

6.9 定積分を用いる極限計算

定積分の定義を復習する.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

とおく. S_n を表す式を f のリーマン和という. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, $\int_a^b f(x) dx$ を a から b までの

f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で, 関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

とおく. S_n を表す式を f のリーマン和という. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, $\int_a^b f(x) dx$ を a から b までの

f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す: $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく. S_n を表す式を f のリーマン和という. $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n =$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば, 関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$ を a から b ま

での f の定積分といい, $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す: $\int_a^b f(x) dx =$.

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおく。 S_n を表す式を f のリーマン和という。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ であるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといい、 f のリーマン和 S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分といい、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表す： $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

関数 f が a から b まで積分可能であるとき, 関数 f は b から a まで積分可能であるといい, f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する: $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

実数 a と b について $a \leq b$ で, 関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み, f は a から b まで定積分可能であるとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする.

実数 a と b について $a \leq b$ で, 関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含み, f は a から b まで定積分可能であるとする. 正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとる.

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする. 定積分の定義より, $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても, リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても, リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない. そこで, $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると, リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に, $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると, リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ である実数 ξ_k をどのように定めても、リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わらない。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

また別に、 $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} .$$

関数 f の定積分を計算するために、しばしば、 f のリーマン和として

$$\sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\} \text{ 或いは } \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \text{ を用いる.}$$

定積分はリーマン和の極限值である。微分積分の基本定理を用いると、多くの場合、リーマン和の極限值を計算するより、不定積分を用いて定積分を計算する方が楽である。それ故、逆に、リーマン和の極限值を計算するのに定積分を用いることがある。

等差数列について次のことがいえた：第 0 項から始まる数列 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ 及び定数 d について、 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ が公差が d である等差数列であることと、各自然数 k について $a_k = a_0 + dk$ であることとは同値である。

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める. この

数列は $\frac{4}{n}$ 数列であり,

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める. この

数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり,

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \quad .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める. この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり,

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} =$ なので

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3} &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{4} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3} &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{4} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 \quad のリーマン和である。

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k+3} &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{4} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 $\frac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和である。

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n} ;$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. リーマン和が定積分に収束ことをいうために $n \rightarrow \infty$ のとき $\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束することを確認する.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン

和 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分

$\int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx$ に収束する.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン

和 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分

$\int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx$ に収束する. 故に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3} \right) = \int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx = \frac{1}{4} \int_3^7 x^{\frac{1}{2}} dx$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン

和 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分

$\int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4}{n}k + 3} \right) &= \int_3^7 \frac{\sqrt{x}}{4} dx = \frac{1}{4} \int_3^7 x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_3^7 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} (7\sqrt{7} - 3\sqrt{3}) \\ &= \frac{7\sqrt{7}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

問6.9.1 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{5}{n}k+2$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この

数列は公差が $\frac{5}{n}$ の等差数列であり、

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{5n}{n} + 2 = 5 + 2 = 7.$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{5}{n} \cdot \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5} \sqrt{\frac{5}{n}k+2} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{5} (x_k - x_{k-1}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{5} (x_k - x_{k-1}) \right\}. \end{aligned}$$

これは関数 $f(x) = \sqrt{5x+2}$ のリーマン和である。

問6.9.1 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{5}{n}k+2$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{5}{n}$ の等差数列であり、

$$2 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2} &= \sum_{k=1}^n \left(\quad \right) = \sum_{k=1}^n \left(\quad \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \quad (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 \quad のリーマン和である。

問6.9.1 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{5}{n}k+2$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数列は公差が $\frac{5}{n}$ の等差数列であり、

$$2 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{5}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k+2} &= \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{5} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{5} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 $\frac{\sqrt{x}}{5}$ のリーマン和である。

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{5}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{\sqrt{x}}{5}$ のリーマン

和 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k + 2} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sqrt{x_k}}{5} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分

$\int_2^7 \frac{\sqrt{x}}{5} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{5}{n}k + 2} \right) &= \int_2^7 \frac{\sqrt{x}}{5} dx = \frac{1}{5} \int_2^7 x^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_2^7 = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} (7\sqrt{7} - 2\sqrt{2}) \\ &= \frac{14\sqrt{7} - 4\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

