7.4 部分積分法

6.5 節において述べた次の定理を述べた.

定理　関数 f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとき,

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = f(x) \ .$$

定理　関数 F が微分可能である区間において,

$$\int \left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad (\ C\ \text{は積分定数}) \ .$$

関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間で考える.

関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間で考える. 関数 G を $G(x) = \int g(x)\,dx$ とおく. $\dfrac{d}{dx}G(x) = \dfrac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} = g(x)$.

関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間で考える．関数 G を $G(x)=\int g(x)\,dx$ とおく． $\dfrac{d}{dx}G(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\}=g(x)$ ．関数の積の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x)+f(x)\,\frac{d}{dx}G(x)$$

関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間で考える．関数 G を $G(x) = \int g(x)\,dx$ とおく． $\dfrac{d}{dx}G(x) = \dfrac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} = g(x)$ ．関数の積の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot G(x) + f(x)\,\frac{d}{dx}G(x) = f'(x)\,G(x) + f(x)\,g(x) \ ,$$

関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間で考える．関数 G を $G(x)=\int g(x)\,dx$ とおく． $\dfrac{d}{dx}G(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\}=g(x)$ ．関数の積の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x)+f(x)\,\frac{d}{dx}G(x)=f'(x)\,G(x)+f(x)\,g(x)\ ,$$

$$f(x)\,g(x)=\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}-f'(x)\,G(x)\ ,$$

関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間で考える. 関数 G を $G(x) = \int g(x)\,dx$ とおく. $\dfrac{d}{dx}G(x) = \dfrac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} = g(x)$. 関数の積の微分公式より,

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot G(x) + f(x)\,\frac{d}{dx}G(x) = f'(x)\,G(x) + f(x)\,g(x) \ ,$$

$$f(x)\,g(x) = \frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\} - f'(x)\,G(x) \ ,$$

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = \int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\} - f'(x)\,G(x)\right] dx$$

関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間で考える．関数 G を $G(x)=\int g(x)\,dx$ とおく． $\dfrac{d}{dx}G(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\}=g(x)$ ．関数の積の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x)+f(x)\,\frac{d}{dx}G(x)=f'(x)\,G(x)+f(x)\,g(x)\ ,$$

$$f(x)\,g(x)=\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}-f'(x)\,G(x)\ ,$$

$$\begin{aligned}\int f(x)\,g(x)\,dx&=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}-f'(x)\,G(x)\right]dx\\&=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}\right]dx-\int f'(x)\,G(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間で考える．関数 G を $G(x)=\int g(x)\,dx$ とおく． $\frac{d}{dx}G(x)=\frac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\}=g(x)$ ．関数の積の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x)+f(x)\,\frac{d}{dx}G(x)=f'(x)G(x)+f(x)g(x)\ ,$$

$$f(x)g(x)=\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\}-f'(x)G(x)\ ,$$

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\,dx &= \int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\}-f'(x)G(x)\right]dx\\ &= \int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\}\right]dx-\int f'(x)G(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

$\displaystyle\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\}\right]dx=f(x)G(x)+C$ （ C は積分定数）なので，

関数 F が微分可能である区間において $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$（ C は積分定数） ．

関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間で考える．関数 G を $G(x)=\int g(x)\,dx$ とおく． $\dfrac{d}{dx}G(x)=\dfrac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\}=g(x)$ ．関数の積の微分公式より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}=\frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x)+f(x)\,\frac{d}{dx}G(x)=f'(x)\,G(x)+f(x)\,g(x)\ ,$$

$$f(x)\,g(x)=\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}-f'(x)\,G(x)\ ,$$

$$\begin{aligned}\int f(x)\,g(x)\,dx&=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}-f'(x)\,G(x)\right]dx\\&=\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}\right]dx-\int f'(x)\,G(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

$\displaystyle\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}\right]dx=f(x)\,G(x)+C$ （ C は積分定数）なので，積分定数を略すと

$$\int f(x)\,g(x)\,dx\,=\,f(x)\,G(x)-\int f'(x)\,G(x)\,dx\ .$$

こうして次のことが分かる：

$$G(x) = \int g(x)\,dx \quad \text{とおくと} \quad \int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x) - \int f'(x)\,G(x)\,dx \ .$$

ここで，不定積分 $\int g(x)\,dx$ の計算における積分定数は，以後の計算に影響しないので略してよい.

