7.2 不定積分の置換積分法

6.5 節において述べた次の定理を述べた.

定理　関数 f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとき,

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = f(x) \quad .$$

定理　関数 F が微分可能である区間において,

$$\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x) + C \quad （ C \text{ は積分定数}）.$$

関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $G(y)=\int g(y)\,dy$ があるとする. 変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする.

関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $G(y)=\int g(y)\,dy$ があるとする．変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=\dfrac{d}{dy}\left\{\int g(y)\,dy\right\}=g(y)$ ．

関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $G(y) = \int g(y)\,dy$ があるとする．変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y) = \dfrac{d}{dy}\left\{\int g(y)\,dy\right\} = g(y)$ ．合成関数の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

微分可能な関数 φ と f とについて，φ の値域が f の定義域に含まれるとき， $y = \varphi(x)$ である変数 x, y について $\dfrac{d}{dx}f(y) = \dfrac{d}{dy}f(y) \cdot \dfrac{dy}{dx}$ ．

関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $G(y)=\int g(y)\,dy$ があるとする．変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=\dfrac{d}{dy}\left\{\int g(y)\,dy\right\}=g(y)$ ．合成関数の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}G(y)=\frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx}=g(y)\,\frac{dy}{dx}\ .$$

関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $G(y)=\int g(y)\,dy$ があるとする．変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=\dfrac{d}{dy}\left\{\int g(y)\,dy\right\}=g(y)$ ．合成関数の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}G(y)=\frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx}=g(y)\,\frac{dy}{dx}\ .$$

変数 $x\,,y$ 及びそれらの微分 $dx\,,dy$ について， $g(y)\,dy=f(x)\,dx$ とすると，
$g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので

$$\frac{d}{dx}G(y)=f(x)\ ,$$

　関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $G(y)=\int g(y)\,dy$ があるとする．変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=\dfrac{d}{dy}\left\{\int g(y)\,dy\right\}=g(y)$ ．合成関数の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}G(y)=\frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx}=g(y)\,\frac{dy}{dx}\ .$$

変数 $x\,,y$ 及びそれらの微分 $dx\,,dy$ について， $g(y)\,dy=f(x)\,dx$ とすると， $g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので

$$\frac{d}{dx}G(y)=f(x)\ ,$$

積分定数を C とおくと， $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}G(y)\right\}dx=G(y)+C$ なので，

関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $G(y)=\int g(y)\,dy$ があるとする．変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=\dfrac{d}{dy}\left\{\int g(y)\,dy\right\}=g(y)$ ．合成関数の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}G(y)=\frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx}=g(y)\,\frac{dy}{dx}\ .$$

変数 $x\,,y$ 及びそれらの微分 $dx\,,dy$ について， $g(y)\,dy=f(x)\,dx$ とすると， $g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので

$$\frac{d}{dx}G(y)=f(x)\ ,$$

積分定数を C とおくと， $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}G(y)\right\}dx=G(y)+C$ なので，

$$\int f(x)\,dx=\int\left\{\frac{d}{dx}G(y)\right\}dx=G(y)+C=\int g(y)\,dy+C\ .$$

関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $G(y)=\int g(y)\,dy$ があるとする．変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする． $\dfrac{d}{dy}G(y)=\dfrac{d}{dy}\left\{\int g(y)\,dy\right\}=g(y)$ ．合成関数の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}G(y)=\frac{d}{dy}G(y)\cdot\frac{dy}{dx}=g(y)\,\frac{dy}{dx}\ .$$

変数 $x\,,y$ 及びそれらの微分 $dx\,,dy$ について， $g(y)\,dy=f(x)\,dx$ とすると， $g(y)\,\dfrac{dy}{dx}=f(x)$ なので

$$\frac{d}{dx}G(y)=f(x)\ ,$$

積分定数を C とおくと， $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}G(y)\right\}dx=G(y)+C$ なので，

$$\int f(x)\,dx=\int\left\{\frac{d}{dx}G(y)\right\}dx=G(y)+C=\int g(y)\,dy+C\ .$$

