7.6　有理関数の積分法

変数 x 及び定数 a, b, c, h, k ($a \neq 0$) に対して，分母が 2 次式である真分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分を考える．この不定積分の計算法は，x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac の値の符号によって異なる．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac>0$ のときを考える．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac>0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 2 個の 1 次式の積に因数分解できる：

$ax^2+bx+c = A(x)B(x)$ （ $A(x)$ と $B(x)$ とは x の 1 次式で互いに素）．

整式 A と整式 B との両方に共通の 1 以上の次数の因数がないとき，A と B とは互いに素であるという.

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac>0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 2 個の 1 次式の積に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = A(x)\,B(x)$$ （$A(x)$ と $B(x)$ とは x の 1 次式で互いに素）．

ある定数 p と q とをとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \ .$$

x の値が何であっても，両辺の値がある限り，つまり $A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ である限り，両辺が等しい．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a,b,c,h,k は定数で $a\neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac>0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で 2 個の 1 次式の積に因数分解できる：

$ax^2+bx+c = A(x)\,B(x)$ （ $A(x)$ と $B(x)$ とは x の 1 次式で互いに素）．

ある定数 p と q とをとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \ .$$

このような分数式の変形を部分分数分解という.

$A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ のとき,

$$
\begin{aligned}
& \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\
\iff \quad & \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)} A(x)\,B(x) + \frac{q}{B(x)} A(x)\,B(x) \\
\iff \quad & hx+k = p\,B(x) + q\,A(x) \quad .
\end{aligned}
$$

$A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
& \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\
\iff \ & \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)} A(x)\,B(x) + \frac{q}{B(x)} A(x)\,B(x) \\
\iff \ & hx+k = p\,B(x) + q\,A(x) \quad .
\end{aligned}
$$

従って，変数 x について，

等式 $\dfrac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \dfrac{p}{A(x)} + \dfrac{q}{B(x)}$ が x に関する恒等式である

$\iff$ 等式 $hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)$ が x に関する恒等式である　.

$A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} & \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\ \iff\ & \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)} A(x)\,B(x) + \frac{q}{B(x)} A(x)\,B(x) \\ \iff\ & hx+k = p\,B(x) + q\,A(x) \ . \end{aligned}$$

従って，変数 x について，

等式 $\dfrac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \dfrac{p}{A(x)} + \dfrac{q}{B(x)}$ が x に関する恒等式である

$\iff$ 等式 $hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)$ が x に関する恒等式である .

そこで等式 $hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)$ が x に関する恒等式になるように p, q の値を定める.

$A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\
\iff\ &\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)}A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)\,B(x) + \frac{q}{B(x)}A(x)\,B(x) \\
\iff\ &hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)\ .
\end{aligned}
$$

従って，変数 x について，

等式 $\dfrac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \dfrac{p}{A(x)} + \dfrac{q}{B(x)}$ が x に関する恒等式である

$\iff$ 等式 $hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)$ が x に関する恒等式である .

そこで等式 $hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)$ が x に関する恒等式になるように p, q の値を定める．そのために恒等式に関する次の性質を用いる：変数 x の高々1次の整式 $ax+b$ と $px+q$ と（ a, b, p, q は x と無関係な定数）について，

等式 $ax+b = px+q$ が x に関する恒等式である $\iff$ 　　　　かつ　　　　.

$A(x) \neq 0$ かつ $B(x) \neq 0$ のとき，

$$\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)}$$

$$\iff \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)}A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)\,B(x) + \frac{q}{B(x)}A(x)\,B(x)$$

$$\iff hx+k = p\,B(x) + q\,A(x) \ .$$

従って，変数 x について，

等式 $\dfrac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \dfrac{p}{A(x)} + \dfrac{q}{B(x)}$ が x に関する恒等式である

$\iff$ 等式 $hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)$ が x に関する恒等式である .

そこで等式 $hx+k = p\,B(x) + q\,A(x)$ が x に関する恒等式になるように p, q の値を定める．そのために恒等式に関する次の性質を用いる：変数 x の高々1次の整式 $ax+b$ と $px+q$ と（a, b, p, q は x と無関係な定数）について，

等式 $ax+b = px+q$ が x に関する恒等式である $\iff$ $a = p$ かつ $b = q$.

