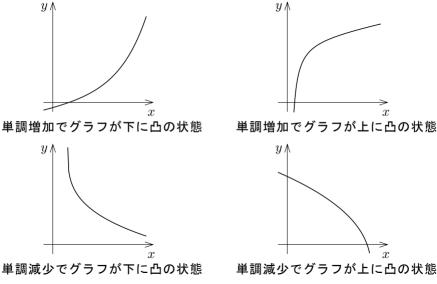
5.補遺2 関数のグラフの概形

関数のグラフの概形を描くためには、関数の値の増減とそのグラフの凹凸を 調べる.

関数が単調増加か単調減少かということとそのグラフが下に凸か上に凸かということの組合わせで、関数のグラフについて以下の 4 つの状態がある.



関数が単調増加でそのグラフが下に凸の状態を記号 🗸 で表し、 関数が単調増加でそのグラフが上に凸の状態を記号 / で表し、

これらの4つの状態を次のような記号で表す:

関数が単調減少でそのグラフが下に凸の状態を記号 📐 で表し、

関数が単調減少でそのグラフが上に凸の状態を記号 🤍 で表す.

関数のグラフの概形を描くためにはグラフが $\sqrt{}$, $\sqrt{}$, $\sqrt{}$, $\sqrt{}$ のうちのど

の状態かを調べる.

f'(x) > 0 である区間において単調増加であり、 f'(x) < 0 である区間において単調減少である.

5.3節で述べた定理より、微分可能な関数 f は、

- 5.3 節で述べた定理より、微分可能な関数 f は、 f'(x) > 0 である区間において単調増加であり f'(x) < 0 である区間において単調減少である.
- **5.8** 節で述べた定理より、2回微分可能な関数 f のグラフは、

 $f''(x) \geq 0$ である区間において下に凸であり, f''(x) < 0 である区間において上に凸である. f'(x)>0 である区間において単調増加であり、f'(x)<0 である区間において単調減少である.

5.3 節で述べた定理より、微分可能な関数 f は、

5.8節で述べた定理より,2回微分可能な関数 f のグラフは, $f''(x) \geq 0$ である区間において下に凸であり,

 $f''(x) \geq 0$ である区間において下に凸であり、 $f''(x) \leq 0$ である区間において上に凸である。これらのことより、2 回微分可能な関数 f について次のことが分かる:f'(x) > 0 かつ f''(x) > 0 である区間では \checkmark の状態であり、

f'(x)>0 かつ $f''(x)\geq 0$ である区間では \nearrow の状態であり、f'(x)>0 かつ $f''(x)\leq 0$ である区間では \nearrow の状態であり、f'(x)<0 かつ $f''(x)\geq 0$ である区間では \searrow の状態であり、f'(x)<0 かつ $f''(x)\leq 0$ である区間では \searrow の状態である.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=rac{1}{4}x^4-x^3+5$ と定める. 関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ,xy 座標平面において y=f(x) のグラフの概形を描く.

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+5$ と定める. 関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ,xy 座標平面において y=f(x) のグラフの概形を描く.まず関数 f の導関数 f' と第 2 次導関数 f'' とを求める.

の値の増減及び
$$f$$
 のグラフの凹凸を調べ、 xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描く、まず関数 f の導関数 f' と第 2 次導関数 f'' とを求

|例|| 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=rac{1}{4}x^4-x^3+5$ と定める. 関数 f

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5 \right) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$$
.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4} x^4 - x^3 + 5 \right) = x^3 - 3x^2 = x^2 (x - 3) .$$

 $f''(x)\frac{d}{dx}\left\{x^2(x-3)\right\} = 2x(x-3) + x^2 = x(2x-6+x) = 3x(x-2)$.

の値の増減及び
$$f$$
 のグラフの凹凸を調べ、 xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描く。まず関数 f の導関数 f' と第 2 次導関数 f'' とを求める。

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=rac{1}{4}x^4-x^3+5$ と定める. 関数 f

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5 \right) = x^3 - 3x^2 = x^2(x - 3)$$
.

$$f''(x)\frac{d}{dx}\left\{x^2(x-3)\right\} = 2x(x-3) + x^2 = x(2x-6+x) = 3x(x-2) .$$

f'(x) = 0 とすると, $x^2(x-3) = 0$ なので x = 0.3.