慣例に従って積分定数を略すと，

$$f(x)\,dx=g(y)\,dy \quad \text{ならば} \quad \int f(x)\,dx=\int g(y)\,dy\ .$$

定理（不定積分の置換積分法）　関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $\int g(y)\,dy$ があるとする．変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．$x\,,y$ 及びそれらの微分 $dx\,,dy$ について，

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy \quad \text{ならば} \quad \int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy\ .$$

定理（不定積分の置換積分法）　関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $\int g(y)\,dy$ があるとする．変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．$x\,,y$ 及びそれらの微分 $dx\,,dy$ について，

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy \quad \text{ならば} \quad \int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy \ .$$

　このように，関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ の中に現われる dx は，元々の定義では，変数 x の微分 dx とは特に関係ない．しかし実は，積分計算において，不定積分の式 $\int f(x)\,dx$ の中に現われる dx は変数 x の微分 dx であるかのように扱うことができる．

定理（不定積分の置換積分法）　関数 $f(x)$ と $g(y)$ との定義域は区間であり $g(y)$ の不定積分 $\int g(y)\,dy$ があるとする．変数 y は変数 x の微分可能な関数であるとする．$x\,,y$ 及びそれらの微分 $dx\,,dy$ について，

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy \quad \text{ならば} \quad \int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy \ .$$

　この置換積分法の公式において次のことに注意すること：$f(x)$ は変数として x だけが現れる（ y は現れない）式で，$g(y)$ は変数として y だけが現れる（ x は現れない）式である．

$\boxed{\text{例}}$ 微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できるのは，$\dfrac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が $\sin$ の中身と一致するときである.

$$\frac{d}{d\boxed{x}}\sin\boxed{x} = \cos x \;, \qquad \frac{d}{d\boxed{t}}\sin\boxed{t} = \cos t \;.$$

一致　　　　　　一致

例 微分公式 $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できるのは，$\dfrac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が $\sin$ の中身と一致するときである．

$$\frac{d}{d\boxed{x}}\sin\boxed{x} = \cos x\ , \qquad \frac{d}{d\boxed{t}}\sin\boxed{t} = \cos t\ .$$

一致　　　　　一致

同様に，積分公式 $\int \cos x\,dx = \sin x + C$（$C$ は積分定数）を適用できるのは，$\cos$ の中身が積分変数であるときである．

$$\int \cos\boxed{x}\,d\boxed{x} = \sin x + C\ , \qquad \int \cos\boxed{y}\,d\boxed{y} = \sin y + C\ .$$

一致　　　　　一致

例 微分公式 $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を適用できるのは，$\frac{d}{dx}$ の横線の下側の変数 x が $\sin$ の中身と一致するときである．

$$\frac{d}{d\boxed{x}}\sin\boxed{x} = \cos x\ , \qquad \frac{d}{d\boxed{t}}\sin\boxed{t} = \cos t\ .$$

一致　　一致

同様に，積分公式 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$（ C は積分定数）を適用できるのは，$\cos$ の中身が積分変数であるときである．

$$\int \cos\boxed{x}\,d\boxed{x} = \sin x + C\ , \qquad \int \cos\boxed{y}\,d\boxed{y} = \sin y + C\ .$$

一致　　一致

変数 x の関数 $\cos(3x+2)$ の不定積分 $\int \cos(3x+2)\,dx$ を計算するには，このままでは積分公式 $\int \cos x\, dx = \sin x + C$ を適用できない．

変数 x の関数 $\cos(3x+2)$ の不定積分 $\int \cos(3x+2)\,dx$ は次のようにして計算する.

変数 x の関数 $\cos(3x+2)$ の不定積分 $\int \cos(3x+2)\,dx$ は次のようにして計算する．変数 y を $y=3x+2$ とおく．

変数 x の関数 $\cos(3x+2)$ の不定積分 $\int \cos(3x+2)\,dx$ は次のようにして計算する．変数 y を $y=3x+2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x+2) = 3$ なので，

