

6.5 不定積分の公式

6.5 節において次の定理を述べた：関数 F が微分可能である区間において

$$\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

この定理を用いて積分の公式を導く.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int \cos x dx$ を求める.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int \cos x dx$ を求める. 余弦関数 $\cos x$ の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \cos x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int \cos x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int \cos x dx$ を求める. 余弦関数 $\cos x$ の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \cos x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int \cos x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

$$\frac{d}{dx} = \cos x \quad \text{なので,}$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int \cos x dx$ を求める. 余弦関数 $\cos x$ の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \cos x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int \cos x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ なので,

$$\int \cos x dx = \int \left(\frac{d}{dx} \sin x \right) dx = \sin x + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

正弦関数 $\sin x$ の不定積分 $\int \sin x dx$ を求める.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

正弦関数 $\sin x$ の不定積分 $\int \sin x dx$ を求める. 正弦関数 $\sin x$ の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \sin x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int \sin x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

正弦関数 $\sin x$ の不定積分 $\int \sin x dx$ を求める. 正弦関数 $\sin x$ の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \sin x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int \sin x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

$$\frac{d}{dx} = -\sin x \quad \text{なので} \quad \frac{d}{dx} (\quad) = \sin x ,$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

正弦関数 $\sin x$ の不定積分 $\int \sin x dx$ を求める. 正弦関数 $\sin x$ の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \sin x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int \sin x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ なので $\frac{d}{dx} (-\cos x) = \sin x$, よって

$$\int \sin x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} (-\cos x) \right\} dx = -\cos x + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

反比例 $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) の不定積分 $\int \frac{1}{x} dx$ を求める.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

反比例 $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) の不定積分 $\int \frac{1}{x} dx$ を求める. 反比例 $\frac{1}{x}$ の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{x}$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

反比例 $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) の不定積分 $\int \frac{1}{x} dx$ を求める. 反比例 $\frac{1}{x}$ の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{x}$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{なので,}$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

反比例 $\frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) の不定積分 $\int \frac{1}{x} dx$ を求める. 反比例 $\frac{1}{x}$ の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = \frac{1}{x}$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{x}$ なので,

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \left(\frac{d}{dx} \ln|x| \right) dx = \ln|x| + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

定数 p について $p \neq -1$ とする. 冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

定数 p について $p \neq -1$ とする. 冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める. 冪関数 x^p の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = x^p$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int x^p dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

定数 p について $p \neq -1$ とする. 冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める. 冪関数 x^p の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = x^p$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int x^p dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

$\frac{d}{dx} x^{p+1} = (p+1)x^p$ なので,

$$x^p = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{p+1}}{p+1} \right) .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

定数 p について $p \neq -1$ とする. 冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める. 冪関数 x^p の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = x^p$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int x^p dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

$\frac{d}{dx} x^{p+1} = (p+1)x^p$ なので,

$$x^p = \frac{1}{p+1} \frac{d}{dx} x^{p+1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right) .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

定数 p について $p \neq -1$ とする. 冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める. 冪関数 x^p の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = x^p$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int x^p dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

$\frac{d}{dx} x^{p+1} = (p+1)x^p$ なので,

$$x^p = \frac{1}{p+1} \frac{d}{dx} x^{p+1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right) .$$

このことより

$$\int x^p dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{p+1} x^{p+1} \right) \right\} dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める. 指数関数 a^x の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int a^x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める. 指数関数 a^x の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int a^x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

$$\frac{d}{dx} a^x = \quad \text{なので}$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める. 指数関数 a^x の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int a^x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}) .$$

$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ なので

$$a^x = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} a^x .$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める. 指数関数 a^x の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int a^x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ なので

$$a^x = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} \frac{a^x}{\ln a}.$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする. 指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める. 指数関数 a^x の原始関数, つまり $\frac{d}{dx} F(x) = a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば,

$$\int a^x dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ なので

$$a^x = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} \frac{a^x}{\ln a}.$$

このことより

$$\int a^x dx = \int \left(\frac{d}{dx} \frac{a^x}{\ln a} \right) dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{a} \frac{d}{dx} \tan^{-1} y = \frac{1}{a} \frac{d}{dy} \tan^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx}$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right) &= \frac{1}{a} \frac{d}{dx} \tan^{-1} y = \frac{1}{a} \frac{d}{dy} \tan^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{1+y^2} \frac{d}{dx} \frac{x}{a} \qquad \frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right) &= \frac{1}{a} \frac{d}{dx} \tan^{-1} y = \frac{1}{a} \frac{d}{dy} \tan^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{1+y^2} \frac{d}{dx} \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} \\ &= \frac{1}{x^2 + a^2} . \end{aligned}$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right) &= \frac{1}{a} \frac{d}{dx} \tan^{-1} y = \frac{1}{a} \frac{d}{dy} \tan^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{1+y^2} \frac{d}{dx} \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} \\ &= \frac{1}{x^2 + a^2}. \end{aligned}$$

よって $\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right)$ なので,

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right) &= \frac{1}{a} \frac{d}{dx} \tan^{-1} y = \frac{1}{a} \frac{d}{dy} \tan^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{a} \frac{1}{1+y^2} \frac{d}{dx} \frac{x}{a} = \frac{1}{a} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} \\ &= \frac{1}{x^2 + a^2}. \end{aligned}$$

よって $\frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right)$ なので,

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right) \right\} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数) .

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく. $a > 0$ なので $a = \sqrt{a^2}$.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく. $a > 0$ なので $a = \sqrt{a^2}$.