終

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が の等差数列であり、

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \quad .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} =$ なので

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi}$.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left(\cos x_{k-1} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \cos x_{k-1} \cdot \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left(\cos x_{k-1} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \cos x_{k-1} \cdot \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 \quad のリーマン和である。

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3\pi}{2n}k - \frac{\pi}{6}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が $\frac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{6} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{4\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n} (k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left(\cos x_{k-1} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \cos x_{k-1} \cdot \frac{2(x_k - x_{k-1})}{3\pi} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 $\frac{2 \cos x}{3\pi}$ のリーマン和である。

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n} ;$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. リーマン和が定積分に収束ことをいうために $n \rightarrow \infty$ のとき $\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束することを確認する.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{2 \cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$ に収束する.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{2 \cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$ に収束する. 故に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left\{ \frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6} \right\} \right] = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{2 \cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} = \sum_{k=1}^n \left\{\frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k - x_{k-1})\right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$ に収束する. 故に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} \right] = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx = \frac{2}{3\pi} [\sin x]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}}$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3\pi}{2n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3\pi}{2n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{2 \cos x}{3\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} = \sum_{k=1}^n \left\{\frac{2 \cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k - x_{k-1})\right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1) - \frac{\pi}{6}\right\} \right] &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \frac{2 \cos x}{3\pi} dx = \frac{2}{3\pi} [\sin x]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3\pi} \left\{ \sin \frac{4\pi}{3} - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right\} = \frac{2}{3\pi} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{3}}{3\pi}. \end{aligned}$$

終

問6.9.2 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n} (k-1) - \frac{\pi}{3} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{7\pi}{6n}k - \frac{\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が $\frac{7\pi}{6n}$ の等差数列であり、

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{3} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{7\pi}{6n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{6n}{7\pi} \cdot \frac{7\pi}{6n}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n} (k-1) - \frac{\pi}{3} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{6n}{7\pi} \sin \left(\frac{7\pi}{6n} (k-1) - \frac{\pi}{3} \right) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{6n}{7\pi} \left(x_k - x_{k-1} \right) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 $f(x) = \frac{6}{7} \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$ のリーマン和である。

問6.9.2 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n} (k-1) - \frac{\pi}{3} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{7\pi}{6n}k - \frac{\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が $\frac{7\pi}{6n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{3} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{5\pi}{6} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{7\pi}{6n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{6(x_k - x_{k-1})}{7\pi}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n} (k-1) - \frac{\pi}{3} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \right. \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \quad (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 \quad のリーマン和である.

問6.9.2 正の自然数を表す変数 n の関数 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n} (k-1) - \frac{\pi}{3} \right\}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{7\pi}{6n}k - \frac{\pi}{3}$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める；この

数列は公差が $\frac{7\pi}{6n}$ の等差数列であり、

$$-\frac{\pi}{3} = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{5\pi}{6} .$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{7\pi}{6n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{6(x_k - x_{k-1})}{7\pi}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n} (k-1) - \frac{\pi}{3} \right\} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \sin x_{k-1} \cdot \frac{6(x_k - x_{k-1})}{7\pi} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{6 \sin x_{k-1}}{7\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} . \end{aligned}$$

これは関数 $\frac{6 \sin x}{7\pi}$ のリーマン和である。

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{7\pi}{6n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{6 \sin x}{7\pi}$ のリーマン和

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3} \right\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{6 \sin x_{k-1}}{7\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} \text{ は } n \rightarrow \infty \text{ のとき}$$

定積分 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{6 \sin x}{7\pi} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left\{ \frac{7\pi}{6n}(k-1) - \frac{\pi}{3} \right\} \right] &= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{6 \sin x}{7\pi} dx = \frac{6}{7\pi} [-\cos x]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} \\ &= \frac{6}{7\pi} \left\{ -\cos \frac{5\pi}{6} + \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right\} \\ &= \frac{6}{7\pi} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3 + 3\sqrt{3}}{7\pi}. \end{aligned}$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について, ある関数のリーマン和であることを説明して, $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n} + 4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k + 4} .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4}.$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める. この数列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり,

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める. この数

列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり,

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = \quad .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める. この数

列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり,

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める. この数

列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり,

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} =$ なので

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数

列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり、

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる。

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4}.$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数

列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり、

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7.$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{\frac{3}{n}k+4} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{3} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}.$$

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について, ある関数のリーマン和であることを説明して, $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4}.$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める. この数

列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり,

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7.$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について, $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{\frac{3}{n}k+4} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{3} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}.$$

これは関数 のリーマン和である.