$dy = 3\,dx$ ， $dx = \dfrac{1}{3}\,dy$ ．

変数 y が変数 x の微分可能な関数であるとき，微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ 及び関数 f と g 及び x の微分 dx 及び y の微分 dy について，

$$g(y)\,\frac{dy}{dx} = f(x) \iff g(y)\,dy = f(x)\,dx \ .$$

変数 x の関数 $\cos(3x+2)$ の不定積分 $\int \cos(3x+2)\,dx$ は次のようにして計算する．変数 y を $y=3x+2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x+2) = 3$ なので，$dy = 3\,dx$ ，$dx = \dfrac{1}{3}\,dy$ ．よって，

$$\cos(3x+2)\,dx = \cos y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\cos y\,dy \ .$$

変数 x の関数 $\cos(3x+2)$ の不定積分 $\int \cos(3x+2)\,dx$ は次のようにして計算する．変数 y を $y = 3x+2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x+2) = 3$ なので，$dy = 3\,dx$ ， $dx = \dfrac{1}{3}\,dy$ ．よって，

$$\cos(3x+2)\,dx = \cos y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\cos y\,dy \ .$$

故に，積分定数を C とおくと，

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \int \frac{1}{3}\cos y\,dy$$

変数 x の関数 $\cos(3x+2)$ の不定積分 $\int \cos(3x+2)\,dx$ は次のようにして計算する．変数 y を $y=3x+2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x+2) = 3$ なので，$dy = 3\,dx$ ，$dx = \dfrac{1}{3}\,dy$ ．よって，

$$\cos(3x+2)\,dx = \cos y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\cos y\,dy \ .$$

故に，積分定数を C とおくと，

$$\int \cos(3x+2)\,dx = \int \frac{1}{3}\cos y\,dy = \frac{1}{3}\int \cos y\,dy = \frac{1}{3}\sin y + C$$

変数 y の式を変数 x の式に戻す．

変数 x の関数 $\cos(3x+2)$ の不定積分 $\int \cos(3x+2)\,dx$ は次のようにして計算する．変数 y を $y=3x+2$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x+2) = 3$ なので，$dy = 3\,dx$ ， $dx = \dfrac{1}{3}\,dy$ ．よって，

$$\cos(3x+2)\,dx = \cos y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\cos y\,dy \ .$$

故に，積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \cos(3x+2)\,dx &= \int \frac{1}{3}\cos y\,dy = \frac{1}{3}\int \cos y\,dy = \frac{1}{3}\sin y + C \\ &= \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.2.1}$ 不定積分 $\int \sin(5x-4)\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y=$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(\qquad)=$ なので $dy=\quad dx$,

$dx=\quad dy$. よって,

$$\sin(5x-4)\,dx=\qquad dy=\qquad dy\ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \sin(5x-4)\,dx=\int \qquad dy=$$

$\boxed{問 7.2.1}$ 不定積分 $\int \sin(5x-4)\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = 5x - 4$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(5x-4) = 5$ なので $dy = 5\,dx$, $dx = \dfrac{1}{5}\,dy$. よって,

$$\sin(5x-4)\,dx = \sin y\,\frac{1}{5}\,dy = \frac{1}{5}\sin y\,dy \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \sin(5x-4)\,dx = \int \qquad\qquad dy =$$

$\boxed{問 7.2.1}$ 不定積分 $\int \sin(5x-4)\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = 5x - 4$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(5x-4) = 5$ なので $dy = 5\,dx$, $dx = \dfrac{1}{5}\,dy$. よって,

$$\sin(5x-4)\,dx = \sin y\,\frac{1}{5}\,dy = \frac{1}{5}\sin y\,dy \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \sin(5x-4)\,dx &= \int \frac{1}{5}\sin y\,dy = \frac{1}{5}\int \sin y\,dy = \frac{1}{5}(-\cos y) + C \\ &= -\frac{1}{5}\cos(5x-4) + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy$ を計算する.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=$ 　　　　　　 とおく.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z = 2y+1$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{d}{dy}(2y+1) = 2$ なので, $dz = 2\,dy$,
$dy = \dfrac{1}{2}\,dz$,