定理（不定積分の部分積分法）　関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間において,

$$G(x) = \int g(x)\,dx \quad \text{とおくと} \quad \int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x) - \int f'(x)\,G(x)\,dx \ .$$

ここで不定積分 $\int g(x)\,dx$ の計算では積分定数を略してよい.

定理（不定積分の部分積分法）　関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続である区間において，

$$G(x) = \int g(x)\,dx \quad \text{とおくと} \quad \int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x) - \int f'(x)\,G(x)\,dx\ .$$

ここで不定積分 $\int g(x)\,dx$ の計算では積分定数を略してよい．

　この公式の成り立ちを覚えること：関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続であるとき，$g(x)$ の不定積分 $\int g(x)\,dx = G(x)$ に対して，

そのまま　　微分する

$$\int \boxed{f(x)}\,\boxed{g(x)}\,dx = \boxed{f(x)}\,\boxed{G(x)} - \int \boxed{f'(x)}\,\boxed{G(x)}\,dx\ .$$

積分する　　そのまま

例 不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する．更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する．更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する．

積分定数を略すと $\int \cos x\,dx = \sin x$ ． $\dfrac{d}{dx}x = 1$ ．

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する．更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する．

積分定数を略すと $\int \cos x\,dx = \sin x$ ． $\dfrac{d}{dx}x = 1$ ．部分積分法の公式に当てはめると，積分定数を C_1 として

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\sin x\,dx$$

そのまま　　微分する

$$\int \boxed{x}\,\boxed{\cos x}\,dx = \boxed{x}\,\boxed{\sin x} - \int \boxed{1}\,\boxed{\sin x}\,dx \ .$$

積分する　　そのまま

例 不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する．更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する．

積分定数を略すと $\int \cos x\,dx = \sin x$ ． $\dfrac{d}{dx}x = 1$ ．部分積分法の公式に当てはめると，積分定数を C_1 として

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x - \int 1\sin x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx \\ &= x\sin x - (-\cos x) + C_1 \\ &= x\sin x + \cos x + C_1 \ .\end{aligned}$$

積分定数を C_1 として

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C_1 \quad .$$

この結果を用いて $\int x^2 \sin x\,dx$ を計算する.

積分定数を C_1 として

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C_1 \ .$$

この結果を用いて $\int x^2 \sin x\,dx$ を計算する．積分定数を略すと

$$\int \sin x\,dx = -\cos x \ . \quad \frac{d}{dx}x^2 = 2x \ .$$

積分定数を C_1 として

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C_1 \ .$$

この結果を用いて $\int x^2 \sin x\,dx$ を計算する．積分定数を略すと $\int \sin x\,dx = -\cos x$ ． $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$ ．部分積分法の公式に当てはめると，積分定数を C_2 として

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,dx$$

そのまま　微分する

$$\int \boxed{x^2}\ \boxed{\sin x}\,dx = \boxed{x^2}\,(\boxed{-\cos x}) - \int \boxed{2x}\,(\boxed{-\cos x})\,dx \ .$$

積分する　そのまま

積分定数を C_1 として

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C_1 \ .$$

この結果を用いて $\int x^2 \sin x\,dx$ を計算する．積分定数を略すと $\int \sin x\,dx = -\cos x$ ． $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$ ．部分積分法の公式に当てはめると，積分定数を C_2 として

$$\int x^2 \sin x\,dx = x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$$

積分定数を C_1 として

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C_1 \ .$$

この結果を用いて $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する．積分定数を略すと $\int \sin x\,dx = -\cos x$ ． $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$ ．部分積分法の公式に当てはめると，積分定数を C_2 として

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx\\ &= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C_2\\ &= 2x\sin x + (2-x^2)\cos x + C_2 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 7.4.1}$ 不定積分 $\int x\sin x\,dx$ を計算せよ．更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\cos x\,dx$ を計算せよ．

積分定数を C_1 とおく．

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C_1 \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad + C_1 \quad .\end{aligned}$$

積分定数を C_2 とおく．

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C_2 \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C_2 \quad .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問}7.4.1}$ 不定積分 $\int x\sin x\,dx$ を計算せよ．更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\cos x\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C_1 とおく.

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int\cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C_1 \\ &= \sin x - x\cos x + C_1 \ .\end{aligned}$$

積分定数を C_2 とおく.

