6.5　不定積分の公式

6.5 節において次の定理を述べた：関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$ （ C は積分定数）．この定理を用いて積分の公式を導く．

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$（$C$ は積分定数）.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int \cos x\,dx$ を求める.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）．

余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int\cos x\,dx$ を求める．余弦関数 $\cos x$ の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=\cos x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int\cos x\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （C \text{ は積分定数}）．$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int\cos x\,dx$ を求める．余弦関数 $\cos x$ の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=\cos x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int\cos x\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$

$\dfrac{d}{dx}\qquad\qquad = \cos x$ なので，

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int \cos x\,dx$ を求める．余弦関数 $\cos x$ の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x) = \cos x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int \cos x\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$

$\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ なので，

$$\int \cos x\,dx = \int\left(\frac{d}{dx}\sin x\right)dx = \sin x + C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

正弦関数 $\sin x$ の不定積分 $\int \sin x\,dx$ を求める.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$ （ C は積分定数）.

正弦関数 $\sin x$ の不定積分 $\int \sin x\,dx$ を求める．正弦関数 $\sin x$ の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=\sin x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int \sin x\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad (\ C \text{ は積分定数}).$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

正弦関数 $\sin x$ の不定積分 $\int \sin x\,dx$ を求める．正弦関数 $\sin x$ の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=\sin x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int \sin x\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （C\ は積分定数）.$$

$\dfrac{d}{dx}\qquad = -\sin x$ なので $\dfrac{d}{dx}(\qquad\qquad) = \sin x$ ，

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（ C は積分定数）.

正弦関数 $\sin x$ の不定積分 $\int \sin x\,dx$ を求める．正弦関数 $\sin x$ の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=\sin x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int \sin x\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （ C \text{ は積分定数}）.$$

$\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$ なので $\dfrac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ ，よって

$$\int \sin x\,dx = \int\left\{\frac{d}{dx}(-\cos x)\right\}dx = -\cos x + C \quad （ C \text{ は積分定数}）.$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$（$C$ は積分定数）.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

反比例 $\dfrac{1}{x}$（$x \neq 0$）の不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx$ を求める.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$ （ C は積分定数）.

反比例 $\dfrac{1}{x}$ （ $x\neq 0$ ）の不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx$ を求める．反比例 $\dfrac{1}{x}$ の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{1}{x}$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C \quad （C\text{ は積分定数}）.$$

関数 F が微分可能である区間において $\int\left\{\dfrac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$（ C は積分定数）．

反比例 $\dfrac{1}{x}$（ $x\neq 0$ ）の不定積分 $\int\dfrac{1}{x}dx$ を求める．反比例 $\dfrac{1}{x}$ の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{1}{x}$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C \quad （ C \text{ は積分定数}）．$$

$\dfrac{d}{dx} \qquad =\dfrac{1}{x}$ なので，

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

反比例 $\dfrac{1}{x}$（$x\neq 0$）の不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx$ を求める．反比例 $\dfrac{1}{x}$ の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{1}{x}$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{1}{x}$ なので，

$$\int\frac{1}{x}\,dx=\int\left(\frac{d}{dx}\ln|x|\right)dx=\ln|x|+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$（$C$ は積分定数）．

定数 p について $p \neq -1$ とする．冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める．

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$ （ C は積分定数）.

定数 p について $p \neq -1$ とする．冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める．冪関数 x^p の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x) = x^p$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int x^p dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （ C \text{ は積分定数}）.$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

定数 p について $p \neq -1$ とする．冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める．冪関数 x^p の原始関数，つまり $\displaystyle\frac{d}{dx}F(x) = x^p$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int x^p dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$

$\displaystyle\frac{d}{dx}x^{p+1} = (p+1)x^p$ なので，

$$x^p = \qquad\qquad\qquad = \frac{d}{dx}\left(\qquad\qquad\right).$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

定数 p について $p \neq -1$ とする．冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める．冪関数 x^p の原始関数，つまり $\displaystyle\frac{d}{dx}F(x) = x^p$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int x^p dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$

$\displaystyle\frac{d}{dx}x^{p+1} = (p+1)x^p$ なので，

$$x^p = \frac{1}{p+1}\frac{d}{dx}x^{p+1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right).$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（ C は積分定数）.

定数 p について $p \neq -1$ とする．冪関数 x^p の不定積分 $\int x^p dx$ を求める．冪関数 x^p の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x) = x^p$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int x^p dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （ C \text{ は積分定数}）.$$

$\dfrac{d}{dx}x^{p+1} = (p+1)x^p$ なので，

$$x^p = \frac{1}{p+1}\frac{d}{dx}x^{p+1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right).$$

このことより

$$\int x^p dx = \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right)\right\}dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1}+C \quad （ C \text{ は積分定数}）.$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（ C は積分定数）．

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$（$C$ は積分定数）．

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める．

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$ （ C は積分定数）.

