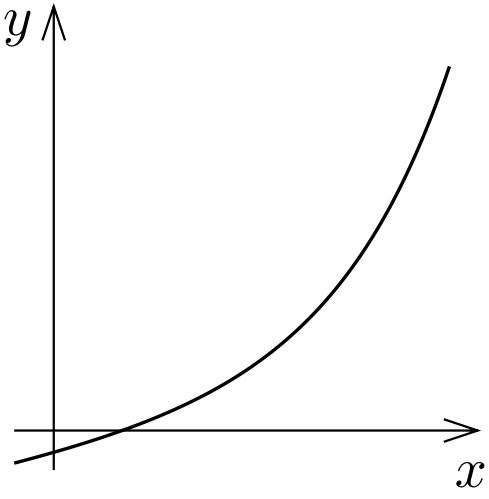
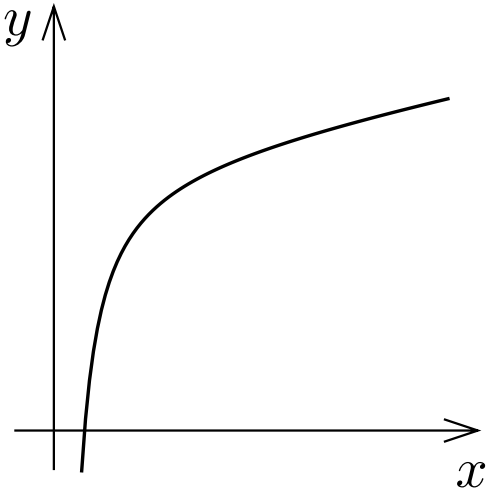
5. 補遺2　関数のグラフの概形

関数のグラフの概形を描くためには，関数の値の増減とそのグラフの凹凸を調べる.

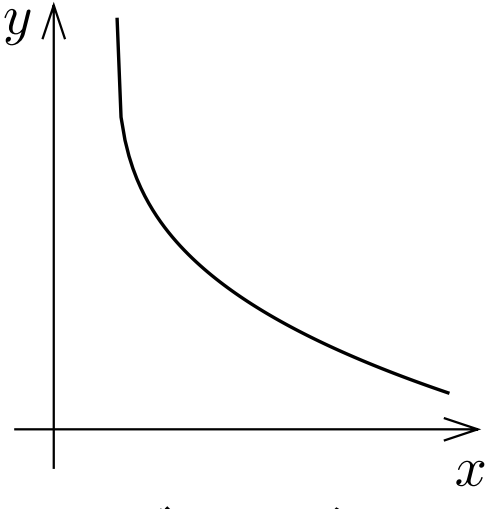
関数が単調増加か単調減少かということとそのグラフが下に凸か上に凸かということの組合わせで，関数のグラフについて以下の 4 つの状態がある．



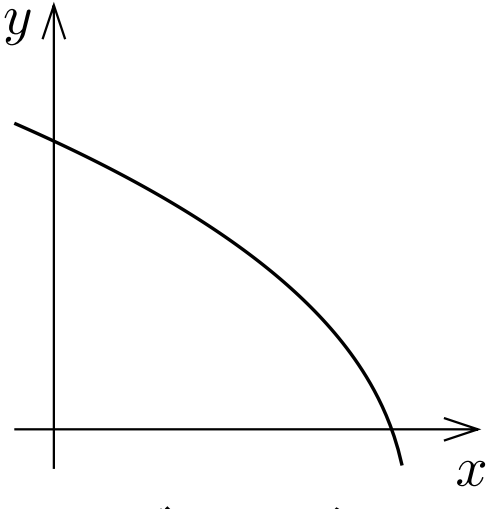
単調増加でグラフが下に凸の状態



単調増加でグラフが上に凸の状態



単調減少でグラフが下に凸の状態



単調減少でグラフが上に凸の状態

これらの 4 つの状態を次のような記号で表す：

関数が単調増加でそのグラフが下に凸の状態を記号 $\nearrow$ で表し，

関数が単調増加でそのグラフが上に凸の状態を記号 $\nearrow$ で表し，

関数が単調減少でそのグラフが下に凸の状態を記号 $\searrow$ で表し，

関数が単調減少でそのグラフが上に凸の状態を記号 $\searrow$ で表す．

関数のグラフの概形を描くためにはグラフが $\nearrow$, $\nearrow$, $\searrow$, $\searrow$ のうちのどの状態かを調べる．