例 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める:

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める:

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は, かつ .

$\boxed{例}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると，

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は， $a+b=9$ かつ $-3a+2b=-7$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める:

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3) + b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は, $a+b=9$ かつ $-3a+2b=-7$.
この方程式を解くと $a=5$ かつ $b=4$.

$\boxed{\text{例}}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する.

等式 $\displaystyle\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると,

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ ,$$

$$9x-7 = a(x-3)+b(x+2) \ ,$$

$$9x-7 = (a+b)x-3a+2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は, $a+b=9$ かつ $-3a+2b=-7$.
この方程式を解くと $a=5$ かつ $b=4$. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \quad .$$

よって,

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \quad .$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

よって,

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x + 2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$.

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

よって,

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$. 変数 z を $z = x-3$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$.

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

よって，

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく．$\frac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$ ．変数 z を $z = x-3$ とおく．$\frac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$ ．積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned} 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx &= 5\int \frac{1}{y}\,dy + 4\int \frac{1}{z}\,dz = 5\ln|y| + 4\ln|z| + C \\ &= 5\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + C \ , \end{aligned}$$

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \ .$$

よって,

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$. 変数 z を $z = x-3$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} 5\int \frac{1}{x+2}\,dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx &= 5\int \frac{1}{y}\,dy + 4\int \frac{1}{z}\,dz = 5\ln|y| + 4\ln|z| + C \\ &= 5\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + C \ , \end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = 5\ln|x+2| + 4\ln|x-3| + C \ .$$

終

$\boxed{\text{問}7.6.1}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定めよ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx$ を計算せよ.

等式 $\dfrac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-4}$ の両辺に $(\qquad)(\qquad)$ を掛けると

$$3x-22 = a(\qquad) + b(\qquad)\ ,$$

$$3x-22 = (\qquad)x - \qquad\qquad ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は $\qquad = \qquad$ かつ $\qquad = \qquad$;

この方程式より $a = \qquad$ かつ $b = \qquad$. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{\qquad}{x+1} - \frac{\qquad}{x-4} \ .$$

$\boxed{\text{問}7.6.1}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定めよ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx$ を計算せよ.

等式 $\displaystyle\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}$ の両辺に $(x+1)(x-4)$ を掛けると

$$3x-22 = a(x-4) + b(x+1) \ ,$$

$$3x-22 = (a+b)x - 4a + b \ ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は　　　$=$　　かつ　　　　$=$　　　;

この方程式より $a=$　　かつ $b=$　　　. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{}{x+1} - \frac{}{x-4} \ .$$

$\boxed{問7.6.1}$ 次の等式が変数 x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定めよ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx$ を計算せよ.

等式 $\displaystyle\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}$ の両辺に $(x+1)(x-4)$ を掛けると

$$3x-22 = a(x-4) + b(x+1) \ ,$$

$$3x-22 = (a+b)x - 4a + b \ ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は $a+b=3$ かつ $-4a+b=-22$ ；

この方程式より $a=5$ かつ $b=-2$. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-4} \ .$$

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-4} \ .$$

よって

$$\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-4} \right) dx = \int \frac{5}{x+1}\,dx - \int \frac{2}{x-4}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$. 変数 z を $z = x-4$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{x+1}\,dx - \int \frac{2}{x-4}\,dx &= 5\int \frac{1}{y}\,dy - 2\int \frac{1}{z}\,dx = 5\ln|y| - 2\ln|z| + C \\ &= 5\ln|x+1| - 2\ln|x-4| + C \ , \end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx = 5\ln|x+1| - 2\ln|x-4| + C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 $a\,,b$ をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 $a\,,b$ をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4)=\frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので, ある定数 $a\,,b$ をとると, 変数 x に関する次の恒等式が成り立つ:

