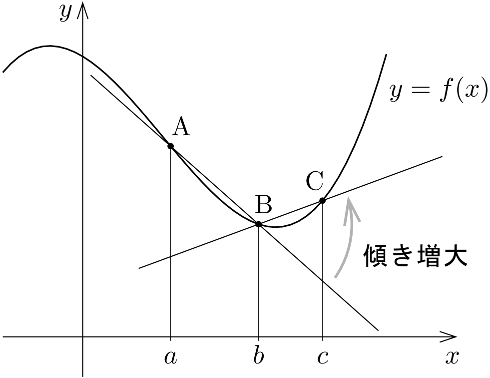


　区間 I が関数 f の定義に含まれているとする．関数 f のグラフが区間 I において下に凸であるとは次のことを意味する：$a \leq b \leq c$ である I の各実数 a, b, c に対して，座標平面における関数 f のグラフに属す 3 点

$$\mathrm{A} = \bigl(a, f(a)\bigr)\ ,$$

$$\mathrm{B} = \bigl(b, f(b)\bigr)\ ,$$

$$\mathrm{C} = \bigl(c, f(c)\bigr)$$



をとると，直線 BC の傾きが直線 AB の傾き以上である．このことを式で表す．

関数 f のグラフの点 $\mathrm{A}=\bigl(a,f(a)\bigr)$ と $\mathrm{B}=\bigl(b,f(b)\bigr)$ と $\mathrm{C}=\bigl(c,f(c)\bigr)$ とについて，

$$\mathrm{A}=\bigl(a,f(a)\bigr) \text{ と } \mathrm{B}=\bigl(b,f(b)\bigr) \text{ とが属す直線 AB の傾きは } \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ ,$$

$$\mathrm{B}=\bigl(b,f(b)\bigr) \text{ と } \mathrm{C}=\bigl(c,f(c)\bigr) \text{ とが属す直線 BC の傾きは } \frac{f(c)-f(b)}{c-b}\ .$$

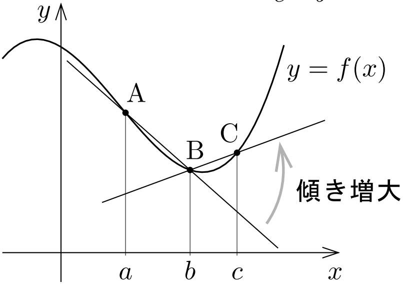
関数 f のグラフの点 $\mathrm{A}=\bigl(a, f(a)\bigr)$ と $\mathrm{B}=\bigl(b, f(b)\bigr)$ と $\mathrm{C}=\bigl(c, f(c)\bigr)$ とについて,

$\mathrm{A}=\bigl(a, f(a)\bigr)$ と $\mathrm{B}=\bigl(b, f(b)\bigr)$ とが属す直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

$\mathrm{B}=\bigl(b, f(b)\bigr)$ と $\mathrm{C}=\bigl(c, f(c)\bigr)$ とが属す直線 BC の傾きは $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

直線 BC の傾きが直線 AB の傾き以上であるということは次の不等式で表せる：

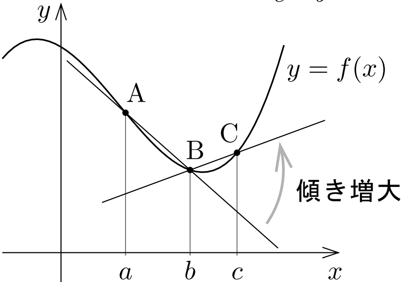
$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$



関数 f のグラフの点 $\mathrm{A}=\bigl(a,f(a)\bigr)$ と $\mathrm{B}=\bigl(b,f(b)\bigr)$ と $\mathrm{C}=\bigl(c,f(c)\bigr)$ とについて,

$\mathrm{A}=\bigl(a,f(a)\bigr)$ と $\mathrm{B}=\bigl(b,f(b)\bigr)$ とが属す直線 AB の傾きは $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,

$\mathrm{B}=\bigl(b,f(b)\bigr)$ と $\mathrm{C}=\bigl(c,f(c)\bigr)$ とが属す直線 BC の傾きは $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.