の値の増減及び
$$f$$
 のグラフの凹凸を調べ, xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描く.まず関数 f の導関数 f' と第 2 次導関数 f'' とを求める.
$$f'(x)=\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{4}x^4-x^3+5\Big)=x^3-3x^2=x^2(x-3)\;.$$

例 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=rac{1}{4}x^4-x^3+5$ と定める. 関数 f

める.

 $f''(x)\frac{d}{dx}\left\{x^2(x-3)\right\} = 2x(x-3) + x^2 = x(2x-6+x) = 3x(x-2).$ f'(x) = 0 とすると、 $x^2(x-3) = 0$ なので x = 0,3 . f''(x) = 0 とすると、

3x(x-2) = 0 なので x = 0,2.

f(0) = 5, f(2) = 1, $f(3) = -\frac{7}{4}$.

$$f(0)=5$$
 , $f(2)=1$, $f(3)=-rac{7}{4}$. 関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

$f''(x) = 3x(x-2)$ $f'(x) = x^{2}(x-3)$ 0 $f(x) = \frac{1}{4}x^{4} - x^{3} + 5$ 5 1 $-\frac{7}{4}$	x	• • •	0	• • •	2	 3	
1 7	f''(x) = 3x(x-2)						
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$ 5 1 $-\frac{7}{4}$	$f'(x) = x^2(x-3)$		0			0	
4	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$		5		1	$-\frac{7}{4}$	

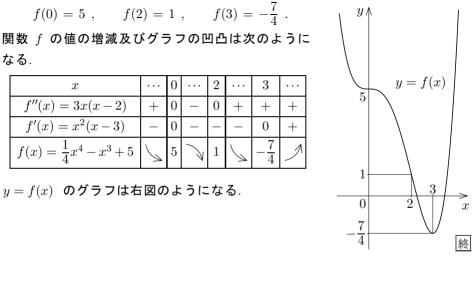
$$f(0)=5$$
 , $f(2)=1$, $f(3)=-rac{7}{4}$. 関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

$$f(0)=5$$
 , $f(2)=1$, $f(3)=-rac{7}{4}$. 関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

$$f(0)=5$$
 , $f(2)=1$, $f(3)=-rac{7}{4}$. 関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	• • •	0		2		3	
f''(x) = 3x(x-2)	+	0	-	0	+	+	+
$f'(x) = x^2(x-3)$	-	0	_	_	-	0	+
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$	V	5	1	1	1	$-\frac{7}{4}$	1

なる.



問5.補遺2.1] 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=4x^3+9-\frac{1}{2}x^4-9x^2$ と 定める. 関数 g の値の増減及び g のグラフの凹凸を調べ, xy 座標平面にお いて y = g(x) のグラフの概形を描け. $g'(x) = \frac{d}{dx} \left(4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2 \right) =$ $g''(x) = \frac{d}{dx} \{ \} =$ g'(x)=0 とすると, =0 なので x= , . g''(x)=0 とする =0 なので x= . $g(\) = \ , \qquad g(\) = \ , \qquad g(\) = \ .$

関数 q の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

 $[bar{ll}5.補遺2.1]$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=4x^3+9-rac{1}{2}x^4-9x^2$ と 定める. 関数 q の値の増減及び q のグラフの凹凸を調べ, xy 座標平面にお いて y = g(x) のグラフの概形を描け. $g'(x) = \frac{d}{dx} \left(4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2 \right) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x(x^2 - 6x + 9)$ $=-2x(x-3)^2$. $g''(x) = \frac{d}{dx} \{ -2x(x-3)^2 \} = -2\{(x-3)^2 + x \cdot 2(x-3) \} = -2(x-3)(x-3+2x)$ =-6(x-1)(x-3). g'(x) = 0 とすると、 $-2x(x-3)^2 = 0$ なので x = 0 、 g''(x) = 0 とする と, -6(x-1)(x-3) = 0 なので x =, .