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ とする．指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める．指数関数 a^x の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x) = a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int a^x dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C \quad （ C \text{ は積分定数}）.$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$（ C は積分定数）.

定数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める．指数関数 a^x の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int a^x dx=\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C \quad （ C \text{ は積分定数）.}$$

$\dfrac{d}{dx}a^x=$ 　　　　　 なので

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

定数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める．指数関数 a^x の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int a^x dx=\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$

$\dfrac{d}{dx}a^x=a^x\ln a$ なので

$$a^x= \qquad\qquad =\frac{d}{dx}\qquad .$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$ （ C は積分定数）.

定数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める．指数関数 a^x の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int a^x dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （ C \text{ は積分定数}）.$$

$\dfrac{d}{dx}a^x = a^x\ln a$ なので

$$a^x = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\frac{a^x}{\ln a} \ .$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

定数 a について $a>0$ かつ $a\neq 1$ とする．指数関数 a^x の不定積分 $\int a^x dx$ を求める．指数関数 a^x の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=a^x$ である関数 $F(x)$ が分かれば，

$$\int a^x dx = \int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ なので

$$a^x = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}\frac{a^x}{\ln a} .$$

このことより

$$\int a^x dx = \int\left(\frac{d}{dx}\frac{a^x}{\ln a}\right)dx = \frac{a^x}{\ln a}+C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$ （ C は積分定数）.

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する．変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく.

関数 F が微分可能である区間において $\int \left\{ \dfrac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(x) + C$（$C$ は積分定数）.

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y = \dfrac{x}{a}$ とおく.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\tan^{-1}y = \frac{1}{a}\frac{d}{dy}\tan^{-1}y \cdot \frac{dy}{dx}$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する. 変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)&=\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\tan^{-1}y=\frac{1}{a}\frac{d}{dy}\tan^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx}\\&=\frac{1}{a}\frac{1}{1+y^2}\frac{d}{dx}\frac{x}{a}\qquad\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する．変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) &= \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\tan^{-1}y = \frac{1}{a}\frac{d}{dy}\tan^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx}\\ &= \frac{1}{a}\frac{1}{1+y^2}\frac{d}{dx}\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)}\\ &= \frac{1}{x^2+a^2}\ .\end{aligned}$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$ （C は積分定数）.

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する．変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) &= \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\tan^{-1}y = \frac{1}{a}\frac{d}{dy}\tan^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx} \\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{1+y^2}\frac{d}{dx}\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)} \\
&= \frac{1}{x^2+a^2}\ .
\end{aligned}
$$

よって $\dfrac{1}{x^2+a^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ なので,

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（ C は積分定数）.

0 以外の定数 a に対して変数 x の関数 $\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する．変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) &= \frac{1}{a}\frac{d}{dx}\tan^{-1}y = \frac{1}{a}\frac{d}{dy}\tan^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx}\\
&= \frac{1}{a}\frac{1}{1+y^2}\frac{d}{dx}\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2\left(1+\dfrac{x^2}{a^2}\right)}\\
&= \frac{1}{x^2+a^2}\ .
\end{aligned}
$$

よって $\dfrac{1}{x^2+a^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ なので,

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx = \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right)\right\}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$$ （ C は積分定数）.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C$（$C$ は積分定数）.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する.

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$ （ C は積分定数）．

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する．変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく． $a>0$ なので $a=\sqrt{a^2}$ ．

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$（$C$ は積分定数）．

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する．変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく． $a>0$ なので $a=\sqrt{a^2}$ ．

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a}=\frac{d}{dx}\sin^{-1}y=\frac{d}{dy}\sin^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx}$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する．変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく．$a>0$ なので $a=\sqrt{a^2}$ ．

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a} = \frac{d}{dx}\sin^{-1}y = \frac{d}{dy}\sin^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{d}{dx}\frac{x}{a}$$

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$ （C は積分定数）.

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する．変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく． $a>0$ なので $a=\sqrt{a^2}$ ．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a}=\frac{d}{dx}\sin^{-1}y=\frac{d}{dy}\sin^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx}&=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{d}{dx}\frac{x}{a}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}}\\&=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ .\end{aligned}$$

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）.