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= \qquad\qquad\qquad\qquad = \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad + C_2 \\ &= \qquad\qquad\qquad\qquad + C_2 \ .\end{aligned}$$

$\boxed{問7.4.1}$ 不定積分 $\int x \sin x \, dx$ を計算せよ．更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2 \cos x \, dx$ を計算せよ．

積分定数を C_1 とおく．

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= x(-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C_1 \\ &= \sin x - x \cos x + C_1 \quad .\end{aligned}$$

積分定数を C_2 とおく．

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x + \int 2x \sin x \, dx = x^2 \sin x + 2\int x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2(\sin x - x \cos x) + C_2 \\ &= (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C_2 \quad .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとする．不定積分 $\int f(x)\,dx$ を計算するために，$f(x) = 1 \cdot f(x)$ と考えて部分積分法の公式を適用することがある：

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとする．不定積分 $\int f(x)\,dx$ を計算するために， $f(x) = 1 \cdot f(x)$ と考えて部分積分法の公式を適用することがある：積分定数を略すと $\int 1\,dx = x$ なので，

$$\int f(x)\,dx = \int 1\,f(x)\,dx = x\,f(x) - \int x\,f'(x)\,dx \ .$$

そのまま　微分する

$$\int \boxed{1}\ \boxed{f(x)}\,dx = \boxed{x}\ \boxed{f(x)} - \int \boxed{x}\ \boxed{f'(x)}\,dx \ .$$

積分する　そのまま

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとする．不定積分 $\int f(x)\,dx$ を計算するために， $f(x) = 1 \cdot f(x)$ と考えて部分積分法の公式を適用することがある：積分定数を略すと $\int 1\,dx = x$ なので，

$$\int f(x)\,dx = \int 1\,f(x)\,dx = x\,f(x) - \int x\,f'(x)\,dx \ .$$

この部分積分法を用いると対数関数 $\ln x$ の積分公式が導かれる：$\int 1\,dx = x$ ， $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ なので，積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int 1\,\ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx \\ &= x\ln x - x + C \ .\end{aligned}$$

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとする．不定積分 $\int f(x)\,dx$ を計算するために，$f(x) = 1 \cdot f(x)$ と考えて部分積分法の公式を適用することがある：積分定数を略すと $\int 1\,dx = x$ なので，

$$\int f(x)\,dx = \int 1\,f(x)\,dx = x\,f(x) - \int x\,f'(x)\,dx \ .$$

この部分積分法を用いると対数関数 $\ln x$ の積分公式が導かれる：$\int 1\,dx = x$，$\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ なので，積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int 1\,\ln x\,dx = x\ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx \\ &= x\ln x - x + C \ .\end{aligned}$$

定理（積分公式）

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C \quad (\ C \text{ は積分定数}).$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \ln(3y+2)\,dy$ を計算する.

例 不定積分 $\int \ln(3y+2)\,dy$ を計算する.

変数 z を $z =$ とおく.

例 不定積分 $\int \ln(3y+2)\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=3y+2$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=3$ より $dy=\dfrac{1}{3}dz$.

例 不定積分 $\int \ln(3y+2)\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=3y+2$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=3$ より $dy=\dfrac{1}{3}dz$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\int \ln(3y+2)\,dy = \int (\ln z)\,\frac{1}{3}\,dz = \frac{1}{3}(z\ln z - z) + C_0$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \ln(3y+2)\,dy$ を計算する.

変数 z を $z = 3y+2$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = 3$ より $dy = \dfrac{1}{3}\,dz$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\begin{aligned}\int \ln(3y+2)\,dy &= \int (\ln z)\,\frac{1}{3}\,dz = \frac{1}{3}(z\ln z - z) + C_0 \\ &= \frac{1}{3}\{(3y+2)\ln(3y+2) - 3y - 2\} + C_0 \\ &= \left(y + \frac{2}{3}\right)\ln(3y+2) - y - \frac{2}{3} + C_0 \ .\end{aligned}$$

例 不定積分 $\int \ln(3y+2)\,dy$ を計算する.

変数 z を $z=3y+2$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=3$ より $dy=\dfrac{1}{3}dz$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\int \ln(3y+2)\,dy = \int (\ln z)\,\frac{1}{3}\,dz = \frac{1}{3}(z\ln z - z) + C_0$$
$$= \frac{1}{3}\{(3y+2)\ln(3y+2) - 3y - 2\} + C_0$$
$$= \left(y+\frac{2}{3}\right)\ln(3y+2) - y - \frac{2}{3} + C_0 \ .$$

C_0 は定数なので $-\dfrac{2}{3}+C_0$ も定数である ; これを 1 個の積分定数 C とする.

$$\int \ln(3y+2)\,dy = \left(y+\frac{2}{3}\right)\ln(3y+2) - y + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

終

$\boxed{\text{問}7.4.2}$ 不定積分 $\int \ln(4u+7)\,du$ を計算せよ.