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z = 2y+1$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{d}{dy}(2y+1) = 2$ なので, $dz = 2\,dy$, $dy = \dfrac{1}{2}\,dz$. よって,

$$\frac{7}{(2y+1)^4}\,dy = \frac{7}{z^4}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{7}{2}\,\frac{1}{z^4}\,dz \ .$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z = 2y+1$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{d}{dy}(2y+1) = 2$ なので, $dz = 2\,dy$, $dy = \dfrac{1}{2}\,dz$. よって,

$$\frac{7}{(2y+1)^4}\,dy = \frac{7}{z^4}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{7}{2}\,\frac{1}{z^4}\,dz \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy = \int \frac{7}{2}\,\frac{1}{z^4}\,dz$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z = 2y+1$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{d}{dy}(2y+1) = 2$ なので, $dz = 2\,dy$, $dy = \dfrac{1}{2}\,dz$. よって,

$$\frac{7}{(2y+1)^4}\,dy = \frac{7}{z^4}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{7}{2}\,\frac{1}{z^4}\,dz \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy = \int \frac{7}{2}\,\frac{1}{z^4}\,dz = \frac{7}{2}\int z^{-4}\,dz = \frac{7}{2}\,\frac{1}{-3}\,z^{-3} + C = -\frac{7}{6z^3} + C$$

変数 z の式を変数 y の式に戻す.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=2y+1$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{d}{dy}(2y+1)=2$ なので, $dz=2\,dy$,
$dy=\dfrac{1}{2}\,dz$. よって,

$$\frac{7}{(2y+1)^4}\,dy = \frac{7}{z^4}\frac{1}{2}\,dz = \frac{7}{2}\frac{1}{z^4}\,dz \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \frac{7}{(2y+1)^4}\,dy = \int \frac{7}{2}\frac{1}{z^4}\,dz = \frac{7}{2}\int z^{-4}\,dz = \frac{7}{2}\frac{1}{-3}z^{-3}+C = -\frac{7}{6z^3}+C$$
$$= -\frac{7}{6(2y+1)^3}+C \ .$$

終

$\boxed{\text{問}7.2.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{9}{(4y+5)^3}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z =$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{d}{dy}(\qquad) =$ なので, $dz = \quad dy$,

$dy = \quad dz$. よって,

$$\frac{9}{(4y+5)^3}\,dy = \qquad dz = \qquad dz \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \frac{9}{(4y+5)^3}\,dy = \int \qquad dz =$$

$\boxed{\text{問 }7.2.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{9}{(4y+5)^3}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z = 4y+5$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{d}{dy}(4y+5) = 4$ なので, $dz = 4\,dy$, $dy = \dfrac{1}{4}\,dz$. よって,

$$\frac{9}{(4y+5)^3}\,dy = \frac{9}{z^3}\,\frac{1}{4}\,dz = \frac{9}{4}\,\frac{1}{z^3}\,dz \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \frac{9}{(4y+5)^3}\,dy = \int \qquad dz =$$

問7.2.2 不定積分 $\displaystyle\int \frac{9}{(4y+5)^3}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z = 4y+5$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = \dfrac{d}{dy}(4y+5) = 4$ なので, $dz = 4\,dy$, $dy = \dfrac{1}{4}\,dz$. よって,

$$\frac{9}{(4y+5)^3}\,dy = \frac{9}{z^3}\,\frac{1}{4}\,dz = \frac{9}{4}\,\frac{1}{z^3}\,dz \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\begin{aligned}\int \frac{9}{(4y+5)^3}\,dy &= \int \frac{9}{4}\,\frac{1}{z^3}\,dz = \frac{9}{4}\int z^{-3}\,dz = \frac{9}{4}\,\frac{1}{-2}\,z^{-2}+C \\ &= -\frac{9}{8(4y+5)^2}+C \ .\end{aligned}$$

終

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{5u+3}\,du$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{5u+3}\,du$ を計算する.

変数 v を $v=$ とおく.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{5u+3}\,du$ を計算する.

変数 v を $v = 5u + 3$ とおく. $\dfrac{dv}{du} = 5$ なので, $dv = 5\,du$, $du = \dfrac{1}{5}\,dv$.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{5u+3}\,du$ を計算する.

変数 v を $v=5u+3$ とおく. $\dfrac{dv}{du}=5$ なので, $dv=5\,du$, $du=\dfrac{1}{5}\,dv$.

よって,

$$\frac{7}{5u+3}\,du=\frac{7}{v}\,\frac{1}{5}\,dv=\frac{7}{5}\,\frac{1}{v}\,dv\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{5u+3}\,du$ を計算する.

