

6.8 定積分の性質

定積分の定義を復習する.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

とおく. S_n を表す式を f のリーマン和という. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, $\int_a^b f(x) dx$ を a から b までの

f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で, 関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{\xi_1 - x_0, x_1 - \xi_1, \xi_2 - x_1, x_2 - \xi_2, \dots, x_{n-1} - \xi_{n-1}, \xi_n - x_{n-1}, x_n - \xi_n\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

とおく. S_n を表す式を f のリーマン和という. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, $\int_a^b f(x) dx$ を a から b までの

f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく. S_n を表す式を f のリーマン和という. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b まで

での f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す: $\int_a^b f(x) dx =$.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく。 S_n を表す式を f のリーマン和という。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい、 f のリーマン和 S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す： $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

関数 f が a から b まで積分可能であるとき、関数 f は b から a まで積分可能であるといい、 f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する：
$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx .$$

定理 k は定数とする. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき, 関数 $kf(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ も a から b まで積分可能であり,

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx ,$$
$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (\text{複号同順}) .$$

定理 k は定数とする. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき, 関数 $kf(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$ も a から b まで積分可能であり,

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx ,$$
$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (\text{複号同順}) .$$

実数 a, b について $a \leq b$ で, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは a から b まで積分可能であるとする. 次のことを示す: 関数 $f(x) + g(x)$ も a から b まで積分可能であり,

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx .$$

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})],$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}, \quad U_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\},$$

とおく.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})],$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}, \quad U_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\},$$

とおく. S_n は関数 $f(x) + g(x)$ のリーマン和であり, T_n は関数 $f(x)$ のリーマン和であり, U_n は関数 $g(x)$ のリーマン和である.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})],$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}, \quad U_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\},$$

とおく. S_n は関数 $f(x) + g(x)$ のリーマン和であり, T_n は関数 $f(x)$ のリーマン和であり, U_n は関数 $g(x)$ のリーマン和である.

関数 $f(x) + g(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ 及び関

数 $f(x)$ のリーマン和 $T_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 及び関数 $g(x)$ のリーマ

ンと $U_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ について,

関数 $f(x) + g(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ 及び関

数 $f(x)$ のリーマン和 $T_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 及び関数 $g(x)$ のリーマ

ン和 $U_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ について,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} + \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= T_n + U_n . \end{aligned}$$

関数 $f(x) + g(x)$ のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})]$ 及び関

数 $f(x)$ のリーマン和 $T_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 及び関数 $g(x)$ のリーマ

ンと $U_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ について,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1})] \\ &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} + \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= T_n + U_n . \end{aligned}$$

つまり, 関数 $f(x) + g(x)$ のリーマン和 S_n は, 関数 $f(x)$ のリーマン和 T_n と関数 $g(x)$ のリーマン和 U_n との和である.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする.

S_n は関数 $f(x) + g(x)$ のリーマン和なので $\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

T_n は関数 $f(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b f(x) dx$.

U_n は関数 $g(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \int_a^b g(x) dx$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする.

S_n は関数 $f(x) + g(x)$ のリーマン和なので $\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

T_n は関数 $f(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b f(x) dx$.

U_n は関数 $g(x)$ のリーマン和なので $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \int_a^b g(x) dx$.

$S_n = T_n + U_n$ なので,

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (T_n + U_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n + \lim_{n \rightarrow \infty} U_n \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

つまり $\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

例 定積分 $\int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx$ を計算する.

例 定積分 $\int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx$ を計算する.

$$\int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx = \int_2^6 \frac{x}{8} dx + \int_2^6 \frac{7}{x} dx = \frac{1}{8} \int_2^6 x dx + 7 \int_2^6 \frac{1}{x} dx$$

例 定積分 $\int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx$ を計算する.

$$\begin{aligned} \int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx &= \int_2^6 \frac{x}{8} dx + \int_2^6 \frac{7}{x} dx = \frac{1}{8} \int_2^6 x dx + 7 \int_2^6 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^6 + 7 [\ln |x|]_2^6 = \frac{1}{8} \frac{36 - 4}{2} + 7(\ln 6 - \ln 2) \\ &= 2 + 7 \ln 3 . \end{aligned}$$

例 定積分 $\int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx$ を計算する.

$$\begin{aligned} \int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx &= \int_2^6 \frac{x}{8} dx + \int_2^6 \frac{7}{x} dx = \frac{1}{8} \int_2^6 x dx + 7 \int_2^6 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^6 + 7 [\ln|x|]_2^6 = \frac{1}{8} \frac{36-4}{2} + 7(\ln 6 - \ln 2) \\ &= 2 + 7 \ln 3 . \end{aligned}$$

不定積分を計算してもよい.