直線 BC の傾きが直線 AB の傾き以上であるということは次の不等式で表せる：

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$

関数 f のグラフが区間 I において下に凸であることを次のように定義する：I の任意の点 a,b,c に対して,

$$a<b<c \text{ ならば } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} .$$

関数 f のグラフが区間 I において下に凸であることを次のように定義する：
I の任意の点 a, b, c に対して，

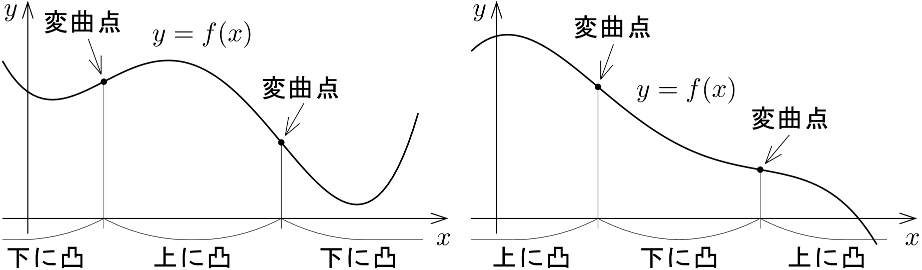
$$a < b < c \text{ ならば } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} .$$

関数 f のグラフが区間 I において上に凸であることを次のように定義する：
I の任意の点 a, b, c に対して，

$$a < b < c \text{ ならば } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} .$$

関数のグラフにおいて，下に凸の範囲と上に凸の範囲との境目である点を変曲点という.

関数のグラフにおいて，下に凸の範囲と上に凸の範囲との境目である点を変曲点という．つまり，関数 f のグラフに属す点 P について，P を境にグラフが下に凸から上に凸に変わるとき，及び，P を境にグラフが上に凸から下に凸に変わるとき，点 P を f のグラフの変曲点という．



関数 f のグラフにおける下に凸と上に凸

5.2 節で次の定義を述べた.

関数 f の定義域が区間 I を含むとする. f が I において広義の単調増加であるとは次のことである:

$$I \text{ の任意の実数 } u \text{ と } v \text{ とについて} \quad u < v \text{ ならば } f(u) \leq f(v) \ .$$

f が I において広義の単調減少であるとは次のことである:

$$I \text{ の任意の実数 } u \text{ と } v \text{ とについて} \quad u < v \text{ ならば } f(u) \geq f(v) \ .$$

次の定理を述べた.

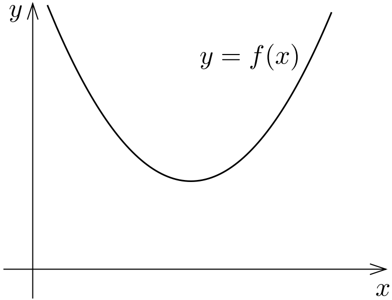
定理　区間 I で関数 f が微分可能であるとする.

I において f が広義の単調増加 $\iff$ I の各実数 x について $f'(x) \geq 0$.

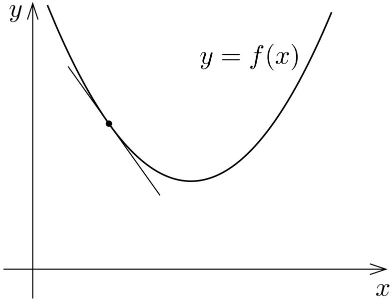
I において f が広義の単調減少 $\iff$ I の各実数 x について $f'(x) \leq 0$.

　関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする.

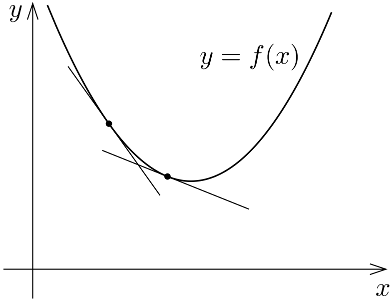
　関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする．右図を見ると直感的に分かるように，f のグラフが下に凸であるとは，x の値が大きくなると f のグラフの点 $\big(x, f(x)\big)$ における接線の傾きつまり微分係数 $f'(x)$ が