変数 v を $v=5u+3$ とおく. $\dfrac{dv}{du}=5$ なので, $dv=5\,du$, $du=\dfrac{1}{5}\,dv$.

よって,

$$\frac{7}{5u+3}\,du = \frac{7}{v}\,\frac{1}{5}\,dv = \frac{7}{5}\,\frac{1}{v}\,dv \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \frac{7}{5u+3}\,du = \int \frac{7}{5}\,\frac{1}{v}\,dv$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{5u+3}\,du$ を計算する.

変数 v を $v = 5u+3$ とおく. $\dfrac{dv}{du} = 5$ なので, $dv = 5\,du$, $du = \dfrac{1}{5}\,dv$.

よって,

$$\frac{7}{5u+3}\,du = \frac{7}{v}\,\frac{1}{5}\,dv = \frac{7}{5}\,\frac{1}{v}\,dv \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \frac{7}{5u+3}\,du = \int \frac{7}{5}\,\frac{1}{v}\,dv = \frac{7}{5}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{7}{5}\ln|v| + C$$

変数 v の式を変数 u の式に戻す.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7}{5u+3}\,du$ を計算する.

変数 v を $v=5u+3$ とおく. $\dfrac{dv}{du}=5$ なので, $dv=5\,du$, $du=\dfrac{1}{5}\,dv$.

よって,

$$\frac{7}{5u+3}\,du = \frac{7}{v}\,\frac{1}{5}\,dv = \frac{7}{5}\,\frac{1}{v}\,dv \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\begin{aligned}\int \frac{7}{5u+3}\,du &= \int \frac{7}{5}\,\frac{1}{v}\,dv = \frac{7}{5}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{7}{5}\ln|v|+C \\ &= \frac{7}{5}\ln|5u+3|+C \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問 7.2.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{9}{4u+5}\,du$ を計算せよ.

変数 v を $v =$ 　　　　 とおく. $\dfrac{dv}{du} =$ 　 なので, $dv =$ 　 du , $du =$ 　 dv .

よって,

$$\frac{9}{4u+5}\,du = \qquad dv = \qquad dv \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{9}{4u+5}\,du = \int \qquad dv =$$

$\boxed{問7.2.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{9}{4u+5}\,du$ を計算せよ.

　変数 v を $v = 4u+5$ とおく. $\dfrac{dv}{du} = 4$ なので, $dv = 4\,du$, $du = \dfrac{1}{4}\,dv$.

よって,

$$\frac{9}{4u+5}\,du = \frac{9}{v}\,\frac{1}{4}\,dv = \frac{9}{4}\,\frac{1}{v}\,dv \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{9}{4u+5}\,du = \int \qquad dv =$$

$\boxed{\text{問}7.2.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{9}{4u+5}\,du$ を計算せよ.

変数 v を $v = 4u + 5$ とおく. $\dfrac{dv}{du} = 4$ なので, $dv = 4\,du$, $du = \dfrac{1}{4}\,dv$.

よって,

$$\frac{9}{4u+5}\,du = \frac{9}{v}\,\frac{1}{4}\,dv = \frac{9}{4}\,\frac{1}{v}\,dv \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{9}{4u+5}\,du &= \int \frac{9}{4}\,\frac{1}{v}\,dv = \frac{9}{4}\int \frac{1}{v}\,dv = \frac{9}{4}\ln|v| + C \\ &= \frac{9}{4}\ln|4u+5| + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 7.2.4}$ 不定積分 $\int \sqrt{6x+5}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} =$ なので, $dy =$ dx , $dx =$ dy .

よって,

$$\sqrt{6x+5}\,dx = \quad dy = \quad dy \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \sqrt{6x+5}\,dx = \int \quad dy =$$

$\boxed{問 7.2.4}$ 不定積分 $\int \sqrt{6x+5}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = 6x+5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 6$ なので, $dy = 6\,dx$, $dx = \dfrac{1}{6}\,dy$.
よって,

$$\sqrt{6x+5}\,dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{6}\,dy = \frac{1}{6}\sqrt{y}\,dy \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \sqrt{6x+5}\,dx = \int \qquad dy =$$