例 定積分 $\int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx$ を計算する.

$$\begin{aligned} \int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx &= \int_2^6 \frac{x}{8} dx + \int_2^6 \frac{7}{x} dx = \frac{1}{8} \int_2^6 x dx + 7 \int_2^6 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^6 + 7 [\ln|x|]_2^6 = \frac{1}{8} \frac{36-4}{2} + 7(\ln 6 - \ln 2) \\ &= 2 + 7 \ln 3 . \end{aligned}$$

不定積分を計算してもよい. 積分定数を C とおく.

$$\int \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx = \int \frac{x}{8} dx + \int \frac{7}{x} dx = \frac{1}{8} \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{16} + 7 \ln|x| + C .$$

例 定積分 $\int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx$ を計算する.

$$\begin{aligned}\int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx &= \int_2^6 \frac{x}{8} dx + \int_2^6 \frac{7}{x} dx = \frac{1}{8} \int_2^6 x dx + 7 \int_2^6 \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^6 + 7 [\ln |x|]_2^6 = \frac{1}{8} \frac{36-4}{2} + 7(\ln 6 - \ln 2) \\ &= 2 + 7 \ln 3 .\end{aligned}$$

不定積分を計算してもよい. 積分定数を C とおく.

$$\int \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx = \int \frac{x}{8} dx + \int \frac{7}{x} dx = \frac{1}{8} \int x dx + 7 \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{16} + 7 \ln |x| + C .$$

$$\begin{aligned}\int_2^6 \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{x} \right) dx &= \left[\frac{x^2}{16} + 7 \ln |x| \right]_2^6 = \frac{36}{16} + 7 \ln 6 - \frac{4}{16} - 7 \ln 2 \\ &= \frac{9}{4} - \frac{1}{4} + 7(\ln 6 - \ln 2) \\ &= 2 + 7 \ln 3 .\end{aligned}$$

終

問6.8.1 定積分 $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x - 4\sin x}{3} dx$ を計算せよ.

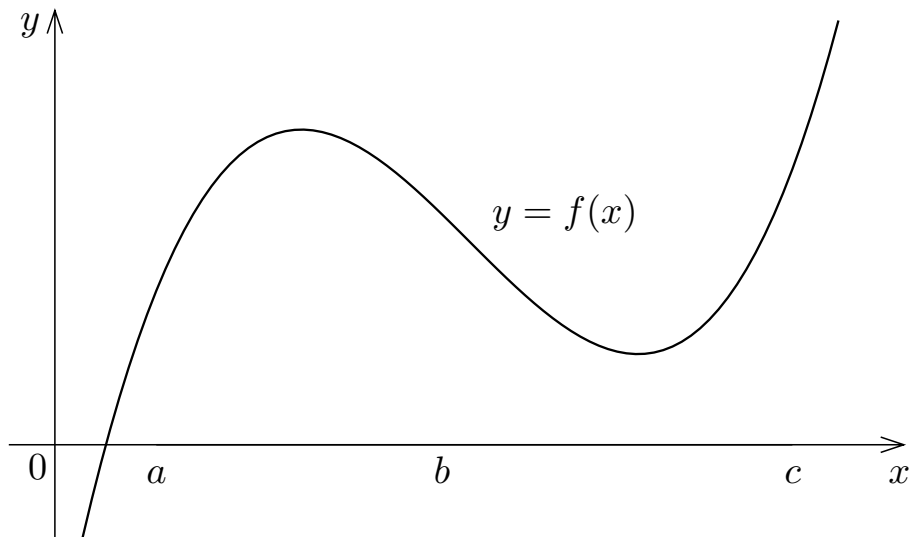
$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x - 4\sin x}{3} dx &= \left(\int_{\pi}^{2\pi} dx - \int_{\pi}^{2\pi} dx \right) \\ &= \left\{ \left[\quad \right]_{\pi}^{2\pi} - \left[\quad \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} \\ &= \end{aligned}$$

問6.8.1 定積分 $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x - 4\sin x}{3} dx$ を計算せよ.

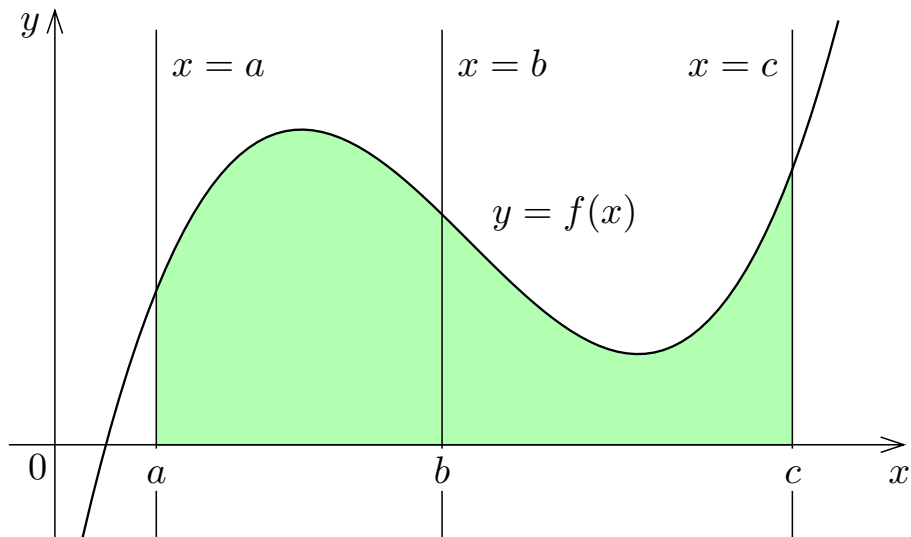
$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x - 4\sin x}{3} dx &= \frac{1}{3} \left(\int_{\pi}^{2\pi} x dx - 4 \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{\pi}^{2\pi} - 4 \left[-\cos x \right]_{\pi}^{2\pi} \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{4\pi^2 - \pi^2}{2} - 4 \{ -1 + (-1) \} \right] \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \frac{8}{3} .\end{aligned}$$