5.3 節で述べた定理より，微分可能な関数 f は，

$f'(x) > 0$ である区間において単調増加であり，

$f'(x) < 0$ である区間において単調減少である．

5.3 節で述べた定理より，微分可能な関数 f は，

$f'(x) > 0$ である区間において単調増加であり，

$f'(x) < 0$ である区間において単調減少である．

5.8 節で述べた定理より，2 回微分可能な関数 f のグラフは，

$f''(x) \geq 0$ である区間において下に凸であり，

$f''(x) \leq 0$ である区間において上に凸である．

5.3 節で述べた定理より，微分可能な関数 f は，

$f'(x) > 0$ である区間において単調増加であり，

$f'(x) < 0$ である区間において単調減少である．

5.8 節で述べた定理より，2 回微分可能な関数 f のグラフは，

$f''(x) \geq 0$ である区間において下に凸であり，

$f''(x) \leq 0$ である区間において上に凸である．

これらのことより，2 回微分可能な関数 f について次のことが分かる：

$f'(x) > 0$ かつ $f''(x) \geq 0$ である区間では $\nearrow$ の状態であり，

$f'(x) > 0$ かつ $f''(x) \leq 0$ である区間では $\nearrow$ の状態であり，

$f'(x) < 0$ かつ $f''(x) \geq 0$ である区間では $\searrow$ の状態であり，

$f'(x) < 0$ かつ $f''(x) \leq 0$ である区間では $\searrow$ の状態である．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+5$ と定める．関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描く．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+5$ と定める．関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描く．まず関数 f の導関数 f' と第 2 次導関数 f'' とを求める．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+5$ と定める．関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描く．まず関数 f の導関数 f' と第 2 次導関数 f'' とを求める．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4-x^3+5\right)=x^3-3x^2=x^2(x-3)\ .$$

$$f''(x)\frac{d}{dx}\{x^2(x-3)\}=2x(x-3)+x^2=x(2x-6+x)=3x(x-2)\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+5$ と定める．関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描く．まず関数 f の導関数 f' と第 2 次導関数 f'' とを求める．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4-x^3+5\right)=x^3-3x^2=x^2(x-3)\ .$$

$$f''(x)\frac{d}{dx}\{x^2(x-3)\}=2x(x-3)+x^2=x(2x-6+x)=3x(x-2)\ .$$

$f'(x)=0$ とすると，$x^2(x-3)=0$ なので $x=0,3$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+5$ と定める．関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描く．まず関数 f の導関数 f' と第 2 次導関数 f'' とを求める．

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4-x^3+5\right)=x^3-3x^2=x^2(x-3)\ .$$

$$f''(x)\frac{d}{dx}\{x^2(x-3)\}=2x(x-3)+x^2=x(2x-6+x)=3x(x-2)\ .$$

$f'(x)=0$ とすると，$x^2(x-3)=0$ なので $x=0,3$ ． $f''(x)=0$ とすると，$3x(x-2)=0$ なので $x=0,2$ ．

$$f(0)=5\ ,\qquad f(2)=1\ ,\qquad f(3)=-\frac{7}{4}\ .$$

$$f(0) = 5\ , \qquad f(2) = 1\ , \qquad f(3) = -\frac{7}{4}\ .$$

関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f''(x) = 3x(x-2)$							
$f'(x) = x^2(x-3)$		0				0	
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$		5		1		$-\frac{7}{4}$	

$$f(0) = 5\ , \qquad f(2) = 1\ , \qquad f(3) = -\frac{7}{4}\ .$$

関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f''(x) = 3x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x) = x^2(x-3)$		0				0	
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$		5		1		$-\frac{7}{4}$	

$$f(0) = 5\ , \qquad f(2) = 1\ , \qquad f(3) = -\frac{7}{4}\ .$$

関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f''(x) = 3x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x) = x^2(x-3)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$		5		1		$-\frac{7}{4}$	

