

7.3 定積分の置換積分法

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする.

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする.

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする.

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$.

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y)$$

変数 y の関数 $G(y)$ を変数 x で微分する.

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

微分可能な関数 φ と f について, φ の値域が f の定義域に含まれるとき, $y = \varphi(x)$ である変数 x, y について $\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \cdot \frac{dy}{dx}$.

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx} .$$

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx} .$$

$f(x)dx = g(y)dy$ とすると,

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx} .$$

$f(x) dx = g(y) dy$ とすると, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ なので,

変数 y が変数 x の微分可能な関数であるとき, 微分係数 $\frac{dy}{dx}$ 及び関数 f と g 及び x の微分 dx 及び y の微分 dy について,

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x) \iff g(y) dy = f(x) dx .$$

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx} .$$

$f(x) dx = g(y) dy$ とすると, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ なので, $\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = f(x)$,

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx} .$$

$f(x)dx = g(y)dy$ とすると, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ なので, $\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = f(x)$, 微分積分の基本定理より,

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx}.$$

$f(x)dx = g(y)dy$ とすると, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ なので, $\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = f(x)$, 微分積分の基本定理より,

$$\int_a^b f(x) dx =$$

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx}.$$

$f(x)dx = g(y)dy$ とすると, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ なので, $\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = f(x)$, 微分積分の基本定理より,

$$\int_a^b f(x)dx = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a))$$

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx} .$$

$f(x)dx = g(y)dy$ とすると, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ なので, $\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = f(x)$, 微分積分の基本定理より,

$$\int_a^b f(x) dx = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a)) = G(q) - G(p) ,$$

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx}.$$

$f(x)dx = g(y)dy$ とすると, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ なので, $\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = f(x)$, 微分積分の基本定理より,

$$\int_a^b f(x) dx = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a)) = G(q) - G(p),$$
$$\int_p^q g(y) dy =$$

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx} .$$

$f(x)dx = g(y)dy$ とすると, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ なので, $\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = f(x)$, 微分積分の基本定理より,

$$\int_a^b f(x) dx = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a)) = G(q) - G(p) ,$$

$$\int_p^q g(y) dy = G(q) - G(p) ,$$

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx} .$$

$f(x)dx = g(y)dy$ とすると, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ なので, $\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = f(x)$, 微分積分の基本定理より,

$$\int_a^b f(x) dx = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a)) = G(q) - G(p) ,$$

$$\int_p^q g(y) dy = G(q) - G(p) ,$$

故に $\int_a^b f(x) dx = \int_p^q g(y) dy$.

変数 x の関数 $y = \varphi(x)$ は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であるとする. 関数 g は $p = \varphi(a)$ から $q = \varphi(b)$ まで定積分可能であり, g の原始関数 G があるとする. $\frac{d}{dy}G(y) = g(y)$. 合成関数 $G(\varphi(x)) = G(y)$ を x で微分する.

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}G(y) = \frac{d}{dy}G(y) \cdot \frac{dy}{dx} = g(y) \frac{dy}{dx} .$$

$f(x)dx = g(y)dy$ とすると, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ なので, $\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = f(x)$, 微分積分の基本定理より,

$$\int_a^b f(x) dx = G(\varphi(b)) - G(\varphi(a)) = G(q) - G(p) ,$$

$$\int_p^q g(y) dy = G(q) - G(p) ,$$

故に $\int_a^b f(x) dx = \int_p^q g(y) dy$. つまり, $x = a$ のとき $y = \varphi(a) = p$ であり, $x = b$ のとき $y = \varphi(b) = q$ であるとき, $f(x)dx = g(y)dy$ ならば $\int_a^b f(x) dx = \int_p^q g(y) dy$.

定理（定積分の置換積分法） 変数 x の関数 y は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であり, 関数 g は実数 p から実数 q まで定積分可能であるとする.

$x = a$ のとき $y = p$, $x = b$ のとき $y = q$, $f(x) dx = g(y) dy$ ならば

$$\int_a^b f(x) dx = \int_p^q g(y) dy .$$

定理 (定積分の置換積分法) 変数 x の関数 y は実数 a と b が属するある区間において微分可能であるとする. 関数 f は a から b まで定積分可能であり, 関数 g は実数 p から実数 q まで定積分可能であるとする.