終

実数 a, b, c について $a \leq b \leq c$ とする. また, 関数 f は a から c まで積分可能であり, 区間 $[a, c]$ の各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする.

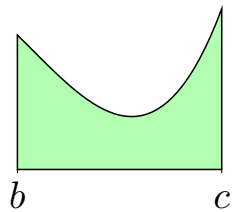
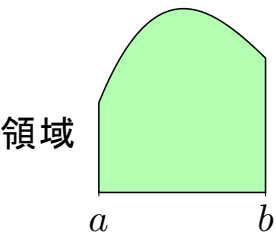


実数 a, b, c について $a \leq b \leq c$ とする。また、関数 f は a から c まで積分可能であり、区間 $[a, c]$ の各実数 x について $f(x) \geq 0$ とする。右図のように、 xy 座標平面において、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $x = a$ と $x = c$ と x 軸とで囲まれる領域を、直線 $x = b$ で仕切る。

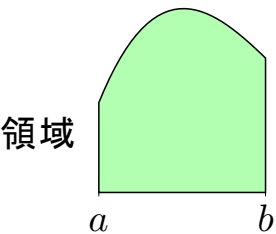


6.2 節で述べたように次のことが成り立つ.

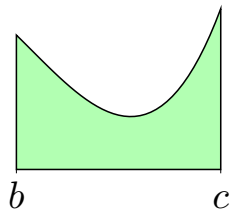
6.2節で述べたように次のことが成り立つ.



6.2節で述べたように次のことが成り立つ.

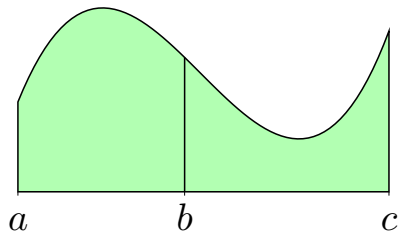


の面積は $\int_a^b f(x) dx$, 領域



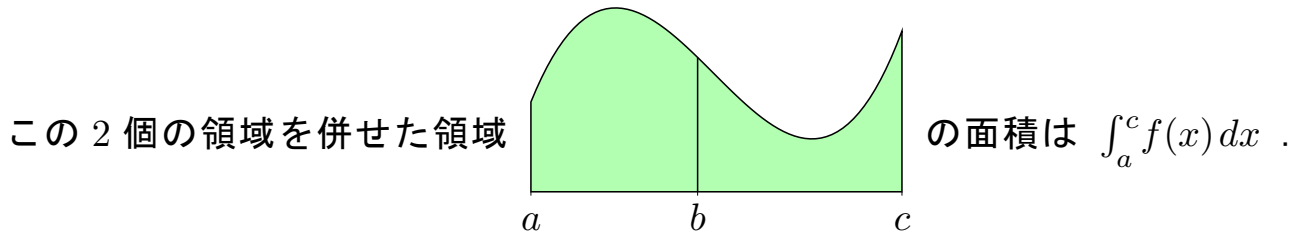
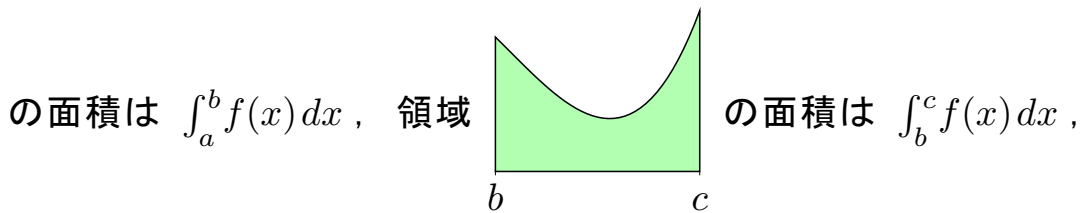
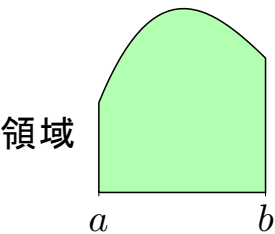
の面積は $\int_b^c f(x) dx$,

この2個の領域を併せた領域



の面積は $\int_a^c f(x) dx$.