$\boxed{\text{問}7.2.4}$ 不定積分 $\int\sqrt{6x+5}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y=6x+5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=6$ なので, $dy=6\,dx$, $dx=\dfrac{1}{6}\,dy$.
よって,

$$\sqrt{6x+5}\,dx = \sqrt{y}\,\frac{1}{6}\,dy = \frac{1}{6}\sqrt{y}\,dy \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int\sqrt{6x+5}\,dx &= \int\frac{1}{6}\sqrt{y}\,dy = \frac{1}{6}\int y^{\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{6}\,\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+C \\ &= \frac{1}{9}\sqrt{6x+5}^{\,3}+C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

例 不定積分 $\displaystyle\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt$ を計算する.

例 不定積分 $\displaystyle\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt$ を計算する.

変数 x を $x =$ 　　　　　　　 とおく.

例 不定積分 $\displaystyle\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt$ を計算する.

変数 x を $x=\dfrac{4t-5}{3}$ とおく. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{4}{3}$ なので, $dx=\dfrac{4}{3}dt$, $dt=\dfrac{3}{4}dx$.

例 不定積分 $\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt$ を計算する.

変数 x を $x=\frac{4t-5}{3}$ とおく. $\frac{dx}{dt}=\frac{4}{3}$ なので, $dx=\frac{4}{3}dt$, $dt=\frac{3}{4}dx$.

よって,

$$\cos\frac{4t-5}{3}\,dt = \cos x\,\frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}\cos x\,dx \ .$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt$ を計算する.

変数 x を $x=\dfrac{4t-5}{3}$ とおく. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{4}{3}$ なので, $dx=\dfrac{4}{3}\,dt$, $dt=\dfrac{3}{4}\,dx$.

よって,

$$\cos\frac{4t-5}{3}\,dt = \cos x\,\frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}\cos x\,dx \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt = \int \frac{3}{4}\cos x\,dx$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt$ を計算する.

変数 x を $x=\dfrac{4t-5}{3}$ とおく. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{4}{3}$ なので, $dx=\dfrac{4}{3}dt$, $dt=\dfrac{3}{4}dx$.

よって,

$$\cos\frac{4t-5}{3}\,dt = \cos x\,\frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}\cos x\,dx \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt = \int \frac{3}{4}\cos x\,dx = \frac{3}{4}\int \cos x\,dx = \frac{3}{4}\sin x + C$$

変数 x の式を変数 t の式に戻す.

例 不定積分 $\displaystyle\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt$ を計算する．

変数 x を $x=\dfrac{4t-5}{3}$ とおく． $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{4}{3}$ なので， $dx=\dfrac{4}{3}dt$ ， $dt=\dfrac{3}{4}dx$ ．
よって，

$$\cos\frac{4t-5}{3}\,dt = \cos x\,\frac{3}{4}\,dx = \frac{3}{4}\cos x\,dx \ .$$

積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \cos\frac{4t-5}{3}\,dt &= \int \frac{3}{4}\cos x\,dx = \frac{3}{4}\int\cos x\,dx = \frac{3}{4}\sin x + C \\ &= \frac{3}{4}\sin\frac{4t-5}{3} + C \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問7.2.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \sin\frac{3x-7}{5}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y=$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=$ なので $dx=$ dy . よって,

$$\sin\frac{3x-7}{5}\,dx = \qquad dy = \qquad dy\ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \sin\frac{3x-7}{5}\,dx = \int \qquad dy =$$

$\boxed{問 7.2.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \sin\frac{3x-7}{5}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = \dfrac{3x-7}{5}$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{5}$ なので $dx = \dfrac{5}{3}dy$. よって,

$$\sin\frac{3x-7}{5}\,dx = \sin y\,\frac{5}{3}\,dy = \frac{5}{3}\sin y\,dy \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \sin\frac{3x-7}{5}\,dx = \int \qquad\qquad dy =$$

$\boxed{\text{問}7.2.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \sin\frac{3x-7}{5}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = \dfrac{3x-7}{5}$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{5}$ なので $dx = \dfrac{5}{3}dy$. よって,

$$\sin\frac{3x-7}{5}\,dx = \sin y\,\frac{5}{3}\,dy = \frac{5}{3}\sin y\,dy \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \sin\frac{3x-7}{5}\,dx = \int \frac{5}{3}\sin y\,dy = \frac{5}{3}\int \sin y\,dy = \frac{5}{3}(-\cos y) + C$$

$$= -\frac{5}{3}\cos\frac{3x-7}{5} + C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.2.6}$ 不定積分 $\int e^{2t+3}dt$ を計算せよ.