$$f(0) = 5\ , \qquad f(2) = 1\ , \qquad f(3) = -\frac{7}{4}\ .$$

関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

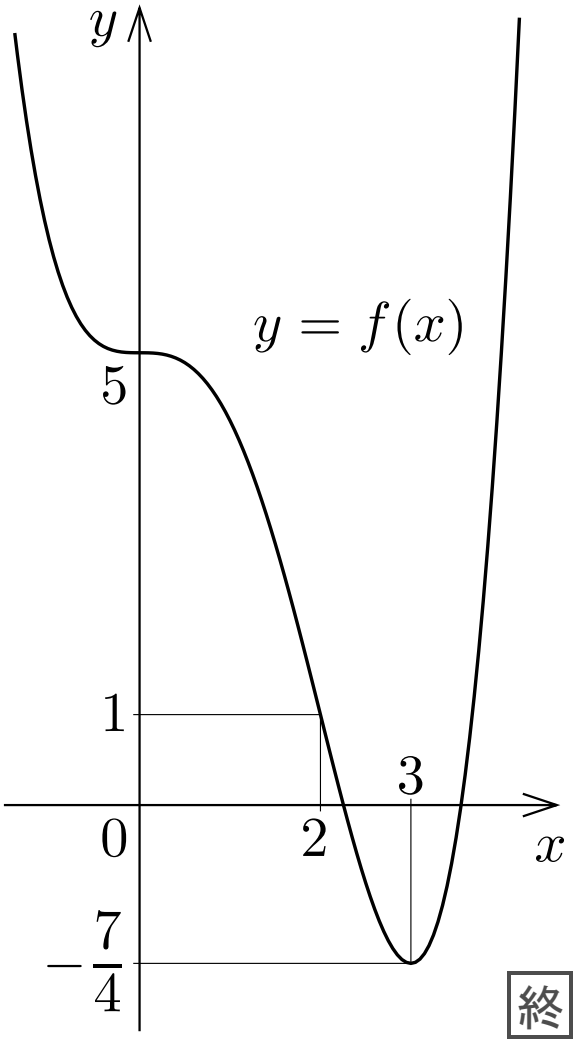
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f''(x) = 3x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x) = x^2(x-3)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$	$\searrow$	5	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\frac{7}{4}$	$\nearrow$

$$f(0) = 5\ , \qquad f(2) = 1\ , \qquad f(3) = -\frac{7}{4}\ .$$

関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f''(x) = 3x(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x) = x^2(x-3)$	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5$	↘	5	↘	1	↘	$-\frac{7}{4}$	↗

$y = f(x)$ のグラフは右図のようになる.



終

$\boxed{\text{問5.補遺2.1}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2$ と定める．関数 g の値の増減及び g のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = g(x)$ のグラフの概形を描け．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2\right) = \qquad\qquad\qquad\qquad = -$$

$$= \qquad\qquad\qquad ,$$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}\{\qquad\qquad\qquad\} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$g'(x) = 0$ とすると，$\qquad\qquad\qquad = 0$ なので $x = \quad , \quad .$ $g''(x) = 0$ とすると，$\qquad\qquad\qquad\qquad = 0$ なので $x = \quad , \quad .$

$$g(\ \ ) = \quad , \qquad g(\ \ ) = \quad , \qquad g(\ \ ) = \qquad .$$

関数 g の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる．

$\boxed{\text{問5.補遺2.1}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 4x^3 + 9 - \dfrac{1}{2}x^4 - 9x^2$ と定める．関数 g の値の増減及び g のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = g(x)$ のグラフの概形を描け．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2\right) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x(x^2 - 6x + 9)$$
$$= -2x(x-3)^2 \ ,$$
$$g''(x) = \frac{d}{dx}\{-2x(x-3)^2\} = -2\{(x-3)^2 + x \cdot 2(x-3)\} = -2(x-3)(x-3+2x)$$
$$= -6(x-1)(x-3) \ .$$

$g'(x) = 0$ とすると，$-2x(x-3)^2 = 0$ なので $x = \quad , \quad .$ $g''(x) = 0$ とすると，$-6(x-1)(x-3) = 0$ なので $x = \quad , \quad .$

$$g(\ \ ) = \quad , \qquad g(\ \ ) = \quad , \qquad g(\ \ ) = \quad .$$

関数 g の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる．

$\boxed{\text{問5.補遺2.1}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 4x^3 + 9 - \dfrac{1}{2}x^4 - 9x^2$ と定める．関数 g の値の増減及び g のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = g(x)$ のグラフの概形を描け．

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2\right) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x(x^2 - 6x + 9)$$
$$= -2x(x-3)^2 \ ,$$
$$g''(x) = \frac{d}{dx}\{-2x(x-3)^2\} = -2\{(x-3)^2 + x \cdot 2(x-3)\} = -2(x-3)(x-3+2x)$$
$$= -6(x-1)(x-3) \ .$$

$g'(x) = 0$ とすると，$-2x(x-3)^2 = 0$ なので $x = 0, 3$ ．$g''(x) = 0$ とすると，$-6(x-1)(x-3) = 0$ なので $x = 1, 3$ ．

$$g(\ \ ) = \quad , \qquad g(\ \ ) = \quad , \qquad g(\ \ ) = \quad .$$

関数 g の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる．

$\boxed{\text{問5.補遺2.1}}$ 実数全体を定義域とする関数 g を $g(x) = 4x^3 + 9 - \dfrac{1}{2}x^4 - 9x^2$ と定める．関数 g の値の増減及び g のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = g(x)$ のグラフの概形を描け.