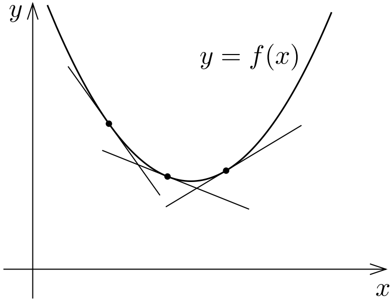
　関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする．右図を見ると直感的に分かるように，f のグラフが下に凸であるとは，x の値が大きくなると f のグラフの点 $\bigl(x,f(x)\bigr)$ における接線の傾きつまり微分係数 $f'(x)$ が



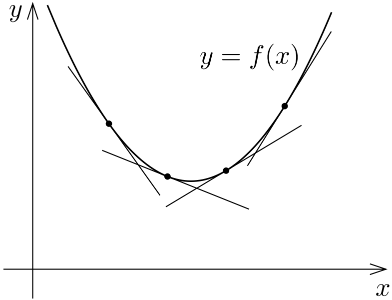
　関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする．右図を見ると直感的に分かるように，f のグラフが下に凸であるとは，x の値が大きくなると f のグラフの点 $\big(x, f(x)\big)$ における接線の傾きつまり微分係数 $f'(x)$ が



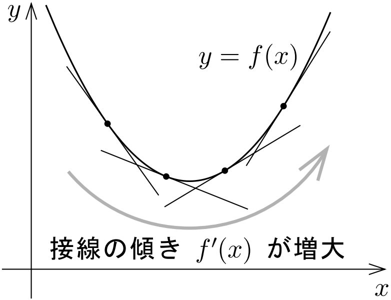
関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする．右図を見ると直感的に分かるように，f のグラフが下に凸であるとは，x の値が大きくなると f のグラフの点 $\bigl(x, f(x)\bigr)$ における接線の傾きつまり微分係数 $f'(x)$ が



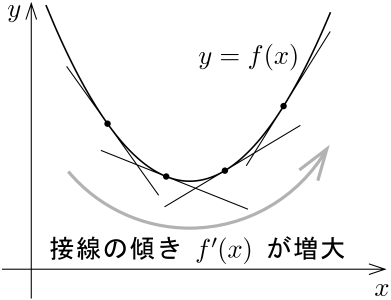
関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする．右図を見ると直感的に分かるように，f のグラフが下に凸であるとは，x の値が大きくなると f のグラフの点 $\big(x, f(x)\big)$ における接線の傾きつまり微分係数 $f'(x)$ が



　関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする．右図を見ると直感的に分かるように，f のグラフが下に凸であるとは，x の値が大きくなると f のグラフの点 $\bigl(x, f(x)\bigr)$ における接線の傾きつまり微分係数 $f'(x)$ が大きくなる（正確には小さくならない）ことである．

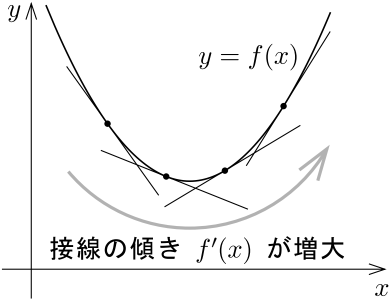


関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする．右図を見ると直感的に分かるように，f のグラフが下に凸であるとは，x の値が大きくなると f のグラフの点 $\big(x, f(x)\big)$ における接線の傾きつまり微分係数 $f'(x)$ が大きくなる（正確には小さくならない）ことである．



$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加}.$$

関数 f は区間 I において 2 回微分可能とする．右図を見ると直感的に分かるように，f のグラフが下に凸であるとは，x の値が大きくなると f のグラフの点 $(x, f(x))$ における接線の傾きつまり微分係数 $f'(x)$ が大きくなる（正確には小さくならない）ことである．



$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加}.$$

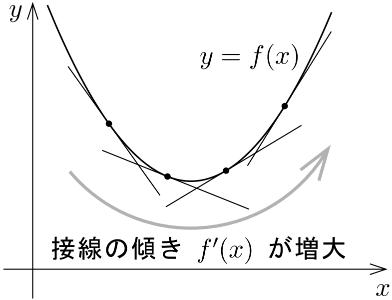
更に

$$I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加} \iff I \text{ において } f''(x) \geq 0 .$$

区間 I において関数 F が微分可能であるとき，

$$I \text{ において } F \text{ が広義の単調増加} \iff I \text{ において } F'(x) \geq 0 .$$

関数 f は区間 I において2回微分可能とする．右図を見ると直感的に分かるように，f のグラフが下に凸であるとは，x の値が大きくなると f のグラフの点 $\big(x, f(x)\big)$ における接線の傾きつまり微分係数 $f'(x)$ が大きくなる（正確には小さくならない）ことである．



$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加} .$$

更に

$$I \text{ において } f' \text{ が広義の単調増加} \iff I \text{ において } f''(x) \geq 0 .$$

故に

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \geq 0 .$$

このようにして次の定理が証明される.