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると,

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

$$7x+10=a(x+4)+b(2x-1)\ ,$$

$$7x+10=(a+2b)x+4a-b\ .$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 $a\,,b$ をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4)=\frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

$$7x+10=a(x+4)+b(2x-1)\ ,$$

$$7x+10=(a+2b)x+4a-b\ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，　　　　　　　　かつ　　　　　　　　.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので, ある定数 $a\,,b$ をとると, 変数 x に関する次の恒等式が成り立つ:

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると,

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4)=\frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

$$7x+10=a(x+4)+b(2x-1)\ ,$$

$$7x+10=(a+2b)x+4a-b\ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は, $a+2b=7$ かつ $4a-b=10$.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する．

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a, b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4)=\frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

$$7x+10=a(x+4)+b(2x-1)\ ,$$

$$7x+10=(a+2b)x+4a-b\ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$a+2b=7$ かつ $4a-b=10$ ．
この方程式を解くと $a=3$ かつ $b=2$ ．

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する.

$2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので, ある定数 $a\,,b$ をとると, 変数 x に関する次の恒等式が成り立つ:

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)}=\frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると,

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4)=\frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$

$$7x+10=a(x+4)+b(2x-1)\ ,$$

$$7x+10=(a+2b)x+4a-b\ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は, $a+2b=7$ かつ $4a-b=10$.
この方程式を解くと $a=3$ かつ $b=2$. 次の x に関する恒等式が成り立つ:

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}=\frac{3}{2x-1}+\frac{2}{x+4}\ .$$

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} \;=\; \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \quad .$$

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \quad .$$

よって，

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \right) dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \quad .$$

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \quad .$$

よって，

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4}\right) dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \quad .$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$ ．

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \ .$$

よって,

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4}\right) dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \ .$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$. 変数 z を $z = x+4$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$.

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \ .$$

よって，

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4}\right) dx = \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx \ .$$

変数 y を $y = 2x-1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}\,dy$ ． 変数 z を $z = x+4$ とおく． $\dfrac{dz}{dx} = 1$ なので $dx = dz$ ． 積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx &= \int \frac{3}{2x-1}\,dx + \int \frac{2}{x+4}\,dx = \int \frac{3}{y}\,\frac{1}{2}\,dy + \int \frac{2}{z}\,dz \\ &= \frac{3}{2}\ln|y| + 2\ln|z| + C \\ &= \frac{3}{2}\ln|2x-1| + 2\ln|x+4| + C \ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.6.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ．

$2x^2+x-6=(x\qquad)(2x\qquad)$ なので，ある定数 a, b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{x-12}{(x\qquad)(2x\qquad)}=\frac{a}{x\qquad}+\frac{b}{2x\qquad}\ ,$$

$$x-12=a(2x\qquad)+b(x\qquad)\ ,$$

$$x-12=(\qquad\qquad)x\qquad\qquad\qquad\qquad ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は， $\qquad=\qquad$ かつ $\qquad=\qquad$ ．この方程式より $a=\qquad$ かつ $b=\qquad$ ．次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{\qquad}{x\qquad}\qquad\frac{\qquad}{2x\qquad}\ .$$

$\boxed{\text{問}7.6.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ.

$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので，ある定数 a,b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{x-12}{(x+2)(2x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{2x-3}\ ,$$

$$x-12=a(2x-3)+b(x+2)\ ,$$

$$x-12=(2a+b)x-3a+2b\ ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$\qquad = \qquad$ かつ $\qquad = \qquad$. この方程式より $a=\qquad$ かつ $b=\qquad$. 次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{\qquad}{x\qquad}\qquad\frac{\qquad}{2x\qquad}\ .$$

$\boxed{\text{問}7.6.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx$ を計算せよ．

$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので，ある定数 a, b をとると，変数 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{x-12}{(x+2)(2x-3)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{2x-3}\ ,$$

$$x-12=a(2x-3)+b(x+2)\ ,$$

$$x-12=(2a+b)x-3a+2b\ ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$2a+b=1$ かつ $-3a+2b=-12$ ．この方程式より $a=2$ かつ $b=-3$ ．次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6}=\frac{2}{x+2}-\frac{3}{2x-3}\ .$$

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2x-3} \ .$$

よって

$$\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{2x-3}\right) dx = \int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{2x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y = x+2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 1$ なので $dx = dy$. 変数 z を $z = 2x-3$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 2$ なので $dx = \dfrac{1}{2}dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{2x-3}\,dx &= 2\int \frac{1}{y}\,dy - 3\int \frac{1}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = 2\ln|y| - \frac{3}{2}\ln|z| + C \\ &= 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|2x-3| + C \ .\end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx = 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|2x-3| + C \ .$$

終

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a,b,c,h,k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える.