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{d}{dx} \sin^{-1} y = \frac{d}{dy} \sin^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx}$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく. $a > 0$ なので $a = \sqrt{a^2}$.

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} = \frac{d}{dx} \sin^{-1} y = \frac{d}{dy} \sin^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{d}{dx} \frac{x}{a}$$

$$\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく. $a > 0$ なので $a = \sqrt{a^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} &= \frac{d}{dx} \sin^{-1} y = \frac{d}{dy} \sin^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{d}{dx} \frac{x}{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく. $a > 0$ なので $a = \sqrt{a^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} &= \frac{d}{dx} \sin^{-1} y = \frac{d}{dy} \sin^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{d}{dx} \frac{x}{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

よって $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a}$ なので,

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$ (C は積分定数).

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \frac{x}{a}$ とおく. $a > 0$ なので $a = \sqrt{a^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} &= \frac{d}{dx} \sin^{-1} y = \frac{d}{dy} \sin^{-1} y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \frac{d}{dx} \frac{x}{a} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

よって $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a}$ なので,

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \left(\frac{d}{dx} \sin^{-1} \frac{x}{a} \right) dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

このようにして以下の積分公式が導かれる。

積分定数を C とおく。被積分関数の定義域は区間であるとする。

$$\text{定数 } k \text{ に対して } \int k dx = kx + C .$$

$$\text{定数 } p \text{ に対して, } p \neq -1 \text{ のとき } \int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C .$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C .$$

$$\text{定数 } a \text{ に対して, } a > 0 \text{ かつ } a \neq 1 \text{ のとき } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C .$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C .$$

$$\text{定数 } a \text{ に対して, } a \neq 0 \text{ のとき } \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C .$$

$$\text{定数 } a \text{ に対して, } a > 0 \text{ のとき } \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C .$$

例 不定積分 $\int x^3 dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int x^3 dx$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$ (C は積分定数).

例 不定積分 $\int x^3 dx$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$ (C は積分定数).

$$\int x^3 dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

終

例 不定積分 $\int \frac{1}{y^2} dy$ を計算する.

例 不定積分 $\int \frac{1}{y^2} dy$ を計算する.

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int y^{-2} dy$$

例 不定積分 $\int \frac{1}{y^2} dy$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$ (C は積分定数).

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int y^{-2} dy$$

例 不定積分 $\int \frac{1}{y^2} dy$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$ (C は積分定数).

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{y^2} dy &= \int y^{-2} dy = \frac{1}{-2+1} y^{-2+1} + C \\ &= -\frac{1}{y} + C \quad (C \text{ は積分定数}).\end{aligned}$$

終

例 不定積分 $\int \sqrt{u} du$ を計算する.

例 不定積分 $\int \sqrt{u} du$ を計算する.

$$\int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du$$

例 不定積分 $\int \sqrt{u} du$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$ (C は積分定数).

$$\int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du$$

例 不定積分 $\int \sqrt{u} du$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$ (C は積分定数).

$$\int \sqrt{u} du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} u^{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{u}^3 + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

終

問6.5.1 不定積分 $\int \frac{1}{x^4} dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{x^4} dx =$$

終

問6.5.1 不定積分 $\int \frac{1}{x^4} dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{1}{-3} x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C .$$

終

問6.5.2 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int \quad dt =$$

問6.5.2 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{-\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C .$$

終

例 不定積分 $\int e^{3x} dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int e^{3x} dx$ を計算する.

$$\int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx$$

例 不定積分 $\int e^{3x} dx$ を計算する.

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (C は積分定数).

$$\int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx$$

例 不定積分 $\int e^{3x} dx$ を計算する.

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (C は積分定数).

$$\int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C \quad (C \text{ は積分定数}). \quad \boxed{\text{終}}$$

問6.5.3 不定積分 $\int e^{\frac{x}{4}} dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int e^{\frac{x}{4}} dx =$$

終

問6.5.3 不定積分 $\int e^{\frac{x}{4}} dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int e^{\frac{x}{4}} dx = \int \left(e^{\frac{1}{4}}\right)^x dx = \frac{\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^x}{\ln e^{\frac{1}{4}}} + C = \frac{e^{\frac{x}{4}}}{\frac{1}{4}} + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C .$$

終

例 不定積分 $\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy$ を計算する.

例 不定積分 $\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy$ を計算する.

$$\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy = \int \frac{1}{y^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}^2} dy$$

例 不定積分 $\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy$ を計算する.

0 以外の定数 a について $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$ (C は積分定数).

$$\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy = \int \frac{1}{y^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}^2} dy$$

例 不定積分 $\int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy$ を計算する.

0 以外の定数 a について $\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$ (C は積分定数).

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2 + \frac{3}{4}} dy &= \int \frac{1}{y^2 + \sqrt{\frac{3}{4}}^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \tan^{-1} \frac{y}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2y}{\sqrt{3}} + C \quad (C \text{ は積分定数}). \end{aligned}$$

終

問6.5.4 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{5-y^2}} dy$ 計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-y^2}} dy =$$

問6.5.4 不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{5-y^2}} dy$ 計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-y^2}} dy = \sin^{-1} \frac{y}{\sqrt{5}} + C .$$

終

問6.5.5 不定積分 $\int \frac{1}{u^2 + \frac{9}{7}} du$ 計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{u^2 + \frac{9}{7}} du =$$

問6.5.5 不定積分 $\int \frac{1}{u^2 + \frac{9}{7}} du$ 計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{u^2 + \frac{9}{7}} du = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{7}}} \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{\frac{9}{7}}} + C = \frac{\sqrt{7}}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{7}u}{3} + C .$$

終