変数 x を $x =$ とおく. $\dfrac{dx}{dt} =$ なので $dt =$ dx . よって,

$$e^{2t+3}dt = \quad dx = \quad dx \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int e^{2t+3}dt = \int \quad dx =$$

$\boxed{問7.2.6}$ 不定積分 $\int e^{2t+3}dt$ を計算せよ.

変数 x を $x = 2t+3$ とおく. $\dfrac{dx}{dt} = 2$ なので $dt = \dfrac{1}{2}dx$. よって,

$$e^{2t+3}dt = e^{x}\frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}e^{x}dx \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int e^{2t+3}dt = \int \qquad dx =$$

$\boxed{問7.2.6}$ 不定積分 $\int e^{\frac{2t+3}{5}}dt$ を計算せよ.

変数 x を $x=\dfrac{2t+3}{5}$ とおく. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{5}$ なので $dt=\dfrac{5}{2}dx$. よって,

$$e^{\frac{2t+3}{5}}dt = e^x\frac{5}{2}dx = \frac{5}{2}e^x dx \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int e^{\frac{2t+3}{5}}dt = \int e^x\frac{5}{2}dx = \frac{5}{2}\int e^x dx = \frac{5}{2}e^x + C = \frac{5}{2}e^{\frac{2t+3}{5}} + C \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y =$ とおく.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2x$ なので $x\,dx=\dfrac{1}{2}\,dy$.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{(x^2+1)^3}\,x\,dx = \frac{1}{y^3}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{(x^2+1)^3}\,x\,dx = \frac{1}{y^3}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy\ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{(x^2+1)^3}\,x\,dx = \frac{1}{y^3}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy\ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy = \frac{1}{2}\int y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{-2}y^{-2} + C = -\frac{1}{4y^2} + C$$

変数 y の式を変数 x の式に戻す.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$\frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{(x^2+1)^3}\,x\,dx = \frac{1}{y^3}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy \ .$$

積分定数を C とおくと,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x^2+1)^3}\,dx &= \int \frac{1}{2}\frac{1}{y^3}\,dy = \frac{1}{2}\int y^{-3}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{-2}y^{-2} + C = -\frac{1}{4y^2} + C \\ &= -\frac{1}{4(x^2+1)^2} + C \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{問 7.2.7}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} =$ なので $x\,dx = \quad dy$. よって,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,x\,dx = \qquad dy = \qquad dy \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int \qquad dy =$$

$\boxed{問 7.2.7}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2 + 3$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,x\,dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int \qquad\qquad dy =$$

$\boxed{問 7.2.7}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2+3$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2x$ なので $x\,dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. よって,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}}\,x\,dx = \frac{1}{\sqrt{y}}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx = \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy = \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\,2y^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{y} + C = \sqrt{x^2+3} + C \ .$$

$\boxed{終}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=$ とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^3 - 5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ なので $x^2\,dx = \dfrac{1}{3}\,dy$.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int x^2 \sqrt{x^3 - 5}\, dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^3 - 5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ なので $x^2\, dx = \dfrac{1}{3}\, dy$. 積分定数を C とおくと,

$$\int x^2 \sqrt{x^3 - 5}\, dx = \int \sqrt{x^3 - 5}\, x^2 dx$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=x^3-5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$ なので $x^2\,dx=\dfrac{1}{3}\,dy$. 積分定数を C とおくと,

$$\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx=\int\sqrt{x^3-5}\,x^2dx=\int\sqrt{y}\,\frac{1}{3}\,dy=\frac{1}{3}\int y^{\frac{1}{2}}\,dy=\frac{1}{3}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+C$$