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l\,(px+q)^2 \quad （\, l, p, q \text{ は定数で } p \neq 0 \,）.$$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l\,(px+q)^2 \quad （l, p, q \text{ は定数で } p \neq 0 ）.$$

変数 y を $y = px+q$ とおく． $x = \dfrac{y-q}{p}$.

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l\,(px+q)^2 \quad （\, l\,, p, q \text{ は定数で } p \neq 0 \text{ ）}.$$

変数 y を $y=px+q$ とおく． $x = \dfrac{y-q}{p}$ ．

$$\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} = \frac{hx+k}{l(px+q)^2} = \frac{h\dfrac{y-q}{p}+k}{ly^2} = \frac{\dfrac{h}{p}y}{ly^2} + \frac{k-\dfrac{hq}{p}}{ly^2}$$
$$= \frac{h}{lpy} + \frac{kp-hq}{lpy^2} \ .$$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考える．このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できる：

$$ax^2+bx+c = l\,(px+q)^2 \quad （ l\,, p, q \text{ は定数で } p \neq 0 ）.$$

変数 y を $y = px+q$ とおく． $x = \dfrac{y-q}{p}$.

$$\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} = \frac{hx+k}{l(px+q)^2} = \frac{h\dfrac{y-q}{p}+k}{ly^2} = \frac{\dfrac{h}{p}y}{ly^2} + \frac{k-\dfrac{hq}{p}}{ly^2}$$
$$= \frac{h}{lpy} + \frac{kp-hq}{lpy^2} \ .$$

このような分数式の変形も部分分数分解という.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$. 変数 y を $y=2x+1$ とおく. $x=\dfrac{y-1}{2}$.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$. 変数 y を $y=2x+1$ とおく. $x=\dfrac{y-1}{2}$.

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}=\frac{6x-5}{(2x+1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y-1}{2}-5}{y^2}=\frac{3y-8}{y^2}=\frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2}=\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$. 変数 y を $y=2x+1$ とおく. $x=\dfrac{y-1}{2}$.

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}=\frac{6x-5}{(2x+1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y-1}{2}-5}{y^2}=\frac{3y-8}{y^2}=\frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2}=\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$. 変数 y を $y=2x+1$ とおく. $x=\dfrac{y-1}{2}$.

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}=\frac{6x-5}{(2x+1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y-1}{2}-5}{y^2}=\frac{3y-8}{y^2}=\frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2}=\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx=\int\left(\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\right)\frac{1}{2}\,dy=\frac{3}{2}\int\frac{1}{y}\,dy-4\int y^{-2}dy$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する.

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$. 変数 y を $y=2x+1$ とおく. $x=\dfrac{y-1}{2}$.

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}=\frac{6x-5}{(2x+1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y-1}{2}-5}{y^2}=\frac{3y-8}{y^2}=\frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2}=\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx&=\int\left(\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\right)\frac{1}{2}\,dy=\frac{3}{2}\int\frac{1}{y}\,dy-4\int y^{-2}dy\\&=\frac{3}{2}\ln|y|-4(-y^{-1})+C\\&=\frac{3}{2}\ln|2x+1|+\frac{4}{2x+1}+C\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.6.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ.

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1=(\qquad\qquad)^2$.

変数 y を $y=\qquad\qquad\qquad$ とおく. $x=\qquad\qquad$.

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1}=\frac{6x+7}{(\qquad\qquad)^2}=\frac{6\cdot\qquad\qquad+7}{y^2}=\frac{\qquad}{y^2}=\frac{\quad}{y}+\frac{\quad}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=\qquad$ なので $dx=\quad dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6x+7}{4x^2+4x+1}\,dx=$$

$\boxed{\text{問}7.6.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ.