$x = a$ のとき $y = p$, $x = b$ のとき $y = q$, $f(x) dx = g(y) dy$ ならば

$$\int_a^b f(x) dx = \int_p^q g(y) dy .$$

変数 x の関数 y について, 定積分では, 積分変数 x を積分変数 y に置き換えるとき, x の値の範囲を y の値の範囲に置き換える必要がある.

例 定積分 $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$ を計算する.

変数 y を $y =$ とおく.

例 定積分 $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$ を計算する.

変数 y を $y = 2x + 1$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2} dy$.

例 定積分 $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$ を計算する.

変数 y を $y = 2x + 1$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2} dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3} dx = \frac{1}{y^3} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \frac{1}{y^3} dy .$$

例 定積分 $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$ を計算する.

変数 y を $y = 2x + 1$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2} dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3} dx = \frac{1}{y^3} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \frac{1}{y^3} dy .$$

$y = 2x + 1$ より, $x = 0$ のとき $y = 1$, $x = 4$ のとき $y = 9$.

例 定積分 $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$ を計算する.

変数 y を $y = 2x + 1$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2} dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3} dx = \frac{1}{y^3} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \frac{1}{y^3} dy .$$

$y = 2x + 1$ より, $x = 0$ のとき $y = 1$, $x = 4$ のとき $y = 9$. 故に,

$$\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx = \int_1^9 \frac{1}{2} \frac{1}{y^3} dy$$

積分変数 x の値の範囲を積分変数 y の値の範囲に換える.

例 定積分 $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$ を計算する.

変数 y を $y = 2x + 1$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2} dy$. よって,

$$\frac{1}{(2x+1)^3} dx = \frac{1}{y^3} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \frac{1}{y^3} dy .$$

$y = 2x + 1$ より, $x = 0$ のとき $y = 1$, $x = 4$ のとき $y = 9$. 故に,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx &= \int_1^9 \frac{1}{2} \frac{1}{y^3} dy = \frac{1}{2} \int_1^9 y^{-3} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-2} y^{-2} \right]_1^9 = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{y^2} \right]_1^9 \\ &= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{81} - 1 \right) = \frac{20}{81} . \end{aligned}$$

例 定積分 $\int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx$ を計算する.

不定積分 $\int \frac{1}{(2x+1)^3} dx$ を計算してから微分積分の基本定理を適用しても計算できる. 変数 y を $y = 2x + 1$ とおくと, $\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2} dy$. 積分定数を C とおくと,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(2x+1)^3} dx &= \int \frac{1}{y^3} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \int y^{-3} dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-2} y^{-2} + C \\ &= -\frac{1}{4(2x+1)^2} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{(2x+1)^3} dx &= \left[-\frac{1}{4(2x+1)^2} \right]_0^4 = -\frac{1}{4} \left[\frac{1}{(2x+1)^2} \right]_0^4 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{9^2} - \frac{1}{1^2} \right) \\ &= \frac{20}{81}. \end{aligned}$$

終

問7.3.1 定積分 $\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2} dy$ を計算せよ.

変数 z を $z =$ とおく. $\frac{dz}{dy} =$ なので $dy =$ dz . $y = 2$ のとき $z =$. $y = 4$ のとき $z =$. よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2} dy = \int$$
 dz

問7.3.1 定積分 $\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2} dy$ を計算せよ.

変数 z を $z = 3y - 5$ とおく. $\frac{dz}{dy} = 3$ なので $dy = \frac{1}{3} dz$. $y = 2$ のとき $z = 1$. $y = 4$ のとき $z = 7$. よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2} dy = \int \quad dz$$

問7.3.1 定積分 $\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2} dy$ を計算せよ.

変数 z を $z = 3y - 5$ とおく. $\frac{dz}{dy} = 3$ なので $dy = \frac{1}{3} dz$. $y = 2$ のとき $z = 1$. $y = 4$ のとき $z = 7$. よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2} dy = \int_1^7 \frac{6}{z^2} \frac{1}{3} dz = 2 \left[-\frac{1}{z} \right]_1^7 = 2 \left(-\frac{1}{7} + 1 \right) = \frac{12}{7} .$$

終

例 定積分 $\int_3^5 \sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy$ を計算する.

例 定積分 $\int_3^5 \sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy$ を計算する.

変数 z を $z =$ とおく.

例 定積分 $\int_3^5 \sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy$ を計算する.

変数 z を $z = \frac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\frac{dz}{dy} = \frac{\pi}{3}$ なので $dy = \frac{3}{\pi} dz$.

例 定積分 $\int_3^5 \sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy$ を計算する.