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2\right) = -2x^3 + 12x^2 - 18x = -2x(x^2 - 6x + 9)$$
$$= -2x(x-3)^2 \ ,$$
$$g''(x) = \frac{d}{dx}\{-2x(x-3)^2\} = -2\{(x-3)^2 + x \cdot 2(x-3)\} = -2(x-3)(x-3+2x)$$
$$= -6(x-1)(x-3) \ .$$

$g'(x) = 0$ とすると，$-2x(x-3)^2 = 0$ なので $x = 0, 3$ ． $g''(x) = 0$ とすると，$-6(x-1)(x-3) = 0$ なので $x = 1, 3$ ．

$$g(0) = 9 \ , \qquad g(1) = \frac{7}{2} \ , \qquad g(3) = -\frac{9}{2} \ .$$

関数 g の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

$$g(0) = 9\ , \qquad g(1) = \frac{7}{2}\ , \qquad g(3) = -\frac{9}{2}\ .$$

関数 g の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

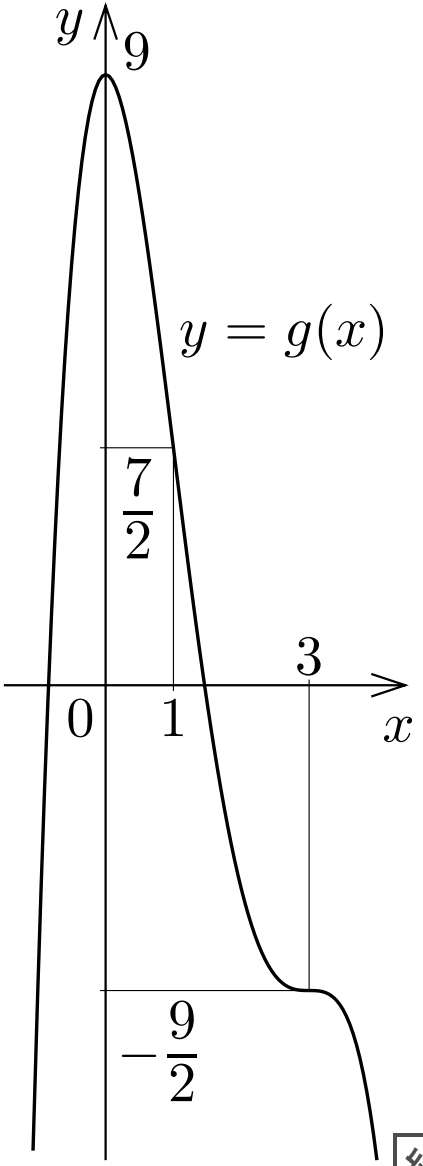
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g''(x) = -6(x-1)(x-3)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g'(x) = -2x(x-3)^2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$g(x) = 4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\searrow$

$$g(0) = 9\ , \qquad g(1) = \frac{7}{2}\ , \qquad g(3) = -\frac{9}{2}\ .$$

関数 g の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$g''(x) = -6(x-1)(x-3)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g'(x) = -2x(x-3)^2$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$-$
$g(x) = 4x^3 + 9 - \frac{1}{2}x^4 - 9x^2$	$\nearrow$	9	$\searrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	$-\frac{9}{2}$	$\searrow$

$y = g(x)$ のグラフは右図のようになる.



終

関数 f の定義域が正の無限大 ∞ の方に限りなく伸びているとき，$y = f(x)$ のグラフを描くためには極限 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ がどうなるか調べる必要がある．

関数 f の定義域が正の無限大 ∞ の方に限りなく伸びているとき，$y = f(x)$ のグラフを描くためには極限 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ がどうなるか調べる必要がある．関数 f の定義域が負の無限大 $-\infty$ の方に限りなく伸びているとき，$y = f(x)$ のグラフを描くためには極限 $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ がどうなるか調べる必要がある．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$ と定める．関数 ψ の値の増減及び ψ のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = \psi(x)$ のグラフの概形を描く．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$ と定める．関数 ψ の値の増減及び ψ のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = \psi(x)$ のグラフの概形を描く．まず関数 ψ の導関数 ψ' と第 2 次導関数 ψ'' とを求める．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$ と定める．関数 ψ の値の増減及び ψ のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = \psi(x)$ のグラフの概形を描く．まず関数 ψ の導関数 ψ' と第 2 次導関数 ψ'' とを求める．

$$\psi'(x) = -\frac{6 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{12x}{(x^2+3)^2} \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$ と定める．関数 ψ の値の増減及び ψ のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = \psi(x)$ のグラフの概形を描く．まず関数 ψ の導関数 ψ' と第 2 次導関数 ψ'' とを求める．

$$\psi'(x) = -\frac{6 \cdot 2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{12x}{(x^2+3)^2} \ .$$

$$\psi''(x) = -12 \cdot \frac{(x^2+3)^2 - x \cdot 2(x^2+3) \cdot 2x}{(x^2+3)^4} = 12 \cdot \frac{4x^2 - (x^2+3)}{(x^2+3)^3} = 12 \cdot \frac{3x^2-3}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3} \ .$$