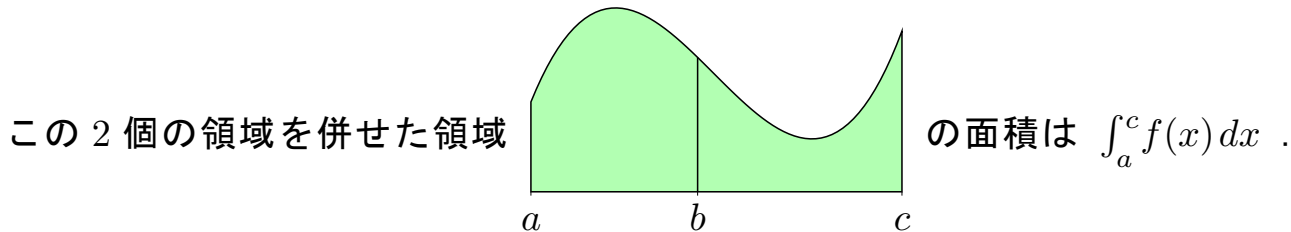
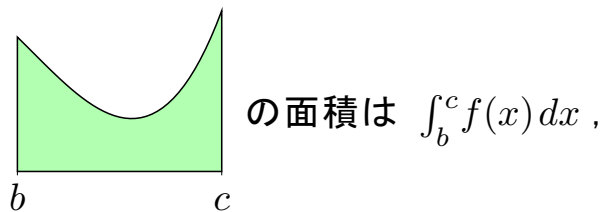
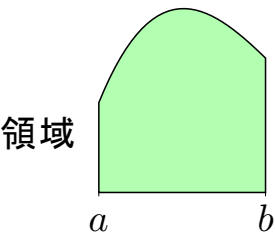
6.2節で述べたように次のことが成り立つ。



このことから次の等式が成り立つことが分かる :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx .$$

6.2節で述べたように次のことが成り立つ。



このことから次の等式が成り立つことが分かる :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx .$$

この等式は、実数 a, b, c の大小関係に関わらず成り立つ。

定理 実数 a, b, c に対して, 関数 f が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるとき, f は a から c まで積分可能であり,

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx .$$

定理 実数 a, b, c に対して, 関数 f が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるとき, f は a から c まで積分可能であり,

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx .$$

実数 a, b, c について $a \leq b \leq c$ で, 関数 f が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるとする. 次のことを示す:

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx .$$

正の各実数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = c$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく. S_n は a 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和である.

次のような正の自然数 l をとる : $l < n$ で,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{l-1} \leq \xi_l \leq x_l \leq b ,$$

$$b \leq \xi_{l+1} \leq x_{l+1} \leq \xi_{l+2} \leq x_{l+2} \leq \xi_{l+3} \leq x_{l+3} \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = c .$$

次のような正の自然数 l をとる : $l < n$ で,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{l-1} \leq \xi_l \leq x_l \leq b ,$$

$$b \leq \xi_{l+1} \leq x_{l+1} \leq \xi_{l+2} \leq x_{l+2} \leq \xi_{l+3} \leq x_{l+3} \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = c .$$

$m = n - l$, $j = k - l$ とおく. 変数 k の値が $l+1$ から n までの自然数であるとき変数 j の値は 1 から $n - l = m$ までの自然数である.

次のような正の自然数 l をとる : $l < n$ で,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{l-1} \leq \xi_l \leq x_l \leq b ,$$

$$b \leq \xi_{l+1} \leq x_{l+1} \leq \xi_{l+2} \leq x_{l+2} \leq \xi_{l+3} \leq x_{l+3} \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = c .$$

$m = n - l$, $j = k - l$ とおく . 変数 k の値が $l + 1$ から n までの自然数であるとき変数 j の値は 1 から $n - l = m$ までの自然数である .

$$T_l = \sum_{k=1}^l \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} ,$$

$$U_m = \sum_{k=l+1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{j=1}^m \{f(\xi_{l+j})(x_{l+j} - x_{l+j-1})\}$$

とおく . T_l は a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和であり , U_m は b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和である .

次のような正の自然数 l をとる : $l < n$ で,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{l-1} \leq \xi_l \leq x_l \leq b ,$$

$$b \leq \xi_{l+1} \leq x_{l+1} \leq \xi_{l+2} \leq x_{l+2} \leq \xi_{l+3} \leq x_{l+3} \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = c .$$

$m = n - l$, $j = k - l$ とおく . 変数 k の値が $l + 1$ から n までの自然数であるとき変数 j の値は 1 から $n - l = m$ までの自然数である .

$$T_l = \sum_{k=1}^l \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} ,$$

$$U_m = \sum_{k=l+1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{j=1}^m \{f(\xi_{l+j})(x_{l+j} - x_{l+j-1})\}$$

とおく . T_l は a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和であり , U_m は b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和である .