 $g(\) = \ , \qquad g(\) = \ , \qquad g(\) = \ .$

関数 q の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

 $[bar{ll}5.補遺2.1]$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=4x^3+9-rac{1}{2}x^4-9x^2$ と 定める. 関数 q の値の増減及び q のグラフの凹凸を調べ, xy 座標平面にお いて y = g(x) のグラフの概形を描け. $g'(x) = \frac{d}{dx} \left(4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2 \right) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x(x^2 - 6x + 9)$ $=-2x(x-3)^2$. $g''(x) = \frac{d}{dx} \{ -2x(x-3)^2 \} = -2\{(x-3)^2 + x \cdot 2(x-3) \} = -2(x-3)(x-3+2x)$ =-6(x-1)(x-3). g'(x) = 0 とすると、 $-2x(x-3)^2 = 0$ なので x = 0,3 . g''(x) = 0 とする と, -6(x-1)(x-3) = 0 なので x = 1,3.

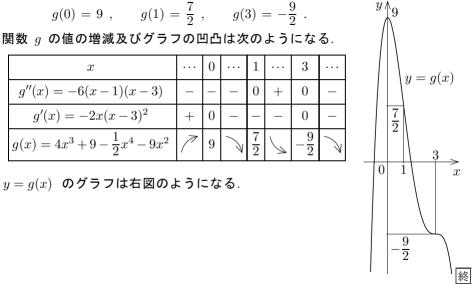
 $g(\) = \ , \qquad g(\) = \ , \qquad g(\) = \ .$

関数 q の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

 $[bar{ll}5.補遺2.1]$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x)=4x^3+9-rac{1}{2}x^4-9x^2$ と 定める. 関数 q の値の増減及び q のグラフの凹凸を調べ, xy 座標平面にお いて y = g(x) のグラフの概形を描け. $g'(x) = \frac{d}{dx} \left(4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2 \right) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x(x^2 - 6x + 9)$ $=-2x(x-3)^2$. $g''(x) = \frac{d}{dx} \{ -2x(x-3)^2 \} = -2\{(x-3)^2 + x \cdot 2(x-3) \} = -2(x-3)(x-3+2x)$ =-6(x-1)(x-3). g'(x) = 0 とすると、 $-2x(x-3)^2 = 0$ なので x = 0,3 . g''(x) = 0 とする と, -6(x-1)(x-3) = 0 なので x = 1,3. g(0) = 9, $g(1) = \frac{7}{2}$, $g(3) = -\frac{9}{2}$.

 $g(0) = 9 \; , \qquad g(1) = \frac{7}{2} \; , \qquad g(3) = -\frac{9}{2} \; .$

関数 g の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.



のグラフを描くためには極限 $\lim_{x o\infty}f(x)$ がどうなるか調べる必要がある.

関数 f の定義域が正の無限大 ∞ の方に限りなく伸びているとき, y=f(x)

関数 f の定義域が正の無限大 ∞ の方に限りなく伸びているとき, y=f(x) のグラフを描くためには極限 $\lim_{x\to\infty}f(x)$ がどうなるか調べる必要がある.関数 f の定義域が負の無限大 $-\infty$ の方に限りなく伸びているとき, y=f(x) のグラフを描くためには極限 $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ がどうなるか調べる必要がある.

|例|| 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=rac{6}{r^2+3}$ と定める. 関数 ψ の値 の増減及び ψ のグラフの凹凸を調べ、xy 座標平面において $y=\psi(x)$ のグ ラフの概形を描く.

の増減及び ψ のグラフの凹凸を調べ,xy 座標平面において $y=\psi(x)$ のグラフの概形を描く.まず関数 ψ の導関数 ψ' と第 2 次導関数 ψ'' とを求める.

|例|| 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=rac{6}{r^2+3}$ と定める. 関数 ψ の値

ラフの概形を描く. まず関数
$$\psi$$
 の導関数 ψ' と第 2 次導関数 ψ'' とを求める.
$$\psi'(x)=-\frac{6\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=-\frac{12x}{(x^2+3)^2}\;.$$

例 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\frac{6}{x^2+3}$ と定める. 関数 ψ の値の増減及び ψ のグラフの凹凸を調べ、xy 座標平面において $y=\psi(x)$ のグ