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$.
変数 y を $y=3x-1$ とおく. $x=\dfrac{y+1}{3}$.

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1}=\frac{6x+7}{(3x-1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y+1}{3}+7}{y^2}=\frac{2y+9}{y^2}=\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=$ なので $dx=$ dy . 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{6x+7}{4x^2+4x+1}\,dx=$$

$\boxed{\text{問}7.6.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ.

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$.
変数 y を $y=3x-1$ とおく. $x=\dfrac{y+1}{3}$.

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1}=\frac{6x+7}{(3x-1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y+1}{3}+7}{y^2}=\frac{2y+9}{y^2}=\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int\frac{6x+7}{4x^2+4x+1}\,dx=\int\left(\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\right)\frac{1}{3}\,dy=\frac{2}{3}\int\frac{1}{y}\,dy+3\int y^{-2}dy$$

$\boxed{問7.6.3}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算せよ.

変数 x の 2 次式 $9x^2-6x+1$ を因数分解すると $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$.
変数 y を $y=3x-1$ とおく. $x=\dfrac{y+1}{3}$.

$$\frac{6x+7}{9x^2-6x+1}=\frac{6x+7}{(3x-1)^2}=\frac{6\cdot\dfrac{y+1}{3}+7}{y^2}=\frac{2y+9}{y^2}=\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int\frac{6x+7}{4x^2+4x+1}\,dx&=\int\left(\frac{2}{y}+\frac{9}{y^2}\right)\frac{1}{3}\,dy=\frac{2}{3}\int\frac{1}{y}\,dy+3\textstyle\int y^{-2}dy\\&=\frac{2}{3}\ln|y|-3y^{-1}+C\\&=\frac{2}{3}\ln|3x-1|-\frac{3}{3x-1}+C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac<0$ のときを考える．

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac<0$ のときを考える．このときは分母の 2 次式 ax^2+bx+c を平方完成する：

$$ax^2+bx+c = a(x+p)^2+q \quad （p, q \text{ は定数}）.$$

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac<0$ のときを考える．このときは分母の 2 次式 ax^2+bx+c を平方完成する：

$$ax^2+bx+c = a(x+p)^2+q \quad （p, q \text{ は定数}）.$$

そして変数 y を $y = x+p$ とおいて置換積分をする.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

被積分関数の式の分母 $x^2+2x+10$ を平方完成する:

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

被積分関数の式の分母 $x^2+2x+10$ を平方完成する:

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

変数 y を $y = x+1$ とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

被積分関数の式の分母 $x^2+2x+10$ を平方完成する:

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおく. $x=y-1$ なので,

$$\frac{3x+5}{x^2+2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9} \ .$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

被積分関数の式の分母 $x^2+2x+10$ を平方完成する:

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおく. $x=y-1$ なので,

$$\frac{3x+5}{x^2+2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9} \ .$$

$y=x+1$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する.

被積分関数の式の分母 $x^2+2x+10$ を平方完成する:

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9 \ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおく. $x=y-1$ なので,

$$\frac{3x+5}{x^2+2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9} \ .$$

$y=x+1$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. よって

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx &= \int \left(\frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9}\right)dy \\ &= \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .\end{aligned}$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{2}\,dz \ .$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{2}\,dz \ .$$

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

任意の実数 y について， $y^2 \geq 0$ ， $y^2+9 \geq 9 > 0$ ，よって $|y^2+9| = y^2+9$ ．

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{2}\,dz \ .$$

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|\,y^2+9\,| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{2}{y^2+9}\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 \ .$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{2}\,dz \ .$$

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{2}{y^2+9}\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 \ .$$

積分定数を C とおく． $y = x+1$ なので，

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C$$

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = y^2+9$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 2y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{2}\,dz \ .$$

$$\int \frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{2}{y^2+9}\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C_2 \ .$$

積分定数を C とおく． $y = x+1$ なので,

$$\begin{aligned}\int \frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx &= \int \frac{3y}{y^2+9}\,dy + \int \frac{2}{y^2+9}\,dy = \frac{3}{2}\ln(y^2+9) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3} + C \\ &= \frac{3}{2}\ln\{(x+1)^2+9\} + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x+1}{3} + C \\ &= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10) + \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x+1}{3} + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 7.6.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ.