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^l \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} + \sum_{k=l+1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= T_l + U_m . \end{aligned}$$

a 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 S_n を, a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 T_l と b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 U_m とに分けることができ,

$$S_n = T_l + U_m .$$

a 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 S_n を, a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 T_l と b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 U_m とに分けることができ,

$$S_n = T_l + U_m .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする. 関数 $f(x)$ が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるので,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} T_l = \int_a^b f(x) dx , \quad \lim_{m \rightarrow \infty} U_m = \int_b^c f(x) dx .$$

a 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 S_n を, a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 T_l と b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和 U_m とに分けることができ,

$$S_n = T_l + U_m .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする. 関数 $f(x)$ が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるので,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} T_l = \int_a^b f(x) dx , \quad \lim_{m \rightarrow \infty} U_m = \int_b^c f(x) dx .$$

故に

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{l, m \rightarrow \infty} (T_l + U_m) = \lim_{l \rightarrow \infty} T_l + \lim_{m \rightarrow \infty} U_m \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \end{aligned}$$

つまり $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$.

定理 実数 a と b について $a \leq b$ で, 関数 f と g とは a から b まで積分可能であるとする. 区間 $[a, b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ ならば,

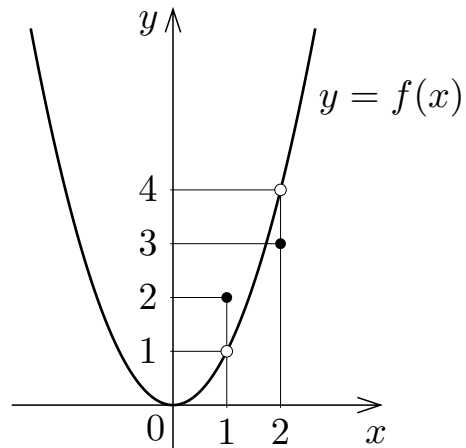
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

証明は略す.

例として関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 1 \text{ かつ } x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (x = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$x = 1$ のときと $x = 2$ のときだけ $f(x) \neq x^2$
で、それ以外のときは $f(x) = x^2$.

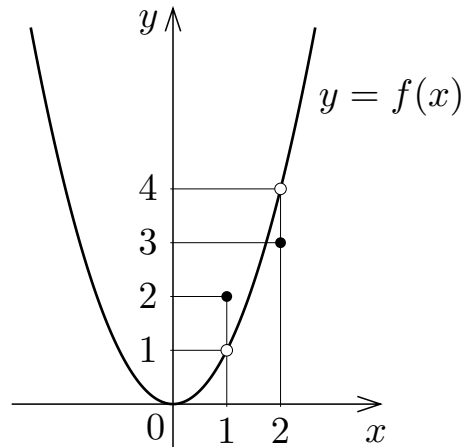


例として関数 f を次のように定める：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 1 \text{ かつ } x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (x = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

$x = 1$ のときと $x = 2$ のときだけ $f(x) \neq x^2$ で、それ以外のときは $f(x) = x^2$. このとき、定積分 $\int_0^3 f(x) dx$ と $\int_0^3 x^2 dx$ とは等しい：

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = \frac{1}{3} 3^3 - 0 \\ &= 9 . \end{aligned}$$



一般的にいうと次のようになる：関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 g について，区間 $[a, b]$ の有限個の実数 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ を除く $[a, b]$ の各実数 x について $g(x) = f(x)$ ならば，つまり， $a \leq x \leq b$ である実数 x について $x \neq c_1$ ， $x \neq c_2$ ， $x \neq c_3$ ， \dots ， $x \neq c_n$ のとき $g(x) = f(x)$ ならば，
$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

一般的にいうと次のようになる：関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 g について，区間 $[a, b]$ の有限個の実数 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ を除く $[a, b]$ の各実数 x について $g(x) = f(x)$ ならば，つまり， $a \leq x \leq b$ である実数 x について $x \neq c_1$ ， $x \neq c_2$ ， $x \neq c_3$ ， \dots ， $x \neq c_n$ のとき $g(x) = f(x)$ ならば，
$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

定理 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f は a から b まで積分可能であるとする．関数 g について，区間 $[a, b]$ の有限個の実数を除く $[a, b]$ の各実数 x について $g(x) = f(x)$ ならば， g は a から b まで積分可能であり，
$$\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

証明は略す．

例 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 5 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x) dx$ を計算する.