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する．変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく． $a>0$ なので $a=\sqrt{a^2}$ ．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a} &= \frac{d}{dx}\sin^{-1}y = \frac{d}{dy}\sin^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{d}{dx}\frac{x}{a} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}}\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \ .
\end{aligned}
$$

よって $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{d}{dx}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ なので，

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C$（$C$ は積分定数）．

正の定数 a に対して変数 x の関数 $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を微分する．変数 y を $y=\dfrac{x}{a}$ とおく． $a>0$ なので $a=\sqrt{a^2}$ ．

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a} = \frac{d}{dx}\sin^{-1}y = \frac{d}{dy}\sin^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{d}{dx}\frac{x}{a}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}}\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ .$$

よって $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \dfrac{d}{dx}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ なので，

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int\left(\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)dx = \sin^{-1}\frac{x}{a}+C \quad（C \text{ は積分定数}）.$$

このようにして以下の積分公式が導かれる.

積分定数を C とおく. 被積分関数の定義域は区間であるとする.

定数 k に対して $\int k\,dx = kx + C$.

定数 p に対して, $p \neq -1$ のとき $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \ .$$

定数 a に対して, $a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \ .$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \ .$$

定数 a に対して, $a \neq 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$.

定数 a に対して, $a > 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int x^3 dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int x^3 dx$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1} + C$ （ C は積分定数）.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int x^3 dx$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1} + C$（$C$ は積分定数）.

$$\int x^3 dx = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,dy$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,dy$ を計算する.

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int y^{-2} dy$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,dy$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1} + C$（$C$ は積分定数）.

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int y^{-2} dy$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,dy$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \dfrac{1}{p+1}x^{p+1} + C$（$C$ は積分定数）.

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int y^{-2} dy = \frac{1}{-2+1}y^{-2+1} + C$$

$$= -\frac{1}{y} + C \quad \text{（C は積分定数）.}$$

終

例 不定積分 $\int \sqrt{u}\,du$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \sqrt{u}\, du$ を計算する.

$$\int \sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int \sqrt{u}\,du$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \frac{1}{p+1}x^{p+1} + C$（$C$ は積分定数）.

$$\int \sqrt{u}\,du = \int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

例 不定積分 $\int \sqrt{u}\, du$ を計算する.

-1 以外の定数 p について $\int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + C$（$C$ は積分定数）.

$$\int \sqrt{u}\, du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} u^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{u}^3 + C \quad （C \text{ は積分定数}）.$$

終

$\boxed{\text{問}6.5.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{x^4}\,dx =$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.5.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x^4}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{x^4}\,dx = \int x^{-4}dx = \frac{1}{-3}x^{-3} + C = -\frac{1}{3x^3} + C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.5.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int \qquad dt =$$

$\boxed{\text{問}6.5.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 不定積分 $\int e^{3x}dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int e^{3x} dx$ を計算する.

$$\int e^{3x}\,dx = \int (e^3)^x dx$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int e^{3x}dx$ を計算する.

定数 a について $a>0$ かつ $a \neq 1$ のとき $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$（$C$ は積分定数）.

$$\int e^{3x}\,dx = \int (e^3)^x dx$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int e^{3x}dx$ を計算する.

定数 a について $a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$（$C$ は積分定数）.

$$\int e^{3x}\,dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C \quad （C \text{ は積分定数}）. \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{問 6.5.3}$ 不定積分 $\int e^{\frac{x}{4}} dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int e^{\frac{x}{4}}\, dx =$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{問}6.5.3}$ 不定積分 $\int e^{\frac{x}{4}}dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = \int \left(e^{\frac{1}{4}}\right)^{x} dx = \frac{\left(e^{\frac{1}{4}}\right)^{x}}{\ln e^{\frac{1}{4}}} + C = \frac{e^{\frac{x}{4}}}{\frac{1}{4}} + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy$ を計算する.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy$ を計算する.

$$\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy = \int \frac{1}{y^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^{\,2}}\,dy$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy$ を計算する.

0 以外の定数 a について $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$（$C$ は積分定数）.

$$\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy = \int \frac{1}{y^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^{\,2}}\,dy$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy$ を計算する.

0 以外の定数 a について $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$（$C$ は積分定数）.

$$\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy = \int \frac{1}{y^2+\sqrt{\frac{3}{4}}^{\,2}}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C$$ （C は積分定数）.

終

$\boxed{\text{問}6.5.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-y^2}}\,dy$ 計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-y^2}}\,dy =$$

$\boxed{\text{問}6.5.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{5-y^2}}\,dy$ 計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{\sqrt{5-y^2}}\,dy = \sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{5}} + C \quad .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}6.5.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{u^2+\frac{9}{7}}\,du$ 計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{u^2+\frac{9}{7}}\,du =$$

$\boxed{問 6.5.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{u^2+\frac{9}{7}}\,du$ 計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{1}{u^2+\frac{9}{7}}\,du = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{7}}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{\frac{9}{7}}}+C = \frac{\sqrt{7}}{3}\tan^{-1}\frac{\sqrt{7}\,u}{3}+C\ .$$

$\boxed{終}$