変数 z を $z = \frac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\frac{dz}{dy} = \frac{\pi}{3}$ なので $dy = \frac{3}{\pi} dz$. よって,

$$\sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy = (\sin z) \frac{3}{\pi} dz = \frac{3}{\pi} \sin z dz .$$

例 定積分 $\int_3^5 \sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy$ を計算する.

変数 z を $z = \frac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\frac{dz}{dy} = \frac{\pi}{3}$ なので $dy = \frac{3}{\pi} dz$. よって,

$$\sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy = (\sin z) \frac{3}{\pi} dz = \frac{3}{\pi} \sin z dz .$$

$z = \frac{\pi(y-2)}{3}$ より, $y = 3$ のとき $z = \frac{\pi}{3}$, $y = 5$ のとき $z = \pi$.

例 定積分 $\int_3^5 \sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy$ を計算する.

変数 z を $z = \frac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\frac{dz}{dy} = \frac{\pi}{3}$ なので $dy = \frac{3}{\pi} dz$. よって,

$$\sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy = (\sin z) \frac{3}{\pi} dz = \frac{3}{\pi} \sin z dz .$$

$z = \frac{\pi(y-2)}{3}$ より, $y = 3$ のとき $z = \frac{\pi}{3}$, $y = 5$ のとき $z = \pi$. 従って,

$$\int_3^5 \sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{3}{\pi} \sin z dz$$

積分変数 y の値の範囲を積分変数 z の値の範囲に換える.

例 定積分 $\int_3^5 \sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy$ を計算する.

変数 z を $z = \frac{\pi(y-2)}{3}$ とおく. $\frac{dz}{dy} = \frac{\pi}{3}$ なので $dy = \frac{3}{\pi} dz$. よって,

$$\sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy = (\sin z) \frac{3}{\pi} dz = \frac{3}{\pi} \sin z dz .$$

$z = \frac{\pi(y-2)}{3}$ より, $y = 3$ のとき $z = \frac{\pi}{3}$, $y = 5$ のとき $z = \pi$. 従って,

$$\begin{aligned} \int_3^5 \sin \frac{\pi(y-2)}{3} dy &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{3}{\pi} \sin z dz = \frac{3}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sin z dz = \frac{3}{\pi} [-\cos z]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \frac{3}{\pi} \left(-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{9}{2\pi} . \end{aligned}$$

終

問7.3.2 定積分 $\int_0^3 \sin \frac{\pi(5x-3)}{6} dx$ を計算しなさい.

変数 y を $y =$ とおく. $\frac{dy}{dz} =$ なので $dx =$ dy . $x = 0$

のとき $y =$. $x = 3$ のとき $y =$. よって,

$$\int_0^3 \sin \frac{\pi(5x-3)}{6} dx = \int \quad (\quad) \quad dy$$

問7.3.2 定積分 $\int_0^3 \sin \frac{\pi(5x-3)}{6} dx$ を計算しなさい.

変数 y を $y = \frac{\pi(5x-3)}{6}$ とおく. $\frac{dy}{dx} = \frac{5\pi}{6}$ なので $dx = \frac{6}{5\pi} dy$. $x = 0$

のとき $y = -\frac{\pi}{2}$. $x = 3$ のとき $y = 2\pi$. よって,

$$\int_0^3 \sin \frac{\pi(5x-3)}{6} dx = \int \quad (\quad) \quad dy$$

問7.3.2 定積分 $\int_0^3 \sin \frac{\pi(5x-3)}{6} dx$ を計算しなさい.

変数 y を $y = \frac{\pi(5x-3)}{6}$ とおく. $\frac{dy}{dx} = \frac{5\pi}{6}$ なので $dx = \frac{6}{5\pi} dy$. $x = 0$

のとき $y = -\frac{\pi}{2}$. $x = 3$ のとき $y = 2\pi$. よって,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sin \frac{\pi(5x-3)}{6} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (\sin y) \frac{6}{5\pi} dy = \frac{6}{5\pi} [-\cos y]_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \\ &= \frac{6}{5\pi} \left\{ -\cos 2\pi + \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &= -\frac{6}{5\pi}. \end{aligned}$$

終

問7.3.3 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5} du$ を計算しなさい.

変数 v を $v =$ とおく. $\frac{dv}{du} =$ なので $du =$ dv . $u = 2$ のとき $v =$. $u = 4$ のとき $v =$. よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5} du = \int$$
 dv

終

問7.3.3 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5} du$ を計算しなさい.