例 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 5 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x) dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 4$ である各実数 x について $x \neq 2$ のとき $g(x) = 3^x$ なので,

$$\int_0^4 g(x) dx = \int_0^4 3^x dx .$$

例 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 5 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x) dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 4$ である各実数 x について $x \neq 2$ のとき $g(x) = 3^x$ なので、
 $\int_0^4 g(x) dx = \int_0^4 3^x dx$. $\int_0^4 3^x dx$ を計算する：

$$\int_0^4 3^x dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3} \right]_0^4 = \frac{3^4 - 1}{\ln 3} = \frac{80}{\ln 3} .$$

例 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 5 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x) dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 4$ である各実数 x について $x \neq 2$ のとき $g(x) = 3^x$ なので,
 $\int_0^4 g(x) dx = \int_0^4 3^x dx$. $\int_0^4 3^x dx$ を計算する：

$$\int_0^4 3^x dx = \left[\frac{3^x}{\ln 3} \right]_0^4 = \frac{3^4 - 1}{\ln 3} = \frac{80}{\ln 3} .$$

故に $\int_0^4 g(x) dx = \frac{80}{\ln 3}$.

終

問6.8.2 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \frac{9}{2x^2 + 6} & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 7 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_1^3 g(x) dx$ を計算せよ.

$x \neq 2$ のとき $g(x) = \frac{9}{2x^2 + 6}$ なので,

$$\int_1^3 g(x) dx =$$

問6.8.2 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \frac{9}{2x^2 + 6} & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 7 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_1^3 g(x) dx$ を計算せよ.

$x \neq 2$ のとき $g(x) = \frac{9}{2x^2 + 6}$ なので,

$$\int_1^3 g(x) dx = \int_1^3 \frac{9}{2x^2 + 6} dx = \frac{9}{2} \int_1^3 \frac{1}{x^2 + 3} dx$$

問6.8.2 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \frac{9}{2x^2 + 6} & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 7 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_1^3 g(x) dx$ を計算せよ.

$x \neq 2$ のとき $g(x) = \frac{9}{2x^2 + 6}$ なので,

$$\begin{aligned} \int_1^3 g(x) dx &= \int_1^3 \frac{9}{2x^2 + 6} dx = \frac{9}{2} \int_1^3 \frac{1}{x^2 + 3} dx \\ &= \frac{9}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_1^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{4} . \end{aligned}$$

終

例 関数 f について, $3 < x < 7$ のとき $f(x) = \frac{1}{x}$ とする. 定積分 $\int_3^7 f(x) dx$ を計算する.

例 関数 f について、 $3 < x < 7$ のとき $f(x) = \frac{1}{x}$ とする。定積分 $\int_3^7 f(x) dx$ を計算する。

$3 \leq x \leq 7$ である各実数 x について、 $x \neq 3$, $x \neq 7$ のとき $f(x) = \frac{1}{x}$

なので、 $\int_3^7 f(x) dx = \int_3^7 \frac{1}{x} dx$.

例 関数 f について、 $3 < x < 7$ のとき $f(x) = \frac{1}{x}$ とする。定積分 $\int_3^7 f(x) dx$ を計算する。

$3 \leq x \leq 7$ である各実数 x について、 $x \neq 3$, $x \neq 7$ のとき $f(x) = \frac{1}{x}$

なので、 $\int_3^7 f(x) dx = \int_3^7 \frac{1}{x} dx$. よって、

$$\int_3^7 f(x) dx = \int_3^7 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_3^7 = \ln 7 - \ln 3 = \ln \frac{7}{3} .$$

終

問6.8.3 関数 f について, $0 < x < \frac{3}{2}$ のとき $f(x) = \sqrt{\frac{5}{6-2x^2}}$ とする. 定

積分 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ を計算せよ.

$0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ である各実数 x について, $x \neq 0$, $x \neq \frac{3}{2}$ のとき

$$f(x) = \sqrt{\frac{5}{6-2x^2}} \quad \text{なので,}$$

$$\int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx =$$

問6.8.3 関数 f について, $0 < x < \frac{3}{2}$ のとき $f(x) = \sqrt{\frac{5}{6-2x^2}}$ とする. 定

積分 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ を計算せよ.

$0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ である各実数 x について, $x \neq 0$, $x \neq \frac{3}{2}$ のとき

$f(x) = \sqrt{\frac{5}{6-2x^2}}$ なので,

$$\int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{5}{6-2x^2}} dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2(3-x^2)}} dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx$$

問6.8.3 関数 f について, $0 < x < \frac{3}{2}$ のとき $f(x) = \sqrt{\frac{5}{6-2x^2}}$ とする. 定

積分 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx$ を計算せよ.

$0 \leq x \leq \frac{3}{2}$ である各実数 x について, $x \neq 0$, $x \neq \frac{3}{2}$ のとき

$f(x) = \sqrt{\frac{5}{6-2x^2}}$ なので,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}} f(x) dx &= \int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{5}{6-2x^2}} dx = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2(3-x^2)}} dx = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2} \left[\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{3}} \right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \left(\sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1} 0 \right) = \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{10}\pi}{6}. \end{aligned}$$

終

例 実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sin 5 & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x) dx$ を計算する.

例 実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sin 5 & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x) dx$ を計算する.