$x^2-6x+13=(\qquad)^2+\quad$. 変数 y を $y=\qquad\qquad$ とおく. $x=\qquad\quad$.

$\dfrac{dy}{dx}=\quad$ なので $dx=dy\ $.

$$\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx=\int \frac{4x-7}{(\qquad)^2+\quad}\,dx=\int \frac{4(\qquad)-7}{y^2+\quad}\,dy=\int \frac{}{y^2+\quad}\,dy$$

$$=\int \frac{}{y^2+\quad}\,dy+\int \frac{}{y^2+\quad}\,dy\ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z=\qquad\qquad$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\qquad$ なので

$dy=\quad dz\ $.

$$\int \frac{4y}{y^2+4}\,dy=\int \qquad dz=$$

$$\int \frac{5}{y^2+4}\,dy=$$

$\boxed{\text{問}7.6.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ.

$x^2-6x+13=(x-3)^2+4$. 変数 y を $y=x-3$ とおく. $x=y+3$.

$\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$.

$$\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx=\int \frac{4x-7}{(\qquad)^2+\quad}\,dx=\int \frac{4(\qquad)-7}{y^2+\quad}\,dy=\int \frac{\quad}{y^2+\quad}\,dy$$

$$=\int \frac{\quad}{y^2+\quad}\,dy+\int \frac{\quad}{y^2+\quad}\,dy\ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z=\qquad$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\quad$ なので

$dy=\quad dz$.

$$\int \frac{4y}{y^2+4}\,dy=\int \qquad dz=$$

$$\int \frac{5}{y^2+4}\,dy=$$

$\boxed{問 7.6.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ.

$x^2-6x+13=(x-3)^2+4$. 変数 y を $y=x-3$ とおく. $x=y+3$.

$\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$.

$$\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx=\int \frac{4x-7}{(x-3)^2+4}\,dx=\int \frac{4(y+3)-7}{y^2+4}\,dy=\int \frac{4y+5}{y^2+4}\,dy$$
$$=\int \frac{4y}{y^2+4}\,dy+\int \frac{5}{y^2+4}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z=$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=$ なので

$dy=\quad dz$.

$$\int \frac{4y}{y^2+4}\,dy=\int \qquad dz=$$

$$\int \frac{5}{y^2+4}\,dy=$$

$\boxed{\text{問}7.6.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算せよ.

$x^2-6x+13=(x-3)^2+4$. 変数 y を $y=x-3$ とおく. $x=y+3$.
$\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$.

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx &= \int \frac{4x-7}{(x-3)^2+4}\,dx = \int \frac{4(y+3)-7}{y^2+4}\,dy = \int \frac{4y+5}{y^2+4}\,dy \\ &= \int \frac{4y}{y^2+4}\,dy + \int \frac{5}{y^2+4}\,dy \ .\end{aligned}$$

積分定数を C_1, C_2 とおく. 変数 z を $z=y^2+4$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=2y$ なので
$y\,dy=\dfrac{1}{2}\,dz$.

$$\int \frac{4y}{y^2+4}\,dy = \int \frac{4}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = 2\ln|z| + C_1 = 2\ln(y^2+4)+C_1 \ .$$

$$\int \frac{5}{y^2+4}\,dy = 5\cdot\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{y}{2} + C_2 = \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{y}{2} + C_2 \ .$$

よって，積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx &= 2\ln(y^2+4)+\frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{y}{2}+C\\ &= 2\ln\{(x-3)^2+4\}+\frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2}+C\\ &= 2\ln(x^2-6x+13)+\frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2}+C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

変数 y を $y=x-2$ とおく. $x=y+2$ なので,

$$\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} = \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1}$$
$$= \frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1} \ .$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

変数 y を $y=x-2$ とおく. $x=y+2$ なので,

$$\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} = \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1}$$
$$= \frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1} \ .$$

$y=x-2$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する.

