7.5 有理関数の積分法

分母と分子とが整式である分数式と等しい式を有理式という．例えば，

$$x^2-3x+4=\frac{x^2-3x+4}{1}$$

なので，x の整式 x^2-3x+4 は有理式である．一般的に，任意の整式 A は，分数 $\dfrac{A}{1}$ と等しいので有理式である．また例えば，

$$x+\frac{7}{x-3}=\frac{x(x-3)}{x-3}+\frac{7}{x-3}=\frac{x(x-3)+7}{x-3}=\frac{x^2-3x+7}{x-3}$$

なので，式 $x+\dfrac{7}{x-3}$ は有理式である．

分母と分子とが整式である分数式と等しい式を有理式という．例えば，

$$x^2 - 3x + 4 = \frac{x^2 - 3x + 4}{1}$$

なので，x の整式 $x^2 - 3x + 4$ は有理式である．一般的に，任意の整式 A は，分数 $\dfrac{A}{1}$ と等しいので有理式である．また例えば，

$$x + \frac{7}{x-3} = \frac{x(x-3)}{x-3} + \frac{7}{x-3} = \frac{x(x-3)+7}{x-3} = \frac{x^2-3x+7}{x-3}$$

なので，式 $x + \dfrac{7}{x-3}$ は有理式である．関数の値が独立変数の有理式で表されるとき，その関数を有理関数という．

分母と分子とが整式である分数式と等しい式を有理式という．例えば，

$$x^2 - 3x + 4 = \frac{x^2 - 3x + 4}{1}$$

なので，x の整式 $x^2 - 3x + 4$ は有理式である．一般的に，任意の整式 A は，分数 $\dfrac{A}{1}$ と等しいので有理式である．また例えば，

$$x + \frac{7}{x-3} = \frac{x(x-3)}{x-3} + \frac{7}{x-3} = \frac{x(x-3)+7}{x-3} = \frac{x^2-3x+7}{x-3}$$

なので，式 $x + \dfrac{7}{x-3}$ は有理式である．関数の値が独立変数の有理式で表されるとき，その関数を有理関数という．

分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式という．

分母と分子とが整式である分数式と等しい式を有理式という．例えば,

$$x^2-3x+4=\frac{x^2-3x+4}{1}$$

なので，x の整式 x^2-3x+4 は有理式である．一般的に，任意の整式 A は，分数 $\dfrac{A}{1}$ と等しいので有理式である．また例えば,

$$x+\frac{7}{x-3}=\frac{x(x-3)}{x-3}+\frac{7}{x-3}=\frac{x(x-3)+7}{x-3}=\frac{x^2-3x+7}{x-3}$$

なので，式 $x+\dfrac{7}{x-3}$ は有理式である．関数の値が独立変数の有理式で表されるとき，その関数を有理関数という.

分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式という.
分数式の分子の整式の次数が分母の整式の次数以上であるとき,

積分するためにはまずその分数式を整式と真分数式との和に分解することが基本方針である.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商

は　　　　　　で剰余は　　　なので,

$$
\begin{array}{rl}
 & \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \\
\cline{2-2}
2x-1 \; \big) & 3x^2 - 4x + 2 \\
 & 3x^2 - \frac{3}{2}x \\
\cline{2-2}
 & -\frac{5}{2}x + 2 \\
 & -\frac{5}{2}x + \frac{5}{4} \\
\cline{2-2}
 & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商は $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$ で剰余は $\dfrac{3}{4}$ なので,

$$
\begin{array}{r@{\,}r}
 & \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \\ \cline{2-2}
2x-1 \,\big) & 3x^2 - 4x + 2 \\
 & 3x^2 - \frac{3}{2}x \qquad \\ \cline{2-2}
 & -\frac{5}{2}x + 2 \\
 & -\frac{5}{2}x + \frac{5}{4} \\ \cline{2-2}
 & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商は $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$ で剰余は $\dfrac{3}{4}$ なので,

$$3x^2-4x+2=\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)+\frac{3}{4}\ .$$

(割られる整式)＝(割る整式)×(整商)＋(剰余)

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & \frac{3}{2}x & -\ \frac{5}{4} \\ \cline{2-4}
2x-1 \,\big) & 3x^2 & -\ 4x & +\ 2 \\
 & 3x^2 & -\ \frac{3}{2}x & \\ \cline{2-3}
 & & -\ \frac{5}{2}x & +\ 2 \\
 & & -\ \frac{5}{2}x & +\ \frac{5}{4} \\ \cline{3-4}
 & & & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商は $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$ で剰余は $\dfrac{3}{4}$ なので,

$$3x^2-4x+2 = \left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)+\frac{3}{4}\ .$$