$\int_0^{2\pi} \psi(x) dx = \int_0^5 \psi(x) dx + \int_5^{2\pi} \psi(x) dx$. $\int_0^5 \psi(x) dx$ 及び $\int_5^{2\pi} \psi(x) dx$ を計算する.

例 実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sin 5 & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x) dx$ を計算する.

$\int_0^{2\pi} \psi(x) dx = \int_0^5 \psi(x) dx + \int_5^{2\pi} \psi(x) dx$. $\int_0^5 \psi(x) dx$ 及び $\int_5^{2\pi} \psi(x) dx$ を計算する. $0 \leq x \leq 5$ である各実数 x について $\psi(x) = \cos x$ なので,

$$\int_0^5 \psi(x) dx = \int_0^5 \cos x dx = [\sin x]_0^5 = \sin 5 - \sin 0 = \sin 5 .$$

例 実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sin 5 & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x) dx$ を計算する.

$\int_0^{2\pi} \psi(x) dx = \int_0^5 \psi(x) dx + \int_5^{2\pi} \psi(x) dx$. $\int_0^5 \psi(x) dx$ 及び $\int_5^{2\pi} \psi(x) dx$ を計算する. $0 \leq x \leq 5$ である各実数 x について $\psi(x) = \cos x$ なので,

$$\int_0^5 \psi(x) dx = \int_0^5 \cos x dx = [\sin x]_0^5 = \sin 5 - \sin 0 = \sin 5 .$$

$5 \leq x \leq 2\pi$ である実数 x について $x \neq 5$ のとき $\psi(x) = \sin 5$ なので,

$$\int_5^{2\pi} \psi(x) dx = \int_5^{2\pi} \sin 5 dx = (\sin 5) \int_5^{2\pi} 1 dx = (\sin 5) [x]_5^{2\pi} = (2\pi - 5) \sin 5 .$$

例 実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & (x \leq 5 \text{ のとき}) \\ \sin 5 & (x > 5 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x) dx$ を計算する.

$\int_0^{2\pi} \psi(x) dx = \int_0^5 \psi(x) dx + \int_5^{2\pi} \psi(x) dx$. $\int_0^5 \psi(x) dx$ 及び $\int_5^{2\pi} \psi(x) dx$ を計算する. $0 \leq x \leq 5$ である各実数 x について $\psi(x) = \cos x$ なので,

$$\int_0^5 \psi(x) dx = \int_0^5 \cos x dx = [\sin x]_0^5 = \sin 5 - \sin 0 = \sin 5 .$$

$5 \leq x \leq 2\pi$ である実数 x について $x \neq 5$ のとき $\psi(x) = \sin 5$ なので,

$$\int_5^{2\pi} \psi(x) dx = \int_5^{2\pi} \sin 5 dx = (\sin 5) \int_5^{2\pi} 1 dx = (\sin 5) [x]_5^{2\pi} = (2\pi - 5) \sin 5 .$$

従って,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \psi(x) dx &= \int_0^5 \psi(x) dx + \int_5^{2\pi} \psi(x) dx = \sin 5 + (2\pi - 5) \sin 5 \\ &= (2\pi - 4) \sin 5 . \end{aligned}$$

終

問6.8.4 実数全体を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & (x \leq 2 \text{ のとき}) \\ \cos 2 & (x > 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^\pi \varphi(x) dx$ を計算せよ.

$$\int_0^\pi \varphi(x) dx = \int_0^2 \varphi(x) dx + \int_2^\pi \varphi(x) dx .$$

$$\int_0^2 \varphi(x) dx = \int_0^2 \quad dx =$$

$$\int_2^\pi \varphi(x) dx = \int_2^\pi \quad dx = (\quad) \int_2^\pi dx =$$

よって

$$\int_0^\pi \varphi(x) dx = \int_0^2 \varphi(x) dx + \int_2^\pi \varphi(x) dx =$$

問6.8.4 実数全体を定義域とする関数 φ を次のように定める：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & (x \leq 2 \text{ のとき}) \\ \cos 2 & (x > 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^\pi \varphi(x) dx$ を計算せよ.

$$\int_0^\pi \varphi(x) dx = \int_0^2 \varphi(x) dx + \int_2^\pi \varphi(x) dx .$$

$$\int_0^2 \varphi(x) dx = \int_0^2 \sin x dx = [-\cos x]_0^2 = -\cos 2 + \cos 0 = 1 - \cos 2 .$$

$$\int_2^\pi \varphi(x) dx = \int_2^\pi \cos 2 dx = (\cos 2) \int_2^\pi 1 dx = (\cos 2) [x]_2^\pi = (\pi - 2) \cos 2 .$$

よって

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \varphi(x) dx &= \int_0^2 \varphi(x) dx + \int_2^\pi \varphi(x) dx = 1 - \cos 2 + (\pi - 2) \cos 2 \\ &= 1 + (\pi - 3) \cos 2 . \end{aligned}$$

終

変数 x の関数 $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の定積分を計算するためには,
 $f(x) \geq 0$ である x の値の範囲と $f(x) \leq 0$ である x の値の範囲とに分けて
定積分する.