$\boxed{例}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{6}{x^2+3}$ と定める．関数 ψ の値の増減及び ψ のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y=\psi(x)$ のグラフの概形を描く．まず関数 ψ の導関数 ψ' と第 2 次導関数 ψ'' とを求める．

$$\psi'(x) = -\frac{6\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{12x}{(x^2+3)^2} \ .$$

$$\psi''(x) = -12\cdot\frac{(x^2+3)^2 - x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4} = 12\cdot\frac{4x^2-(x^2+3)}{(x^2+3)^3} = 12\cdot\frac{3x^2-3}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3} \ .$$

$\psi'(x)=0$ とすると，$-\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}=0$ ，$x=0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 実数全体を定義域とする関数 ψ を $\psi(x)=\dfrac{6}{x^2+3}$ と定める．関数 ψ の値の増減及び ψ のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y=\psi(x)$ のグラフの概形を描く．まず関数 ψ の導関数 ψ' と第 2 次導関数 ψ'' とを求める．

$$\psi'(x) = -\frac{6\cdot 2x}{(x^2+3)^2} = -\frac{12x}{(x^2+3)^2} \ .$$

$$\psi''(x) = -12\cdot\frac{(x^2+3)^2 - x\cdot 2(x^2+3)\cdot 2x}{(x^2+3)^4} = 12\cdot\frac{4x^2-(x^2+3)}{(x^2+3)^3} = 12\cdot\frac{3x^2-3}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3} \ .$$

$\psi'(x)=0$ とすると，$-\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}=0$ ，$x=0$ ．$\psi''(x)=0$ とすると，$\dfrac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}=0$ ，$x^2-1=0$ ，よって $x=\pm 1$ ．

$$\psi(-1) = \frac{3}{2}\ , \qquad \psi(0) = 2\ , \qquad \psi(1) = \frac{3}{2}\ .$$

関数 ψ の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\psi''(x) = \dfrac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$		0				0	
$\psi'(x) = -\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$				0			
$\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$		$\dfrac{3}{2}$		2		$\dfrac{3}{2}$	

$$\psi(-1) = \frac{3}{2}\ , \qquad \psi(0) = 2\ , \qquad \psi(1) = \frac{3}{2}\ .$$

関数 ψ の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\psi''(x) = \dfrac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\psi'(x) = -\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$				0			
$\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$		$\dfrac{3}{2}$		2		$\dfrac{3}{2}$	

$$\psi(-1) = \frac{3}{2}\ , \qquad \psi(0) = 2\ , \qquad \psi(1) = \frac{3}{2}\ .$$

関数 ψ の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\psi''(x) = \dfrac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\psi'(x) = -\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$		$\dfrac{3}{2}$		2		$\dfrac{3}{2}$	

$$\psi(-1) = \frac{3}{2}\ , \qquad \psi(0) = 2\ , \qquad \psi(1) = \frac{3}{2}\ .$$

関数 ψ の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\psi''(x) = \dfrac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\psi'(x) = -\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$

$$\psi(-1) = \frac{3}{2}\ , \qquad \psi(0) = 2\ , \qquad \psi(1) = \frac{3}{2}\ .$$

関数 ψ の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\psi''(x) = \dfrac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\psi'(x) = -\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$

任意の実数 x について, $x^2+3>0$ なので, $\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3} > 0$.

$$\psi(-1) = \frac{3}{2}\ , \qquad \psi(0) = 2\ , \qquad \psi(1) = \frac{3}{2}\ .$$