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & & \frac{3}{2}x & -\ \frac{5}{4} \\ \hline
2x-1\ \big) & 3x^2 & -\ 4x & +\ 2 \\
 & 3x^2 & -\ \frac{3}{2}x & \\ \cline{2-3}
 & & -\ \frac{5}{2}x & +\ 2 \\
 & & -\ \frac{5}{2}x & +\ \frac{5}{4} \\ \cline{3-4}
 & & & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} &= \frac{\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)+\frac{3}{4}}{2x-1} \\
&= \frac{\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)}{2x-1}+\frac{\frac{3}{4}}{2x-1} \\
&= \frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\ .
\end{aligned}
$$

$$\frac{3x^2 - 4x + 2}{2x - 1} = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x - 1} \ .$$

$$\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x-1} \ .$$

これより

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2x-1}\,dx \ .\end{aligned}$$

$$\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} = \frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1} \ .$$

これより

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx &= \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx \\ &= \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{2x-1}\,dx \ .\end{aligned}$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$.

$$\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} = \frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1} \ .$$

これより

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx &= \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx \\ &= \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{2x-1}\,dx \ .\end{aligned}$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\int\frac{1}{2x-1}\,dx = \int\frac{1}{y}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y|+C_0 = \frac{1}{2}\ln|2x-1|+C_0 \ .$$

$$\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x-1} \ .$$

これより

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2x-1}\,dx \ .\end{aligned}$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}dy$ ． 積分定数を C_0 とおく．

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \int \frac{1}{y}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y| + C_0 = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C_0 \ .$$

積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-4x+1}{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2x-1}\,dx \\ &= \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}\ln|2x-1| + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}7.5.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{2x+5}\,dx$ を計算せよ.

$3x = \quad (2x+5) - \qquad$ なので, $\displaystyle\frac{3x}{2x+5} = \quad - \quad \frac{\qquad}{2x+5}$. 変数 y を $y = \qquad\qquad$ とおく. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = \quad$ なので $dx = \quad dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3x}{2x+5}\,dx =$$

$\boxed{\text{問}7.5.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{2x+5}\,dx$ を計算せよ.

$3x = \dfrac{3}{2}(2x+5) - \dfrac{15}{2}$ なので, $\dfrac{3x}{2x+5} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{15}{2}\dfrac{1}{2x+5}$. 変数 y を $y = 2x+5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3x}{2x+5}\,dx =$$

問7.5.1 不定積分 $\int \frac{3x}{2x+5}\,dx$ を計算せよ.

$3x = \frac{3}{2}(2x+5) - \frac{15}{2}$ なので, $\frac{3x}{2x+5} = \frac{3}{2} - \frac{15}{2}\frac{1}{2x+5}$. 変数 y を $y = 2x+5$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2}dy$. 積分定数を C とおく.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x}{2x+5}\,dx &= \int \frac{3}{2}\,dx - \int \frac{15}{2}\frac{1}{2x+5}\,dx \\
&= \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}\int \frac{1}{y}\frac{1}{2}\,dy = \frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\ln|y| + C \\
&= \frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\ln|2x+5| + C \ .
\end{aligned}
$$

終

問7.5.2 不定積分 $\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx$ を計算せよ.

$2x^2+5x=(\qquad)(2x-1)+\quad$ なので

$$\frac{2x^2+5x}{2x-1} = \qquad + \frac{\qquad}{2x-1}\ .$$

変数 y を $y=$ 　　　　　とおく. $\frac{dy}{dx}=$ 　　なので $dx=\quad dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx =$$

$\boxed{問 7.5,2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx$ を計算せよ.

$2x^2+5x=(x+3)(2x-1)+3$ なので

$$\frac{2x^2+5x}{2x-1} = x+3+\frac{3}{2x-1} \quad .$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx =$$

$\boxed{\text{問}\, 7.5.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx$ を計算せよ.

$2x^2+5x=(x+3)(2x-1)+3$ なので

$$\frac{2x^2+5x}{2x-1}=x+3+\frac{3}{2x-1}\ .$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx &= \textstyle\int (x+3)\,dx+\displaystyle\int \frac{3}{2x-1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+3x+3\int \frac{1}{y}\,\frac{1}{2}\,dy=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln|y|+C \\ &= \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln|2x-1|+C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$