の増減及び
$$\psi$$
 のグラフの凹凸を調べ, xy 座標平面において $y=\psi(x)$ のグラフの概形を描く.まず関数 ψ の導関数 ψ' と第 2 次導関数 ψ'' とを求める.
$$\psi'(x)=-\frac{6\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=-\frac{12x}{(x^2+3)^2}\;.$$

|例|| 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=rac{6}{x^2+3}$ と定める. 関数 ψ の値

$$(x^2+3)^2 \qquad (x^2+3)^2$$

$$(x^2+3)^2 - x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x \qquad 4x^2 - (x^2+3) \qquad 3x^2 - 3$$

$$\psi''(x) = -12 \cdot \frac{(x^2+3)^2 - x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = 12 \cdot \frac{4x^2 - (x^2+3)}{(x^2+3)^3} = 12 \cdot \frac{3x^2 - 3}{(x^2+3)^3}$$

$$(x^2+3)^4 \qquad (x^2+3)^3 \qquad (x^2+3)^3 \qquad (x^2+3)^3 \qquad (x^2+3)^3 \qquad (x^2+3)^3 \qquad (x^2+3)^4 \qquad (x^2$$

$$= \frac{36(x^2 - 1)}{16x^2 + 3} . \tag{x + 5}$$

$$(x + 3) \qquad (x + 3) \qquad (x + 3)$$

$$= 36(x^2 - 1)$$

$$=\frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}.$$

$$-\frac{1}{(x^2+3)^3}$$
.

の増減及び ψ のグラフの凹凸を調べ、xy 座標平面において $y=\psi(x)$ のグ ラフの概形を描く. まず関数 ψ の導関数 ψ' と第 2 次導関数 ψ'' とを求める. $\psi'(x) = -\frac{6 \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2} .$

$$\psi''(x) = -12 \cdot \frac{(x^2+3)^2 - x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = 12 \cdot \frac{4x^2 - (x^2+3)}{(x^2+3)^3} = 12 \cdot \frac{3x^2 - 3}{(x^2+3)^3}$$

例 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=rac{6}{x^2+3}$ と定める. 関数 ψ の値

$$(x) = -12 \cdot \frac{1}{(x^2+3)^4} = 12 \cdot \frac{1}{(x^2+3)^3} = 12 \cdot \frac{1}{(x^$$

$$=\frac{36(x^2-1)}{(x^2-1)^2}.$$

$$=\frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3} \ .$$

$$=\frac{1}{(x^2+3)^3}$$
.

$$(x^2+3)^3$$

$$\psi'(x) = 0$$
 とすると, $-\frac{12x}{(x^2+3)^2} = 0$, $x = 0$.

$$(x^2+3)^2$$

の増減及び
$$\psi$$
 のグラフの凹凸を調べ, xy 座標平面において $y=\psi(x)$ のグラフの概形を描く.まず関数 ψ の導関数 ψ' と第 2 次導関数 ψ'' とを求める.
$$\psi'(x)=-\frac{6\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=-\frac{12x}{(x^2+3)^2} \ .$$

 $\psi''(x) = -12 \cdot \frac{(x^2+3)^2 - x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = 12 \cdot \frac{4x^2 - (x^2+3)}{(x^2+3)^3} = 12 \cdot \frac{3x^2 - 3}{(x^2+3)^3}$ $=\frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$.

|例|| 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=rac{6}{x^2+3}$ と定める. 関数 ψ の値

$$\psi'(x)=0$$
 とすると, $-\frac{12x}{(x^2+3)^2}=0$, $x=0$. $\psi''(x)=0$ とすると,

$$\frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}=0$$
 , $x^2-1=0$, よって $x=\pm 1$.

$\psi''(x) = \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$	0		0	
$\psi'(x) = -\frac{12x}{(x^2+3)^2}$		0		
$\psi(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	

$\psi'(x) = -\frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$ $\psi(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$ $\frac{3}{2}$ 2 $\frac{3}{2}$	$\psi''(x) = \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$	+	0	_	_	ı	0	+
$\psi(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$	$\psi'(x) = -\frac{12x}{(x^2+3)^2}$				0			
	$\psi(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{3}{2}$	

$\psi''(x) = \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3}$	+	0	ı	ı	ı	0	+
$\psi'(x) = -\frac{12x}{(x^2+3)^2}$	+	+	+	0	ı	ı	_
$\psi(x) = \frac{6}{x^2 + 3}$		$\frac{3}{2}$		2		$\frac{3}{2}$	

 $\psi(-1) = \frac{3}{2}$, $\psi(0) = 2$, $\psi(1) = \frac{3}{2}$.

$$\psi''(x) = \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} + 0 - - 0 + \frac{12x}{(x^2 + 3)^2} + \frac{1}{2} + \frac{1$$

 $\psi(-1) = \frac{3}{2}$, $\psi(0) = 2$, $\psi(1) = \frac{3}{2}$.