関数 ψ の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

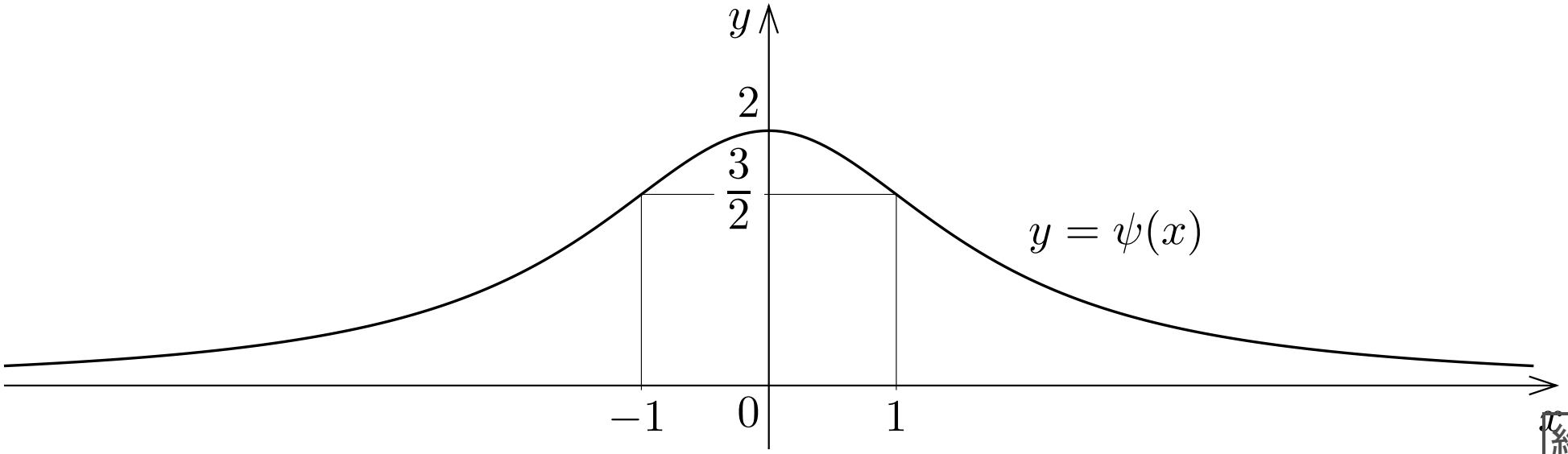
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$\psi''(x) = \dfrac{36(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\psi'(x) = -\dfrac{12x}{(x^2+3)^2}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$	$\nearrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$

任意の実数 x について, $x^2+3>0$ なので, $\psi(x) = \dfrac{6}{x^2+3} > 0$. また,

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x^2+3} = 0\ , \qquad \lim_{x\to-\infty} \psi(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x^2+3} = 0\ .$$

関数 ψ は偶関数なので, $y=\psi(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である.

$y = \psi(x)$ のグラフは次のようになる.



終

$\boxed{\text{問5.補遺2.2}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^{-x^2}$ と定める．関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{-x^2} = \qquad\qquad .$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(\qquad\qquad) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad\qquad\qquad .$$

$f'(x) = 0$ とすると，$\qquad\qquad = 0$ ，$x = \qquad$ ．$f''(x) = 0$ とすると，

$\qquad\qquad = 0$ ，$\qquad\qquad = 0$ ，$x = \qquad\qquad$ ．

$$f\left(\qquad\qquad\right) = \qquad\qquad , \qquad\qquad f(\ \ ) = \qquad , \qquad f\left(\qquad\right) = \qquad\qquad .$$

関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる．

$\boxed{\text{問5.補遺2.2}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^{-x^2}$ と定める．関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} \ .$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-2xe^{-x^2}) = e^{-x^2}\{-2 - 2x \cdot (-2x)\} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると，$-2xe^{-x^2} = 0$ ，$x =$ ．$f''(x) = 0$ とすると，

$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$ ，$= 0$ ，$x =$ ．

$$f\left(\quad\right) = \quad , \qquad f(\ ) = \quad , \qquad f\left(\quad\right) = \quad .$$

関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる．

$\boxed{\text{問5.補遺2.2}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x) = e^{-x^2}$ と定める．関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = f(x)$ のグラフの概形を描け．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} \ .$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-2xe^{-x^2}) = e^{-x^2}\{-2 - 2x \cdot (-2x)\} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \ .$$

$f'(x) = 0$ とすると，$-2xe^{-x^2} = 0$ ，$x = 0$ ．$f''(x) = 0$ とすると，

$2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0$ ，$2x^2 - 1 = 0$ ，$x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ．

$$f\left(\qquad\right) = \qquad , \qquad f(\ ) = \quad , \qquad f\left(\qquad\right) = \qquad .$$

関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる．

$\boxed{\text{問5.補遺2.2}}$ 実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=e^{-x^2}$ と定める．関数 f の値の増減及び f のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y=f(x)$ のグラフの概形を描け．

$$f'(x) = \frac{d}{dx}e^{-x^2} = -2xe^{-x^2} \ .$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-2xe^{-x^2}) = e^{-x^2}\{-2-2x\cdot(-2x)\} = 2e^{-x^2}(2x^2-1) \ .$$