定理　区間 I で関数 f は 2 回微分可能であるとする. I に属す実数 p について, 点 $\big(p, f(p)\big)$ が f のグラフの変曲点ならば $f''(p)=0$. また,

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが下に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \geq 0 \ ,$$

$$I \text{ において } f \text{ のグラフが上に凸} \iff I \text{ において } f''(x) \leq 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める. 関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる. まず g の第 2 次導関数 g'' を求める.

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める．関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる．まず g の第 2 次導関数 g'' を求める．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 5x) = 3x^2 - 12x + 5 \ ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 5) = 6x - 12 = 6(x - 2) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める．関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる．まず g の第 2 次導関数 g'' を求める．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 5x) = 3x^2 - 12x + 5 \ ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 5) = 6x - 12 = 6(x - 2) \ .$$

$g''(x) = 0$ とすると， $6(x - 2) = 0$ なので $x = 2$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める．関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる．まず g の第 2 次導関数 g'' を求める．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 5x) = 3x^2 - 12x + 5 \ ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 5) = 6x - 12 = 6(x-2) \ .$$

$g''(x) = 0$ とすると， $6(x-2) = 0$ なので $x = 2$ ．

$$x < 2 \text{ のとき } x - 2 < 0 \text{ なので } g''(x) = 6(x-2) < 0 \ ,$$

$$x > 2 \text{ のとき } x - 2 > 0 \text{ なので } g''(x) = 6(x-2) > 0 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める．関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる．まず g の第 2 次導関数 g'' を求める．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 5x) = 3x^2 - 12x + 5 \ ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 5) = 6x - 12 = 6(x-2) \ .$$

$g''(x) = 0$ とすると，$6(x-2) = 0$ なので $x = 2$.

$$x < 2 \ \text{のとき} \ x - 2 < 0 \ \text{なので} \ g''(x) = 6(x-2) < 0 \ ,$$

$$x > 2 \ \text{のとき} \ x - 2 > 0 \ \text{なので} \ g''(x) = 6(x-2) > 0 \ .$$

従って，関数 g のグラフは，区間 $(-\infty, 2]$ において上に凸であり，区間 $[2, \infty)$ において下に凸である．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ と定める．関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べる．まず g の第 2 次導関数 g'' を求める．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 5x) = 3x^2 - 12x + 5 \ ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 12x + 5) = 6x - 12 = 6(x-2) \ .$$

$g''(x) = 0$ とすると，$6(x-2) = 0$ なので $x = 2$ ．

$$x < 2 \ \text{のとき} \ x - 2 < 0 \ \text{なので} \ g''(x) = 6(x-2) < 0 \ ,$$

$$x > 2 \ \text{のとき} \ x - 2 > 0 \ \text{なので} \ g''(x) = 6(x-2) > 0 \ .$$

従って，関数 g のグラフは，区間 $(-\infty, 2]$ において上に凸であり，区間 $[2, \infty)$ において下に凸である．また，$g(2) = -6$ なので，g のグラフの変曲点は $(2, -6)$ だけである． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 5.8.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 9x^2 - 2x^3 - 3x$ と定める．関数 f のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ．

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$f''(x) = 0$ とすると，　　　　$= 0$ なので $x =$ 　．$x <$ 　のとき，$2x$ 　　なので $f''(x) =$ 　　　　0．$x >$ 　のとき，$2x$ 　　なので $f''(x) =$ 　　　　0．従って，関数 f のグラフは，区間 $\left(-\infty, \quad\right]$ において　に凸であり，区間 $\left[\quad, \infty\right)$ において　に凸である．$f\left(\quad\right) =$ 　．f のグラフの変曲点は $\left(\quad , \quad\right)$ だけである．$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}5.8.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 9x^2 - 2x^3 - 3x$ と定める．関数 f のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ．