変数 v を $v=$ とおく. $\dfrac{dv}{du}=$ より $du=\quad dv$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \ln(4u+5)\,du = \int \qquad dv = \qquad + C_0$$

$$= \qquad + C_0$$

$$= \qquad + C \ .$$

$\boxed{\text{問}7.4.2}$ 不定積分 $\int \ln(4u+7)\,du$ を計算せよ.

変数 v を $v = 4u+7$ とおく. $\dfrac{dv}{du} = 4$ より $du = \dfrac{1}{4}dv$. 積分定数を C_0, C とおく.

$$\int \ln(4u+5)\,du = \int (\ln v)\frac{1}{4}dv = \qquad\qquad\qquad + C_0$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + C_0$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad + C \ .$$

問7.4.2 不定積分 $\int \ln(4u+7)\,du$ を計算せよ.

変数 v を $v = 4u+7$ とおく. $\dfrac{dv}{du} = 4$ より $du = \dfrac{1}{4}dv$. 積分定数を $C_0\,,C$ とおく.

$$\begin{aligned}\int \ln(4u+5)\,du &= \int (\ln v)\,\frac{1}{4}\,dv = \frac{1}{4}(v\ln v - v) + C_0 \\ &= \frac{1}{4}\{(4u+7)\ln(4u+7) - (4u+7)\} + C_0 \\ &= \left(u + \frac{7}{4}\right)\ln(4u+7) - u + C \quad .\end{aligned}$$

終

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int y \ln y \, dy$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int y \ln y \, dy$ を計算する.

積分定数を略すと $\int y \, dy = \dfrac{1}{2}y^2$. $\dfrac{d}{dy}\ln y = \dfrac{1}{y}$.

例 不定積分 $\int y\ln y\,dy$ を計算する.

積分定数を略すと $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$. $\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{y}$. 積分定数を C とおく.

$$\int y\ln y\,dy = \frac{1}{2}y^2\ln y - \int \frac{1}{2}y^2\frac{1}{y}\,dy$$

そのまま　微分する

$$\int \boxed{y}\,\boxed{\ln y}\,dy = \boxed{\frac{1}{2}y^2}\,\boxed{\ln y} - \int \boxed{\frac{1}{2}y^2}\,\boxed{\frac{1}{y}}\,dy \ .$$

積分する　そのまま

例 不定積分 $\int y \ln y \, dy$ を計算する.

積分定数を略すと $\int y \, dy = \frac{1}{2} y^2$. $\frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{y}$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}
\int y \ln y \, dy &= \frac{1}{2} y^2 \ln y - \int \frac{1}{2} y^2 \frac{1}{y} \, dy \\
&= \frac{y^2}{2} \ln y - \frac{1}{2} \int y \, dy = \frac{y^2}{2} \ln y - \frac{1}{2} \frac{1}{2} y^2 + C \\
&= y^2 \left(\frac{\ln y}{2} - \frac{1}{4} \right) + C \ .
\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.4.3}$ 不定積分 $\int x^3 \ln x \, dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int x^3 \ln x \, dx =$$

$\boxed{\text{問}7.4.3}$ 不定積分 $\int x^3 \ln x \, dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int x^3 \ln x \, dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \frac{1}{x}\, dx$$

$\boxed{問 7.4.3}$ 不定積分 $\int x^3 \ln x \, dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$
\begin{aligned}
\int x^3 \ln x \, dx &= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \frac{1}{x}\, dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3 dx \\
&= \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}x^4 + C \\
&= x^4\left(\frac{\ln x}{4} - \frac{1}{16}\right) + C \ .
\end{aligned}
$$

$\boxed{終}$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int x \sin 3x \, dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int x \sin 3x \, dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \dfrac{1}{3} dy$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int x\sin 3x\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=3x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}dy$. 積分定数を略すと,

$$\int \sin 3x\,dx=\int \sin y\,\frac{1}{3}\,dy=\frac{1}{3}(-\cos y)=-\frac{1}{3}\cos 3x\ ,$$

$$\int \cos 3x\,dx=\int \cos y\,\frac{1}{3}\,dy=\frac{1}{3}\sin y=\frac{1}{3}\sin 3x\ .$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int x\sin 3x\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=3x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}dy$. 積分定数を略すと,

$$\int \sin 3x\,dx = \int \sin y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}(-\cos y) = -\frac{1}{3}\cos 3x \ ,$$

$$\int \cos 3x\,dx = \int \cos y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\sin y = \frac{1}{3}\sin 3x \ .$$