被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1 \ .$$

変数 y を $y=x-2$ とおく. $x=y+2$ なので,

$$\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} = \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1}$$
$$= \frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1} \ .$$

$y=x-2$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. よって

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int\left(\frac{3y}{2y^2+1} - \frac{5}{2y^2+1}\right)dy$$
$$= \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ \ .$$

積分定数を $C_1\,, C_2$ とおく．変数 z を $z = 2y^2+1$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 4y$ なので

$$y\,dy = \frac{1}{4}\,dz \ \ .$$

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

積分定数を C_1, C_2 とおく．変数 z を $z = 2y^2+1$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 4y$ なので $y\,dy = \dfrac{1}{4}\,dz$ ．

$$\int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{4}\,dz = \frac{3}{4}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{4}\ln|2y^2+1| + C_1$$

$$= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) + C_1 \ .$$

任意の実数 y について，$y^2 \geq 0$ ，$2y^2+1 \geq 1 > 0$ ，よって $|2y^2+1| = 2y^2+1$ ．

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \ .$$

積分定数を $C_1\,, C_2$ とおく. 変数 z を $z = 2y^2+1$ とおく. $\dfrac{dz}{dy} = 4y$ なので

$y\,dy = \dfrac{1}{4}\,dz$.

$$\int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy = \int \frac{3}{z}\,\frac{1}{4}\,dz = \frac{3}{4}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{4}\ln|\,2y^2+1\,| + C_1$$
$$= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) + C_1 \ .$$

$$\int \frac{5}{2y^2+1}\,dy = \frac{5}{2}\int \frac{1}{y^2+\frac{1}{2}}\,dy = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{2}}} + C_2$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\!\left(\sqrt{2}\,y\right) + C_2 \ .$$

積分定数を C とおく． $y = x - 2$ なので，

$$\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy$$

$$= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\,y\right) + C$$

積分定数を C とおく． $y=x-2$ なので，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx &= \int \frac{3y}{2y^2+1}\,dy - \int \frac{5}{2y^2+1}\,dy \\
&= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\,y\right) + C \\
&= \frac{3}{4}\ln\{2(x-2)^2+1\} - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left\{\sqrt{2}\,(x-2)\right\} + C \\
&= \frac{3}{4}\ln(2x^2-8x+9) - \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\left\{\sqrt{2}\,(x-2)\right\} + C \ . \qquad \boxed{\text{終}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{問 7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7 = \quad (\qquad)^2 + \quad$. 変数 y を $y = \qquad\qquad$ とおく. $x = \qquad\qquad$.

$\dfrac{dy}{dx} = \qquad$ なので $dx = \quad dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx =$$

$\boxed{\text{問}7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx=$$

$\boxed{問7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx=\int \frac{5x-8}{4(x-1)^2+3}\,dx=\int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dy$$

$\boxed{問7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx &= \int \frac{5x-8}{4(x-1)^2+3}\,dx = \int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dy \\ &= \int \frac{5y-3}{4y^2+3}\,dy = \int \frac{5y}{4y^2+3}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問}7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx &= \int \frac{5x-8}{4(x-1)^2+3}\,dx = \int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dy \\
&= \int \frac{5y-3}{4y^2+3}\,dy = \int \frac{5y}{4y^2+3}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy \\
&= \frac{5}{8}\ln(4y^2+3) - \frac{3}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C
\end{aligned}$$

$\boxed{問 7.6.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算せよ.

$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$. 変数 y を $y=x-1$ とおく. $x=y+1$. $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}
\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx &= \int \frac{5x-8}{4(x-1)^2+3}\,dx = \int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dy \\
&= \int \frac{5y-3}{4y^2+3}\,dy = \int \frac{5y}{4y^2+3}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy \\
&= \frac{5}{8}\ln(4y^2+3) - \frac{3}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{5}{8}\ln\{4(x-1)^2+3\} - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{2(x-1)}{\sqrt{3}} + C \\
&= \frac{5}{8}\ln(4x^2-8x+7) - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{2x-2}{\sqrt{3}} + C \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$