7.5 有理関数の積分法

分母と分子とが整数である分数と等しい数を有理数という.

分母と分子とが整式である分数式と等しい式を有理式という.

分母と分子とが整数である分数と等しい数を有理数という.

分母と分子とが整式である分数式と等しい式を有理式という. 例えば,

$$x^2-3x+4=\frac{x^2-3x+4}{1}$$

なので, x の整式 x^2-3x+4 は有理式である. 一般的に, 任意の整式 A は, 分数 $\frac{A}{1}$ と等しいので有理式である.

分母と分子とが整数である分数と等しい数を有理数という.

分母と分子とが整式である分数式と等しい式を有理式という. 例えば,

$$x^2-3x+4=\frac{x^2-3x+4}{1}$$

なので, x の整式 x^2-3x+4 は有理式である. 一般的に, 任意の整式 A は, 分数 $\frac{A}{1}$ と等しいので有理式である. また例えば,

$$x+\frac{7}{x-3}=\frac{x(x-3)}{x-3}+\frac{7}{x-3}=\frac{x(x-3)+7}{x-3}=\frac{x^2-3x+7}{x-3}$$

なので, 式 $x+\dfrac{7}{x-3}$ は有理式である.

分母と分子とが整数である分数と等しい数を有理数という.

分母と分子とが整式である分数式と等しい式を有理式という. 例えば,

$$x^2 - 3x + 4 = \frac{x^2 - 3x + 4}{1}$$

なので, x の整式 $x^2 - 3x + 4$ は有理式である. 一般的に, 任意の整式 A は, 分数 $\frac{A}{1}$ と等しいので有理式である. また例えば,

$$x + \frac{7}{x-3} = \frac{x(x-3)}{x-3} + \frac{7}{x-3} = \frac{x(x-3)+7}{x-3} = \frac{x^2-3x+7}{x-3}$$

なので, 式 $x + \frac{7}{x-3}$ は有理式である.

関数の値が独立変数の有理式で表されるとき, その関数を有理関数という. 簡単な有理関数の不定積分を考える.

変数 x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して，A を B で割るときの整商 Q 及び，A を B で割るときの剰余 R は，次のような整式である：

変数 x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して，A を B で割るときの整商 Q 及び，A を B で割るときの剰余 R は，次のような整式である：

$A = BQ + R$ かつ R は 0 または B より次数が低い整式である．

変数 x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して，A を B で割るときの整商 Q 及び，A を B で割るときの剰余 R は，次のような整式である：

$A = BQ + R$ かつ R は 0 または B より次数が低い整式である．

割られる整式と割る整式と整商と剰余との関係は次のようになる：剰余は 0 かまたは割る整式より次数が低い整式で，

〔割られる整式〕$=$〔割る整式〕$\times$〔整商〕$+$〔剰余〕．

分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式という.

分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式という.

変数 x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して, 分数式 $\dfrac{A}{B}$ の分子の整式 A の次数が分母の整式 B の次数以上であるとする.

分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式という.

変数 x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して，分数式 $\dfrac{A}{B}$ の分子の整式 A の次数が分母の整式 B の次数以上であるとする．分子 A を分母 B で割るときの整商を Q とおき剰余を R とおく；

$A = BQ + R$ かつ R は 0 または B より次数が低い整式である.

分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式という.

変数 x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して，分数式 $\dfrac{A}{B}$ の分子の整式 A の次数が分母の整式 B の次数以上であるとする．分子 A を分母 B で割るときの整商を Q とおき剰余を R とおく；

$$A = BQ + R \text{ かつ } R \text{ は } 0 \text{ または } B \text{ より次数が低い整式である.}$$

このとき，

$$\frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = \frac{BQ}{B} + \frac{R}{B} = Q + \frac{R}{B} .$$

分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式という.

変数 x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して，分数式 $\dfrac{A}{B}$ の分子の整式 A の次数が分母の整式 B の次数以上であるとする．分子 A を分母 B で割るときの整商を Q とおき剰余を R とおく；

$$A = BQ + R \text{ かつ } R \text{ は } 0 \text{ または } B \text{ より次数が低い整式である.}$$

このとき，

$$\frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = \frac{BQ}{B} + \frac{R}{B} = Q + \frac{R}{B} \ .$$

このように，分数式の分子の整式の次数が分母の整式の次数以上であるとき，その分数式を，整式と真分数式との和または差の形に変形できる.

分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式という.

変数 x の整式 A 及び 0 以外の x の整式 B に対して，分数式 $\dfrac{A}{B}$ の分子の整式 A の次数が分母の整式 B の次数以上であるとする．分子 A を分母 B で割るときの整商を Q とおき剰余を R とおく；

$$A = BQ + R \text{ かつ } R \text{ は } 0 \text{ または } B \text{ より次数が低い整式である.}$$

このとき，

$$\frac{A}{B} = \frac{BQ+R}{B} = \frac{BQ}{B} + \frac{R}{B} = Q + \frac{R}{B} \ .$$

このように，分数式の分子の整式の次数が分母の整式の次数以上であるとき，その分数式を，整式と真分数式との和または差の形に変形できる.