$f'(x)=0$ とすると，$-2xe^{-x^2}=0$ ，$x=0$ ．$f''(x)=0$ とすると，$2e^{-x^2}(2x^2-1)=0$ ，$2x^2-1=0$ ，$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ．

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \ , \qquad f(0) = 1 \ , \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}} \ .$$

関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる．

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}\ , \qquad f(0) = 1\ , \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-\frac{1}{2}}\ .$$

関数 f の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

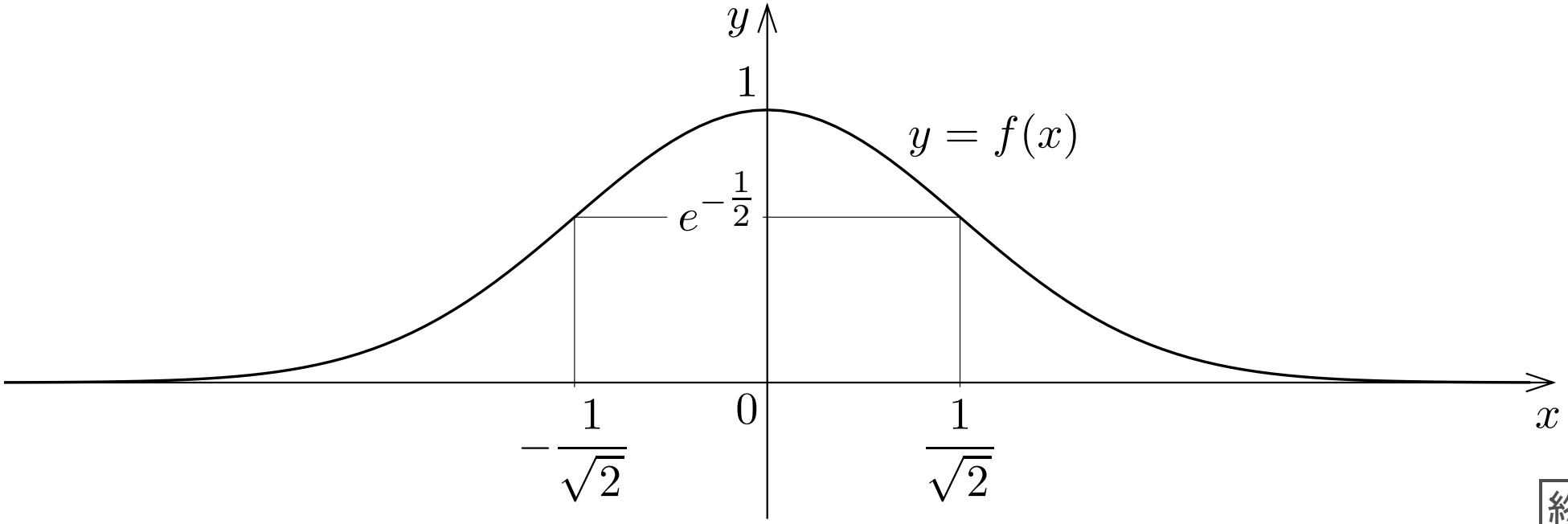
x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2-1)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x) = e^{-x^2}$	$\nearrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$

任意の実数 x について $f(x) = e^{-x^2} > 0$. また,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = 0\ , \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0\ .$$

関数 f は偶関数なので, $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である.

$y = f(x)$ のグラフは次のようになる.



終

$\boxed{\text{問5.補遺2.3}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ と定める．関数 φ の値の増減及び φ のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = \varphi(x)$ のグラフの概形を描け．

$$\varphi'(x) = \qquad\qquad = \qquad\qquad .$$

$$\varphi''(x) = \qquad\qquad\qquad\qquad = \qquad\qquad$$

$$= \qquad\qquad .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると，$\qquad = 0$ より $\qquad = 0$ なので $x = \qquad$.

$\varphi''(x) = 0$ とすると，$\qquad = 0$ より $\qquad = 0$ なので $x = \quad , \qquad$.

$\boxed{\text{問5.補遺2.3}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ と定める．関数 φ の値の増減及び φ のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = \varphi(x)$ のグラフの概形を描け．

$$\varphi'(x) = 4\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$$\varphi''(x) = 4\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = 2\frac{-4x(x^2+1)-8x(1-x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \ .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると，$\dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0$ より $\qquad = 0$ なので $x = \qquad$.

$\varphi''(x) = 0$ とすると，$\dfrac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^4} = 0$ より $\qquad = 0$ なので $x = \quad , \qquad$.

