

6.1 定積分の定義

関数の定積分を定義する.

実数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ の中で最も大きい実数を次のように書き表す :

$$\max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} .$$

例えば次のようになる :

$$\max\{-2, 5, 3, -7\} = 5 , \quad \max\left\{\frac{5}{6}, 3, \frac{9}{2}, \frac{7}{3}, 4\right\} = \frac{9}{2} .$$

実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。
正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり、区間 $[a, b]$ を n 個の小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ に分割する。

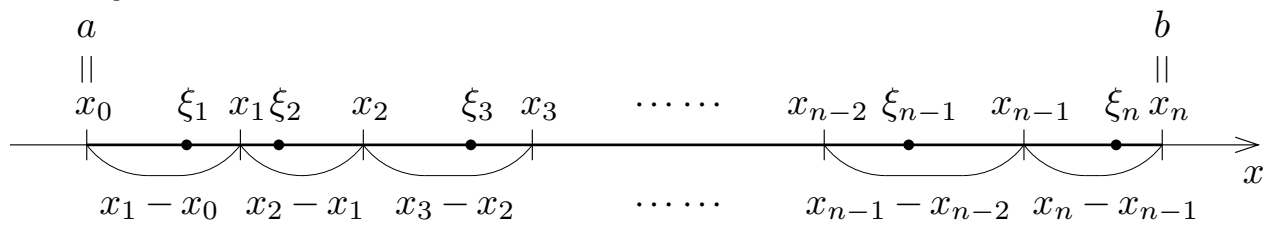
実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。
 正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり、区間 $[a, b]$ を n 個の小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ に分割する。更に、

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1, \quad x_1 \leq \xi_2 \leq x_2, \quad x_2 \leq \xi_3 \leq x_3, \quad \cdots, \quad x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$$

である実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとる。 ξ_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) は小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から選ばれた実数である。



区間 $[x_0, x_1]$ の幅 $x_1 - x_0$, $[x_1, x_2]$ の幅 $x_2 - x_1$, $[x_2, x_3]$ の幅 $x_3 - x_2$, \dots , $[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$, の中で最も大きいものを δ_n とおく :

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} .$$

区間 $[x_0, x_1]$ の幅 $x_1 - x_0$, $[x_1, x_2]$ の幅 $x_2 - x_1$, $[x_2, x_3]$ の幅 $x_3 - x_2$, \dots , $[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$, の中で最も大きいものを δ_n とおく :

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} .$$

また, 各区間 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) の幅 $x_k - x_{k-1}$ と関数 f の値 $f(\xi_k)$ との積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の総和を S_n とおく :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) . \end{aligned}$$

この S_n (の値) を f のリーマン和という.

区間 $[x_0, x_1]$ の幅 $x_1 - x_0$, $[x_1, x_2]$ の幅 $x_2 - x_1$, $[x_2, x_3]$ の幅 $x_3 - x_2$, \dots , $[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$, の中で最も大きいものを δ_n とおく:

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}.$$

また, 各区間 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) の幅 $x_k - x_{k-1}$ と関数 f の値 $f(\xi_k)$ との積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の総和を S_n とおく:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

この S_n (の値) を f のリーマン和という. リーマン和 S_n は正の自然数を表す変数 n の関数である. 実数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をどう定めるかによって様々なリーマン和ができる.

$n \rightarrow \infty$ のとき小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとする; つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする.

$n \rightarrow \infty$ のとき小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとする; つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする. $n \rightarrow \infty$ のときどのようなリーマン和 S_n も収束して, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるとき, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

$n \rightarrow \infty$ のとき小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとする; つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする. $n \rightarrow \infty$ のときどのようなリーマン和 S_n も収束して, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるとき, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

つまり, 大雑把にいうと, 関数 f の定積分とは f のリーマン和の極限值である.

改めて定積分の定義を述べる．この定義は覚えなさい．

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく。 S_n を表す式を f のリーマン和という。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい、 f の a から b までの定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を次のように定義する：
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

関数 f が a から b まで積分可能であるとき, 関数 f は b から a まで積分可能であるといい, f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する: $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

実数 a と b に対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき, a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を求めることを f を a から b まで (定) 積分するという.

実数 a と b に対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき, a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を求めることを f を a から b まで (定) 積分するという. また, 定積分を表す式 $\int_a^b f(x) dx$ において, a を定積分の下端といい, b を定積分の上端といい, 区間 $[a, b]$ を積分区間という;

実数 a と b に対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき, a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を求めることを f を a から b まで (定) 積分するという. また, 定積分を表す式 $\int_a^b f(x) dx$ において, a を定積分の下端といい, b を定積分の上端といい, 区間 $[a, b]$ を積分区間という; 更に, f を被積分関数といい, x を積分変数という.

定理 実数 a が関数 f の定義域に属するとき,

$$\int_a^a f(x) dx = 0 .$$

定理 実数 a が関数 f の定義域に属するとき,

$$\int_a^a f(x) dx = 0 .$$

定理 実数 a と b とに対して, 関数 f が a から b まで積分可能であるとき,

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx .$$

関数は連続である範囲で積分可能である.

定理 実数 a と b とが属するある区間において関数 f が連続であるならば,
 f は a から b まで積分可能である.

前節で述べたように、関数のグラフを境界線とする領域の面積はリーマン和の極限值つまり定積分である。

定理 実数 a, b について $a \leq b$ とする. 関数 f は区間 $[a, b]$ において連続であり, 区間 $[a, b]$ において $f(x) \geq 0$ とする. xy 座標平面において, $y = f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x = a$ と $x = b$ とで囲まれる領域の面積は $\int_a^b f(x) dx$ である.