$$f'(x) = 18x - 6x^2 - 3 \ ,$$

$$f''(x) = 18 - 12x = 6(3 - 2x)$$

$f''(x) = 0$ とすると，$6(3-2x) = 0$ なので $x = \dfrac{3}{2}$ ．$x < \dfrac{3}{2}$ のとき，$2x \quad\ 3$ なので $f''(x) = 6(3-2x) \quad\ 0$ ．$x > \dfrac{3}{2}$ のとき，$2x \quad\ 3$ なので $f''(x) = 6(3-2x) \quad\ 0$ ．従って，関数 f のグラフは，区間 $\left(-\infty, \quad \right]$ において　に凸であり，区間 $\left[\quad ,\infty\right)$ において　に凸である．$f\left(\quad\right) = \quad$ ．f のグラフの変曲点は $\left(\quad , \quad\right)$ だけである． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 5.8.1}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = 9x^2 - 2x^3 - 3x$ と定める．関数 f のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ．

$$f'(x) = 18x - 6x^2 - 3 \ ,$$

$$f''(x) = 18 - 12x = 6(3 - 2x) \ .$$

$f''(x) = 0$ とすると，$6(3 - 2x) = 0$ なので $x = \dfrac{3}{2}$ ．$x < \dfrac{3}{2}$ のとき，$2x < 3$ なので $f''(x) = 6(3 - 2x) > 0$ ．$x > \dfrac{3}{2}$ のとき，$2x > 3$ なので $f''(x) = 6(3 - 2x) < 0$ ．従って，関数 f のグラフは，区間 $\left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$ において下に凸であり，区間 $\left[\dfrac{3}{2}, \infty\right)$ において上に凸である．$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 9$ ．f のグラフの変曲点は $\left(\dfrac{3}{2}, 9\right)$ だけである． $\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}5.8.2}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = e^{2x}(x-4)$ と定める．関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ．

$$g'(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad = e^{2x}(\qquad\qquad),$$

$$g''(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \ e^{2x}(x \qquad).$$

$e^{2x} > 0$ なので，$x <$ 　のとき $g''(x) =$ $e^{2x}(x$ 　　$)$ 　0，$x >$ 　のとき $g''(x) =$ $e^{2x}(x$ 　　$)$ 　0．従って，関数 g のグラフは，区間 $(-\infty,\ ]$ において　に凸であり，区間 $[\ ,\infty)$ において　に凸である．$g(\ ) =$ 　　．g のグラフの変曲点は（ ，　）だけである．

$\boxed{\text{問}5.8.2}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=e^{2x}(x-4)$ と定める．関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ．

$$g'(x)=2e^{2x}(x-4)+e^{2x}=e^{2x}(2x-7)\ ,$$

$$g''(x)=2e^{2x}(2x-7)+e^{2x}\cdot 2=4e^{2x}(x-3)\ .$$

$e^{2x}>0$ なので，$x<3$ のとき $g''(x)=4e^{2x}(x-3)$ 　 0 ，$x>3$ のとき $g''(x)=4e^{2x}(x-3)$ 　 0 ．従って，関数 g のグラフは，区間 $(-\infty,\ ]$ において 　 に凸であり，区間 $[\ ,\infty)$ において 　 に凸である．$g(\ )=$ 　 ．g のグラフの変曲点は（ ，　 ）だけである．

$\boxed{\text{問}5.8.2}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = e^{2x}(x-4)$ と定める．関数 g のグラフの凹凸の状態及び変曲点を調べよ．

$$g'(x) = 2e^{2x}(x-4) + e^{2x} = e^{2x}(2x-7) \ ,$$

$$g''(x) = 2e^{2x}(2x-7) + e^{2x} \cdot 2 = 4e^{2x}(x-3) \ .$$

$e^{2x} > 0$ なので， $x < 3$ のとき $g''(x) = 4e^{2x}(x-3) < 0$ ， $x > 3$ のとき $g''(x) = 4e^{2x}(x-3) > 0$ ．従って，関数 g のグラフは，区間 $(-\infty, 3]$ において上に凸であり，区間 $[3, \infty)$ において下に凸である． $g(3) = -e^6$ ． g のグラフの変曲点は $(3, -e^6)$ だけである． $\boxed{\text{終}}$