例 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n}$ について, ある関数のリーマン和であることを説明して, $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n} = \frac{6}{n\left(\frac{3k}{n}+4\right)} = \frac{1}{n} \frac{6}{\frac{3}{n}k+4}.$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{3}{n}k+4$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める. この数

列は公差が $\frac{3}{n}$ の等差数列であり,

$$4 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7.$$

$k=1, 2, 3, \dots, n$ について, $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{3}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{\frac{3}{n}k+4} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{6}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{3} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}.$$

これは関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和である.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n} ;$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. リーマン和が定積分に収束ことをいうために $n \rightarrow \infty$ のとき $\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束することを確認する.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって, 関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_4^7 \frac{2}{x} dx$ に収束する.

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって, 関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_4^7 \frac{2}{x} dx$ に収束する. 故に,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \int_4^7 \frac{2}{x} dx$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって, 関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_4^7 \frac{2}{x} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} &= \int_4^7 \frac{2}{x} dx = 2[\ln|x|]_4^7 \\ &= 2(\ln 7 - \ln 4) \end{aligned}$$

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ について $x_k - x_{k-1} = \frac{3}{n}$ なので,

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n};$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって, 関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_4^7 \frac{2}{x} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{3k+4n} &= \int_4^7 \frac{2}{x} dx = 2[\ln|x|]_4^7 \\ &= 2(\ln 7 - \ln 4) = 2 \ln \frac{7}{4} = \ln \left(\frac{7}{4} \right)^2 \\ &= \ln \frac{49}{16}. \end{aligned}$$

終

問6.9.3 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

自然数 k に対して

$$\frac{8}{4k+3n} = \frac{1}{n} \frac{8}{\frac{4}{n}k+3} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k =$ $(k = 0, 1, 2, 3, \dots, n)$ と定める。この数

列は公差が $\frac{1}{n}$ の等差数列であり、

$$= x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = \frac{1}{n} .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ なので $\frac{1}{n} =$ $\frac{1}{n}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \frac{8}{\frac{4}{n}k+3} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \left(\frac{8}{\frac{4}{n}k+3} - \frac{8}{\frac{4}{n}(k-1)+3} \right) \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $f(x) = \frac{8}{4x+3}$ のリーマン和である。

問6.9.3 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n}$ について、ある関数の

リーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ.

自然数 k に対して

$$\frac{8}{4k+3n} = \frac{1}{n} \frac{8}{\frac{4}{n}k+3} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める. この数

列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり,

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \frac{8}{\frac{4}{n}k+3} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \frac{8}{x_k - x_{k-1}} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{8}{4} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $f(x) = \frac{8}{4x+3}$ のリーマン和である.

問6.9.3 正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n}$ について、ある関数のリーマン和であることを説明して、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限值を調べよ。

自然数 k に対して

$$\frac{8}{4k+3n} = \frac{1}{n} \frac{8}{\frac{4}{n}k+3} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ を $x_k = \frac{4}{n}k+3$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots, n$) と定める。この数

列は公差が $\frac{4}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 .$$

自然数 $k=1, 2, 3, \dots, n$ について、 $x_k - x_{k-1} = \frac{4}{n}$ なので $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{4}$.

$$\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{8}{\frac{4}{n}k+3} \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{8}{x_k} \frac{x_k - x_{k-1}}{4} \right) = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\} .$$

これは関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和である。

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n} ;$$

これは $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. よって関数 $\frac{2}{x}$ のリーマン和

$\sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{2}{x_k} (x_k - x_{k-1}) \right\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき定積分 $\int_3^7 \frac{2}{x} dx$ に収束する. 故に,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{8}{4k+3n} &= \int_3^7 \frac{2}{x} dx = 2[\ln|x|]_3^7 \\ &= 2(\ln 7 - \ln 3) = 2 \ln \frac{7}{3} \\ &= \ln \frac{49}{9} . \end{aligned}$$

終