任意の実数
$$x$$
 について, $x^2+3>0$ なので, $\psi(x)=\frac{6}{x^2+3}>0$.

$$\psi''(x) = \frac{36(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^3} + 0 - - 0 +$$

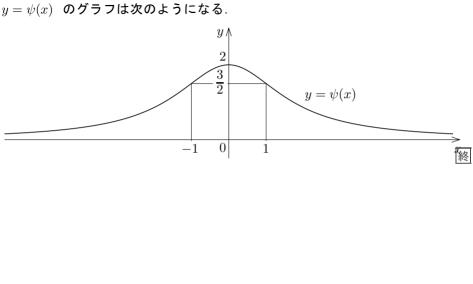
 $\psi(-1) = \frac{3}{2}$, $\psi(0) = 2$, $\psi(1) = \frac{3}{2}$.

関数 ψ の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

任意の実数 x について、 $x^2+3>0$ なので、 $\psi(x)=\frac{6}{x^2+3}>0$. また、

$$\lim_{x \to \infty} \psi(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{6}{x^2 + 3} = 0 , \qquad \lim_{x \to -\infty} \psi(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{6}{x^2 + 3} = 0 .$$

関数 ψ は偶関数なので, $y=\psi(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である.



問
$$5.$$
補遺 2.2] 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=e^{-x^2}$ と定める. 関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ, xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.
$$f'(x)=\frac{d}{dx}e^{-x^2}= \qquad .$$
 $f''(x)=\frac{d}{dx}()= =$

$$f'(x) = 0$$
 とすると, $= 0$, $x =$. $f''(x) = 0$ とすると, $= 0$, $x =$.

$$=0$$
 , $x=$.

$$f() - f() -$$

$$f(\cdot) = f(\cdot) = f(\cdot) = f(\cdot)$$

$$f\left(\begin{array}{c} \end{array}\right) = \hspace{0.2cm} , \hspace{0.2cm} f(\hspace{0.1cm}) = \hspace{0.1cm} , \hspace{0.1cm} f\left(\begin{array}{c} \end{array}\right) = \hspace{0.1cm} .$$

$$f(\)=\ ,\qquad f(\)=\ .$$

関数
$$f$$
 の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

問
$$5.$$
補遺 2.2] 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=e^{-x^2}$ と定める. 関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ, xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.
$$f'(x)=\frac{d}{dx}e^{-x^2}=-2xe^{-x^2}\;.$$

 $f''(x) = \frac{d}{dx}(-2xe^{-x^2}) = e^{-x^2}\{-2 - 2x \cdot (-2x)\} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$. f'(x) = 0 とすると、 $-2xe^{-x^2} = 0$ 、x = ... f''(x) = 0 とすると、

f'(x) = 0 とすると,
$$-2xe^{-x^2} = 0$$
, $x = .$ $f''(x) = 0$ とすると, $e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$, $x = .$

$$2e^{-x^2}(2x^2-1)=0$$
 , $=0$, $x=$.

関数
$$f$$
 の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

問
$$5.$$
補遺 2.2] 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=e^{-x^2}$ と定める. 関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ, xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.
$$f'(x)=\frac{d}{dx}e^{-x^2}=-2xe^{-x^2}\;.$$

 $f''(x) = \frac{d}{dx}(-2xe^{-x^2}) = e^{-x^2}\{-2 - 2x \cdot (-2x)\} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$. f'(x) = 0 とすると, $-2xe^{-x^2} = 0$, x = 0. f''(x) = 0 とすると,

 $2e^{-x^2}(2x^2-1)=0$, $2x^2-1=0$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$2e^{-x}(2x^2-1)=0$$
 , $2x^2-1=0$, $x=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

 $f\left(\begin{array}{cccc} \end{array}\right) = & , & f\left(\begin{array}{cccc} \end{array}\right) = & .$

関数
$$f$$
 の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

問5.補遺2.2 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=e^{-x^2}$ と定める. 関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ、xy 座標平面において y=f(x)のグラフの概形を描け. $f'(x) = \frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2}$. $f''(x) = \frac{d}{dx}(-2xe^{-x^2}) = e^{-x^2}\{-2 - 2x \cdot (-2x)\} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$.