例 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する.

例 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について, $e^x - 5 = 0$ とすると $x =$.

例 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について, $e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$.

例 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について, $e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$.

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき, $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \leq 0$, $|e^x - 5| =$.

例 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について, $e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$.

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき, $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \leq 0$, $|e^x - 5| = 5 - e^x$.

例 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について, $e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$.

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき, $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \leq 0$, $|e^x - 5| = 5 - e^x$.

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき, $e^x \geq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \geq 0$, $|e^x - 5| =$.

例 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について, $e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$.

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき, $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \leq 0$, $|e^x - 5| = 5 - e^x$.

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき, $e^x \geq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \geq 0$, $|e^x - 5| = e^x - 5$.

例 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について, $e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$.

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき, $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \leq 0$, $|e^x - 5| = 5 - e^x$.

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき, $e^x \geq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \geq 0$, $|e^x - 5| = e^x - 5$. これより,

$$\int_0^3 |e^x - 5| dx = \int_0^{\ln 5} (5 - e^x) dx + \int_{\ln 5}^3 (e^x - 5) dx$$

例 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について, $e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$.

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき, $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \leq 0$, $|e^x - 5| = 5 - e^x$.

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき, $e^x \geq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \geq 0$, $|e^x - 5| = e^x - 5$. これより,

$$\int_0^3 |e^x - 5| dx = \int_0^{\ln 5} (5 - e^x) dx + \int_{\ln 5}^3 (e^x - 5) dx = [5x - e^x]_0^{\ln 5} + [e^x - 5x]_{\ln 5}^3$$

例 定積分 $\int_0^3 |e^x - 5| dx$ を計算する.

$0 \leq x \leq 3$ である実数 x について, $e^x - 5 = 0$ とすると $x = \ln 5$.

$0 \leq x \leq \ln 5$ のとき, $e^x \leq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \leq 0$, $|e^x - 5| = 5 - e^x$.

$\ln 5 \leq x \leq 3$ のとき, $e^x \geq e^{\ln 5} = 5$, $e^x - 5 \geq 0$, $|e^x - 5| = e^x - 5$. これより,

$$\begin{aligned}\int_0^3 |e^x - 5| dx &= \int_0^{\ln 5} (5 - e^x) dx + \int_{\ln 5}^3 (e^x - 5) dx = [5x - e^x]_0^{\ln 5} + [e^x - 5x]_{\ln 5}^3 \\ &= 5 \ln 5 - e^{\ln 5} + e^0 + e^3 - 15 - e^{\ln 5} + 5 \ln 5 \\ &= 5 \ln 5 - 5 + 1 + e^3 - 15 - 5 + 5 \ln 5 \\ &= e^3 + 10 \ln 5 - 24 .\end{aligned}$$

終

問6.8.5 定積分 $\int_0^\pi \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx$ を計算せよ.

$0 \leq x \leq \pi$ である実数 x について, $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ とすると $x =$.

$0 \leq x \leq$ のとき, $\cos x \geq \frac{1}{2}$, $\cos x - \frac{1}{2} \geq 0$, $\left| \cos x - \frac{1}{2} \right| =$.

$\leq x \leq \pi$ のとき, $\cos x < \frac{1}{2}$, $\cos x - \frac{1}{2} < 0$, $\left| \cos x - \frac{1}{2} \right| =$.

$$\int_0^\pi \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx = \int_0 \left(\quad \right) dx + \int^\pi \left(\quad \right) dx$$

問6.8.5 定積分 $\int_0^{\pi} \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx$ を計算せよ.

$0 \leq x \leq \pi$ である実数 x について, $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ とすると $x = \frac{\pi}{3}$.

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ のとき, $\cos x \geq \frac{1}{2}$, $\cos x - \frac{1}{2} \geq 0$, $\left| \cos x - \frac{1}{2} \right| = \cos x - \frac{1}{2}$.

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ のとき, $\cos x \leq \frac{1}{2}$, $\cos x - \frac{1}{2} \leq 0$, $\left| \cos x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \cos x$.

$$\int_0^{\pi} \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) dx$$

問6.8.5 定積分 $\int_0^{\pi} \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx$ を計算せよ.

$0 \leq x \leq \pi$ である実数 x について, $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ とすると $x = \frac{\pi}{3}$.

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ のとき, $\cos x \geq \frac{1}{2}$, $\cos x - \frac{1}{2} \geq 0$, $\left| \cos x - \frac{1}{2} \right| = \cos x - \frac{1}{2}$.

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ のとき, $\cos x \leq \frac{1}{2}$, $\cos x - \frac{1}{2} \leq 0$, $\left| \cos x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \cos x$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left| \cos x - \frac{1}{2} \right| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) dx \\ &= \left[\sin x - \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} . \end{aligned}$$

終