積分定数を C とおく. $\dfrac{d}{dx}x=1$ なので, 部分積分法により,

$$\int x\sin 3x\,dx = x\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int x \sin 3x \, dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \dfrac{1}{3} dy$. 積分定数を略すと,

$$\int \sin 3x \, dx = \int \sin y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3}(-\cos y) = -\frac{1}{3} \cos 3x \ ,$$

$$\int \cos 3x \, dx = \int \cos y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \sin y = \frac{1}{3} \sin 3x \ .$$

積分定数を C とおく. $\dfrac{d}{dx} x = 1$ なので, 部分積分法により,

$$\begin{aligned}
\int x \sin 3x \, dx &= x\left(-\frac{1}{3} \cos 3x\right) - \int 1 \cdot \left(-\frac{1}{3} \cos 3x\right) dx \\
&= -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x \, dx = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x + C \\
&= \frac{1}{9} \sin 3x - \frac{x}{3} \cos 3x + C \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 7.4.4}$ 不定積分 $\int x\cos 5x\,dx$ を計算せよ.

積分定数を略すと,

$$\int \cos 5x\,dx = \qquad\qquad , \qquad \int \sin 5x\,dx = \qquad\qquad .$$

積分定数を C とおく.

$$\int x\cos 5x\,dx =$$

$\boxed{\text{問}7.4.4}$ 不定積分 $\int x\cos 5x\,dx$ を計算せよ.

積分定数を略すと,

$$\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\sin 5x \ , \qquad \int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\int x\cos 5x\,dx =$$

$\boxed{問7.4.4}$ 不定積分 $\int x\cos 5x\,dx$ を計算せよ.

積分定数を略すと,

$$\int \cos 5x\,dx = \frac{1}{5}\sin 5x\ , \qquad \int \sin 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x\ .$$

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int x\cos 5x\,dx &= x\cdot\frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{5}\int \sin 5x\,dx = \frac{x}{5}\sin 5x - \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right) + C \\ &= \frac{x}{5}\sin 5x + \frac{1}{25}\cos 5x + C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問7.4.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int xe^{\frac{x}{3}}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を省略すると $\displaystyle\int e^{\frac{x}{3}}\,dx =$. 積分定数を C とおく.

$$\int xe^{\frac{x}{3}}\,dx =$$

$\boxed{問7.4.5}$ 不定積分 $\int xe^{\frac{x}{3}}dx$ を計算せよ.

積分定数を省略すると $\int e^{\frac{x}{3}}dx = 3e^{\frac{x}{3}}$. 積分定数を C とおく.

$$\int xe^{\frac{x}{3}}dx = 3xe^{\frac{x}{3}} - 3\int e^{\frac{x}{3}}dx = 3xe^{\frac{x}{3}} - 9e^{\frac{x}{3}} + C = 3e^{\frac{x}{3}}(x-3) + C \ .$$

$\boxed{終}$

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

$\boxed{例}$ 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ を計算する.

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ を計算する.

まず部分積分法によって不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する. 積分定数を C とおく.

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ を計算する.

まず部分積分法によって不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する．積分定数を C とおく.

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x - (-\cos x) + C$$
$$= x\sin x + \cos x + C \ .$$

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ を計算する.

まず部分積分法によって不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x - (-\cos x) + C \\ &= x\sin x + \cos x + C \ .\end{aligned}$$

よって, 微分積分の基本定理より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \Big[x\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$ を計算する.

まず部分積分法によって不定積分 $\int x \cos x \, dx$ を計算する．積分定数を C とおく.

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x - (-\cos x) + C$$

$$= x \sin x + \cos x + C \ .$$

よって，微分積分の基本定理より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \left[x \sin x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} - (0 \sin 0 + \cos 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.4.6}$ 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t\sin t\,dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int t\sin t\,dt =$$

よって

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t\sin t\,dt = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$\boxed{\text{問}7.4.6}$ 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t\sin t\,dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = \sin t - t\cos t + C \ .$$

よって

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t\sin t\,dt = \Big[\qquad\qquad\qquad\qquad \Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$\boxed{\text{問}7.4.6}$ 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t\sin t\,dt$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = \sin t - t\cos t + C \ .$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t\sin t\,dt &= \Big[\sin t - t\cos t\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\
&= \sin\pi - \pi\cos\pi - \left(\sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}\right) \\
&= \pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \\
&= \frac{7\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$