$$f'(x) = 0$$
 $\geq f \leq \xi$, $-2xe^{-x^2} = 0$, $x = 0$. $f''(x) = 0$ $\geq f \leq \xi$,

 $2e^{-x^2}(2x^2-1)=0$, $2x^2-1=0$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$e^{-x^2}(2x^2-1)=0$$
 , $2x^2-1=0$, $x=\pm\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}, \qquad f(0) = 1, \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

関数
$$f$$
 の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

関数
$$f$$
 の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.
$$x \qquad \qquad \cdots \qquad -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cdots \qquad 0 \qquad \cdots \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

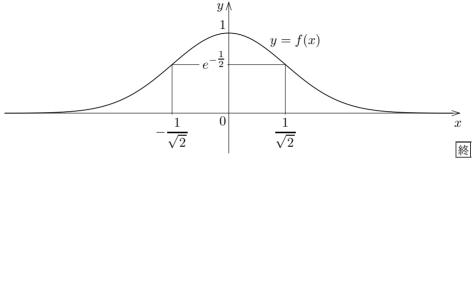
 $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$, f(0) = 1, $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$.

任意の実数 x について $f(x) = e^{-x^2} > 0$. また,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0 , \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0 .$$

関数 f は偶関数なので, y=f(x) のグラフは y 軸に関して対称である.

y = f(x) のグラフは次のようになる.



問5.補遺2.3 実数全体を定	:義域とする関数 $arphi$ を	$ \dot{\varphi}(x) = \frac{4x}{x^2 + 1} $ と定	める. 関数
$arphi$ の値の増減及び $arphi$ の $^{\prime}$			
のグラフの概形を描け.			
$\varphi'(x)$) = =		
$\varphi''(x) =$		=	
= .			
arphi'(x)=0 とすると,	= 0 より	= 0 なので x =	
$\varphi''(x) = 0$ とすると,	= 0 より	=0 なので $x=$	= , .

$$\varphi$$
 の値の増減及び φ のグラフの凹凸を調べ、 xy 座標平面において $y=\varphi(x)$ のグラフの概形を描け.
$$\varphi'(x)=4\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\ .$$

$$\varphi''(x)=4\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}=2\frac{-4x(x^2+1)-8x(1-x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\ .$$

 $| extbf{B}5.$ 補遺2.3 実数全体を定義域とする関数 arphi を $arphi(x)=rac{4x}{r^2\perp 1}$ と定める. 関数

$$(x^2+1)^2$$
 $\varphi'(x)=0$ とすると, $\frac{4(1-x^2)}{(2+1)^2}=0$ より $=0$ なので $x=$.

$$arphi'(x) = 0$$
 とすると, $\frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0$ より $= 0$ なので $x =$.

$$(x^2+1)^2$$

 $8x(x^2-3)$

 $\varphi''(x) = 0$ とすると、 $\frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^4} = 0$ より =0 なので x= .

 $| extbf{B}5.$ 補遺2.3 実数全体を定義域とする関数 arphi を $arphi(x)=rac{4x}{r^2+1}$ と定める. 関数

 $=\frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$.

$$(x^2+1)^3$$

$$arphi'(x)=0$$
 とすると, $\dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=0$ より $1-x^2=0$ なので $x=\pm 1$.

$$(x^2+1)^2 = 8x(x^2-3)$$

$$\varphi''(x)=0$$
 とすると、 $\frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^4}=0$ より $x(x^2-3)=0$ なので $x=0,\pm\sqrt{3}$.

-2

 $\varphi(-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$, $\varphi(-1) = -2$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 2$, $\varphi(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

任意の実数 x について、 $x^2+1>0$ なので、x>0 のとき

$$\psi(x) = \frac{4x}{x^2+1} > 0$$
 , $x < 0$ のとき $\psi(x) = \frac{4x}{x^2+1} < 0$.

$$\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} \frac{4}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0 ,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} \frac{4}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0.$$

関数 arphi は奇関数なので, y=arphi(x) のグラフは原点について対称である.

関数
$$\varphi$$
 は奇関数なので、 $y=\varphi(x)$ のグラフは原点について対称である $y=\varphi(x)$ のグラフは次のようになる.