変数 y の式を変数 x の式に戻す.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=x^3-5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=3x^2$ なので $x^2\,dx=\dfrac{1}{3}dy$. 積分定数を C とおくと,

$$\int x^2\sqrt{x^3-5}\,dx=\int\sqrt{x^3-5}\,x^2dx=\int\sqrt{y}\,\frac{1}{3}dy=\frac{1}{3}\int y^{\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{3}\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{9}\sqrt{x^3-5}^{\,3}+C\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.2.8}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} =$ なので $x^2\,dx = \quad dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx = \int \frac{1}{x^3+2}\,x^2 dx = \int \qquad dy$$

$$=$$

$\boxed{問 7.2.8}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^3 + 2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ なので $x^2\,dx = \dfrac{1}{3}\,dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx = \int \frac{1}{x^3+2}\,x^2 dx = \int \qquad dy$$

$$=$$

問7.2.8 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^3 + 2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2$ なので $x^2\,dx = \dfrac{1}{3}\,dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^3+2}\,dx &= \int \frac{1}{x^3+2}\,x^2dx = \int \frac{1}{y}\,\frac{1}{3}\,dy \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{3}\ln|y| + C \\ &= \frac{1}{3}\ln|x^3+2| + C \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{例}}$ 置換積分法で不定積分 $\int (x+1)^2 dx$ を計算する.

$\boxed{例}$ 置換積分法で不定積分 $\int(x+1)^2dx$ を計算する.

変数 y を $y=x+1$ とおく.

例 置換積分法で不定積分 $\int (x+1)^2 dx$ を計算する.

変数 y を $y = x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ より $dx = dy$ なので, 積分定数を C_0 とおくと

$$\int (x+1)^2 dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + C_0 = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_0$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} + C_0 \;;$$

例 置換積分法で不定積分 $\int (x+1)^2 dx$ を計算する．

変数 y を $y = x+1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 1$ より $dx = dy$ なので，積分定数を C_0 とおくと

$$\int (x+1)^2 dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + C_0 = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_0$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} + C_0 \ ;$$

ここで， $C = \dfrac{1}{3} + C_0$ とおくと， $\int (x+1)^2 dx = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C \ ;$

$\boxed{\text{例}}$ 置換積分法で不定積分 $\int (x+1)^2 dx$ を計算する.

変数 y を $y = x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ より $dx = dy$ なので, 積分定数を C_0 とおくと

$$\int (x+1)^2 dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + C_0 = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_0$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} + C_0 \ ;$$

ここで, $C = \dfrac{1}{3} + C_0$ とおくと, $\int (x+1)^2 dx = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$; C_0 は定数なので C も定数である.

例 置換積分法で不定積分 $\int (x+1)^2 dx$ を計算する.

変数 y を $y = x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ より $dx = dy$ なので, 積分定数を C_0 とおくと

$$\begin{aligned}\int (x+1)^2 dx &= \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + C_0 = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_0 \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} + C_0 \ ;\end{aligned}$$

ここで, $C = \dfrac{1}{3} + C_0$ とおくと, $\int (x+1)^2 dx = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$; C_0 は定数なので C も定数である. この定数 C を積分定数と考えると次のようになる :

例 置換積分法で不定積分 $\int (x+1)^2 dx$ を計算する．

　変数 y を $y = x + 1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 1$ より $dx = dy$ なので，積分定数を C_0 とおくと

$$\int (x+1)^2 dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 + C_0 = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_0$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} + C_0 \;;$$

ここで， $C = \dfrac{1}{3} + C_0$ とおくと， $\int (x+1)^2 dx = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$ ； C_0 は定数なので C も定数である．この定数 C を積分定数と考えると次のようになる：

$$\int (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$$ （C は積分定数）．

終

$\boxed{\text{例}}$ 置換積分法で不定積分 $\int (x+1)^2 dx$ を計算する.

変数 y を $y = x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ より $dx = dy$ なので, 積分定数を C_0 とおくと

$$\int (x+1)^2 dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 + C_0 = \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_0$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} + C_0 \ ;$$

ここで, $C = \dfrac{1}{3} + C_0$ とおくと, $\int (x+1)^2 dx = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$; C_0 は定数なので C も定数である. この定数 C を積分定数と考えると次のようになる:

$$\int (x+1)^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$ $\boxed{\text{終}}$

このように, 不定積分の計算に現れる定数項は一つの積分定数にまとめることが望ましい.