分子の整式の次数が分母の整式の次数以上である分数式で表される有理関数を不定積分するには，まずその分数式を整式と真分数式との和に変形することが基本方針である.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商

は　　　　　　　で剰余は　　　なので,

$$
\begin{array}{r}
\frac{3}{2}x - \frac{5}{4} \\
2x-1 \;\big)\; \overline{3x^2 - 4x + 2} \\
\underline{3x^2 - \frac{3}{2}x } \\
-\frac{5}{2}x + 2 \\
\underline{-\frac{5}{2}x + \frac{5}{4}} \\
\frac{3}{4}
\end{array}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商は $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$ で剰余は $\dfrac{3}{4}$ なので,

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & & \frac{3}{2}x & - & \frac{5}{4} \\ \cline{2-6}
2x-1 & \big) \; 3x^2 & - & 4x & + & 2 \\
 & 3x^2 & - & \frac{3}{2}x & & \\ \cline{2-4}
 & & - & \frac{5}{2}x & + & 2 \\
 & & - & \frac{5}{2}x & + & \frac{5}{4} \\ \cline{3-6}
 & & & & & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商は $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$ で剰余は $\dfrac{3}{4}$ なので,

$$3x^2-4x+2 = (2x-1)\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}\ .$$

〔割られる整式〕＝〔割る整式〕×〔整商〕＋〔剰余〕

$$\begin{array}{r|rrr}
 & & \frac{3}{2}x & -\frac{5}{4} \\ \hline
2x-1 & 3x^2 & -4x & +2 \\
 & 3x^2 & -\frac{3}{2}x & \\ \hline
 & & -\frac{5}{2}x & +2 \\
 & & -\frac{5}{2}x & +\frac{5}{4} \\ \hline
 & & & \frac{3}{4}
\end{array}$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商は $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$ で剰余は $\dfrac{3}{4}$ なので,

$$3x^2-4x+2 = (2x-1)\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}\ .$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} &= \frac{(2x-1)\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}}{2x-1} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)}{2x-1}+\frac{\frac{3}{4}}{2x-1} \\ &= \frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\ .\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & \frac{3}{2}x & -\frac{5}{4} & \\ \hline 2x-1 & 3x^2 & -4x & +2 \\ & 3x^2 & -\frac{3}{2}x & \\ \hline & & -\frac{5}{2}x & +2 \\ & & -\frac{5}{2}x & +\frac{5}{4} \\ \hline & & & \frac{3}{4} \end{array}$$

$$\frac{3x^2 - 4x + 2}{2x - 1} = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x - 1} \quad .$$

$$\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x-1} \ .$$

これより

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2x-1}\,dx \ .\end{aligned}$$

$$\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} = \frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1} \ .$$

これより

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2x-1}\,dx \ .\end{aligned}$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$.

$$\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} = \frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1} \ .$$

これより

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx &= \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx \\ &= \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{2x-1}\,dx \ .\end{aligned}$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\int\frac{1}{2x-1}\,dx = \int\frac{1}{y}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y|+C_0 = \frac{1}{2}\ln|2x-1|+C_0 \ .$$

$$\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} = \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x-1} \ .$$

これより

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx \\ &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2x-1}\,dx \ .\end{aligned}$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\int \frac{1}{2x-1}\,dx = \int \frac{1}{y}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y| + C_0 = \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C_0 \ .$$

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-4x+1}{2x-1}\,dx &= \int \left(\frac{3}{2}x - \frac{5}{4}\right)dx + \frac{3}{4}\int \frac{1}{2x-1}\,dx \\ &= \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}\ln|2x-1| + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 7.5.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{2x+5}\,dx$ を計算せよ.

$3x = \quad (2x+5) -$ なので, $\dfrac{3x}{2x+5} = \quad - \dfrac{\quad}{2x+5}$. 変数 y を

$y =$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} =$ なので $dx = \quad dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3x}{2x+5}\,dx =$$

$\boxed{問 7.5.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{2x+5}\,dx$ を計算せよ.

$3x = \dfrac{3}{2}(2x+5) - \dfrac{15}{2}$ なので, $\dfrac{3x}{2x+5} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{15}{2}\dfrac{1}{2x+5}$. 変数 y を $y = 2x+5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{3x}{2x+5}\,dx =$$

$\boxed{問 7.5.1}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x}{2x+5}\,dx$ を計算せよ.

$3x = \dfrac{3}{2}(2x+5) - \dfrac{15}{2}$ なので, $\dfrac{3x}{2x+5} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{15}{2}\dfrac{1}{2x+5}$. 変数 y を $y = 2x+5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{2x+5}\,dx &= \int \frac{3}{2}\,dx - \int \frac{15}{2}\frac{1}{2x+5}\,dx \\ &= \frac{3}{2}x - \frac{15}{2}\int \frac{1}{y}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\ln|y| + C \\ &= \frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\ln|2x+5| + C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問 7.5.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx$ を計算せよ.

$2x^2+5x = (\qquad)(2x-1)+\qquad$ なので

$$\frac{2x^2+5x}{2x-1} = \qquad + \frac{\qquad}{2x-1} \ .$$

変数 y を $y = \qquad$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = \qquad$ なので $dx = \quad dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx =$$

$\boxed{問 7.5,2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx$ を計算せよ.

$2x^2+5x=(x+3)(2x-1)+3$ なので

$$\frac{2x^2+5x}{2x-1} = x+3+\frac{3}{2x-1} \quad .$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx =$$

$\boxed{\text{問}\,7.5.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx$ を計算せよ.

$2x^2+5x = (x+3)(2x-1)+3$ なので

$$\frac{2x^2+5x}{2x-1} = x+3+\frac{3}{2x-1} \ .$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx &= \int (x+3)\,dx + \int \frac{3}{2x-1}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+3x+3\int \frac{1}{y}\,\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln|y|+C \\ &= \frac{1}{2}x^2+3x+\frac{3}{2}\ln|2x-1|+C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$