変数 v を $v = 2u - 5$ とおく. $\frac{dv}{du} = 2$ なので $du = \frac{1}{2} dv$. $u = 2$ のとき $v = -1$. $u = 4$ のとき $v = 3$. よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5} du = \int \quad dv$$

終

問7.3.3 定積分 $\int_2^4 e^{2u-5} du$ を計算しなさい.

変数 v を $v = 2u - 5$ とおく. $\frac{dv}{du} = 2$ なので $du = \frac{1}{2} dv$. $u = 2$ のとき $v = -1$. $u = 4$ のとき $v = 3$. よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5} du = \int_{-1}^3 e^v \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} [e^v]_{-1}^3 = \frac{1}{2} \left(e^3 - \frac{1}{e} \right).$$

終

例 定積分 $\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1} dx$ を計算する.

例 定積分 $\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1} dx$ を計算する.

変数 y を $y =$ とおく.

例 定積分 $\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1} dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2 + 1$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$.

例 定積分 $\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1} dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2 + 1$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1} dx = \sqrt{x^2+1} x dx = \sqrt{y} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{y} dy .$$

例 定積分 $\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1} dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2 + 1$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1} dx = \sqrt{x^2+1} x dx = \sqrt{y} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{y} dy .$$

$y = x^2 + 1$ より, $x = -1$ のとき $y = 2$, $x = 2$ のとき $y = 5$.

例 定積分 $\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1} dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2 + 1$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1} dx = \sqrt{x^2+1} x dx = \sqrt{y} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{y} dy .$$

$y = x^2 + 1$ より, $x = -1$ のとき $y = 2$, $x = 2$ のとき $y = 5$. 従って,

$$\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1} dx = \int_2^5 \frac{1}{2} \sqrt{y} dy$$

積分変数 x の値の範囲を積分変数 y の値の範囲に換える.

例 定積分 $\int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1} dx$ を計算する.

変数 y を $y = x^2 + 1$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$. よって,

$$x\sqrt{x^2+1} dx = \sqrt{x^2+1} x dx = \sqrt{y} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{y} dy .$$

$y = x^2 + 1$ より, $x = -1$ のとき $y = 2$, $x = 2$ のとき $y = 5$. 従って,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 x\sqrt{x^2+1} dx &= \int_2^5 \frac{1}{2} \sqrt{y} dy = \frac{1}{2} \int_2^5 y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_2^5 = \frac{1}{3} [y\sqrt{y}]_2^5 \\ &= \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}) . \end{aligned}$$

終

問7.3.4 定積分 $\int_{-1}^2 \frac{6x}{x^2+2} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ とおく. $\frac{dy}{dx} =$ なので $x dx =$ dy . $x = -1$ のとき $y =$. $x = 2$ のとき $y =$. よって,

$$\int_{-1}^2 \frac{6x}{x^2+2} dx = \int$$

問7.3.4 定積分 $\int_{-1}^2 \frac{6x}{x^2+2} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2 + 2$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$. $x = -1$ のとき $y = 3$. $x = 2$ のとき $y = 6$. よって,

$$\int_{-1}^2 \frac{6x}{x^2+2} dx = \int \quad dy$$

問7.3.4 定積分 $\int_{-1}^2 \frac{6x}{x^2+2} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2 + 2$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$. $x = -1$ のとき $y = 3$. $x = 2$ のとき $y = 6$. よって,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \frac{6x}{x^2+2} dx &= \int_3^6 \frac{6}{y} \frac{1}{2} dy = 3 \int_2^6 \frac{1}{y} dy = 3[\ln y]_3^6 = 3(\ln 6 - \ln 3) = 3 \ln 2 \\ &= \ln 8. \end{aligned}$$

終

問7.3.5 定積分 $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ とおく. $\frac{dy}{dx} =$ なので $x dx =$ dy . $x = 0$ のとき $y =$. $x = 4$ のとき $y =$. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int \quad \quad \quad dy \quad .$$

問7.3.5 定積分 $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2 + 9$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$. $x = 0$ のとき $y = 9$. $x = 4$ のとき $y = 25$. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int \quad dy \quad .$$

問7.3.5 定積分 $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = x^2 + 9$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$. $x = 0$ のとき $y = 9$. $x = 4$ のとき $y = 25$. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int_9^{25} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} [2\sqrt{y}]_9^{25} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2. \quad \boxed{\text{終}}$$