$\boxed{\text{問5.補遺2.3}}$ 実数全体を定義域とする関数 φ を $\varphi(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ と定める．関数 φ の値の増減及び φ のグラフの凹凸を調べ，xy 座標平面において $y = \varphi(x)$ のグラフの概形を描け．

$$\varphi'(x) = 4\frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \ .$$

$$\varphi''(x) = 4\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = 2\frac{-4x(x^2+1)-8x(1-x^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \ .$$

$\varphi'(x) = 0$ とすると，$\dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2} = 0$ より $1-x^2 = 0$ なので $x = \pm 1$ ．

$\varphi''(x) = 0$ とすると，$\dfrac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^4} = 0$ より $x(x^2-3) = 0$ なので $x = 0, \pm\sqrt{3}$ ．

$\varphi\left(-\sqrt{3}\right) = -\sqrt{3}$ ， $\varphi(-1) = -2$ ， $\varphi(0) = 0$ ， $\varphi(1) = 2$ ， $\varphi\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$.

関数 φ の値の増減及びグラフの凹凸は次のようになる.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$\varphi''(x) = \dfrac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\varphi'(x) = \dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\varphi(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$	$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$

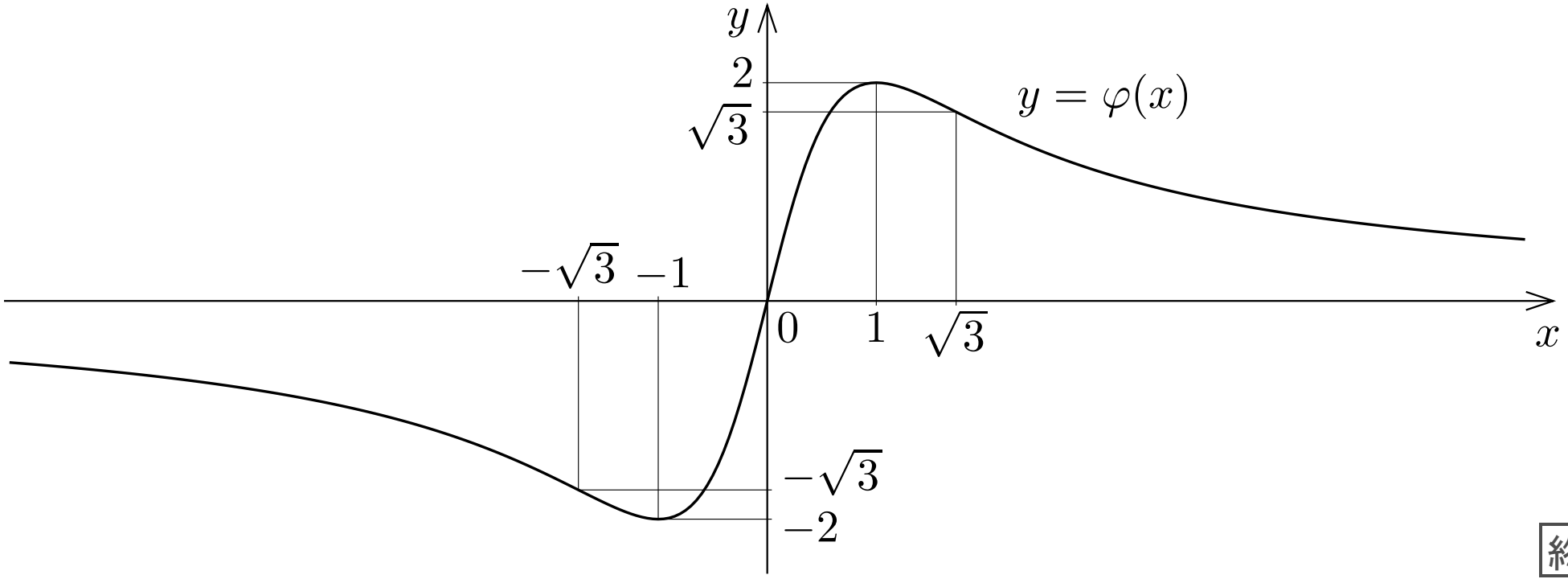
任意の実数 x について， $x^2+1>0$ なので， $x>0$ のとき $\psi(x) = \dfrac{4x}{x^2+1} > 0$ ， $x<0$ のとき $\psi(x) = \dfrac{4x}{x^2+1} < 0$.

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{4}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=0\ ,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{4}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)=0\ .$$

関数 φ は奇関数なので， $y=\varphi(x)$ のグラフは原点について対称である.

$y=\varphi(x)$ のグラフは次のようになる.



終