7.7 三角関数が現れる式の積分法

関数 f に対して，不定積分 $\int f(\sin x)\cos x\,dx$ の計算には次のような置換積分を用いる：変数 x, y について $y = \sin x$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ より $\cos x\,dx = dy$ なので，

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(y)\,dy \ .$$

関数 f に対して，不定積分 $\int f(\sin x)\cos x\,dx$ の計算には次のような置換積分を用いる：変数 x, y について $y = \sin x$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ より $\cos x\,dx = dy$ なので，

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(y)\,dy \ .$$

関数 f に対して，不定積分 $\int f(\cos x)\sin x\,dx$ の計算には次のような置換積分を用いる：変数 x, y について $y = \cos x$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ より $\sin x\,dx = -dy$ なので，

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = \int f(y)(-dy) = -\int f(y)\,dy \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \sin^3 t \cos t \, dt$ を計算する.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int \sin^3 t \cos t \, dt$ を計算する.

変数 x を $x = \sin t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt} = \cos t$ なので $\cos t \, dt = dx$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \sin^3 t \cos t \, dt$ を計算する.

変数 x を $x = \sin t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt} = \cos t$ なので $\cos t \, dt = dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt = \int (\sin t)^3 \cos t \, dt = \int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C = \frac{1}{4} (\sin t)^4 + C$$

$$= \frac{1}{4} \sin^4 t + C \ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \sin x\,(\cos^3 x + 2)\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int \sin x\,(\cos^3 x + 2)\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x\,dx = -dy$.

例 不定積分 $\int \sin x\,(\cos^3 x+2)\,dx$ を計算する.

変数 y を $y=\cos x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=-dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \sin x\,(\cos^3 x+2)\,dx &= \int (\cos^3 x+2)\sin x\,dx = \int (y^3+2)(-dy)\\ &= -\int (y^3+2)\,dy = -\left(\frac{1}{4}y^4+2y\right)+C\\ &= -\frac{1}{4}\sin^4 x-2\sin x+C\ .\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問}7.7.1}$ 不定積分 $\int(\cos^2 t+3)\sin t\,dt$ を計算せよ.

変数 x を $x=$ 　　　　とおく. $\dfrac{dx}{dt}=$ 　　　　なので 　　　　$dt=-dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int(\cos^2 t+3)\sin t\,dt=\int(\qquad\qquad)(\qquad\quad)=-\int(\qquad\qquad)\,dx$$

$\boxed{問7.7.1}$ 不定積分 $\int (\cos^2 t + 3) \sin t \, dt$ を計算せよ.

変数 x を $x = \cos t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t$ なので $\sin t \, dt = -dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int (\cos^2 t + 3) \sin t \, dt = \int (\qquad\qquad)(\qquad\quad) = -\int (\qquad\qquad) \, dx$$

問 7.7.1 不定積分 $\int (\cos^2 t + 3) \sin t \, dt$ を計算せよ.

変数 x を $x = \cos t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t$ なので $\sin t \, dt = -dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int (\cos^2 t + 3) \sin t \, dt = \int (x^2 + 3)(-dx) = -\int (x^2 + 3) \, dx = -\left(\frac{1}{3}x^3 + 3x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 t - 3\cos t + C \ .$$

終

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める.

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であった． 変数 y を $y =$ 　　　　 とおく．

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であった．変数 y を $y = \cos x$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x\, dx = -dy$ ．

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であった．変数 y を $y = \cos x$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x \, dx = -dy$ ．よって

$$\tan x \, dx = \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \frac{1}{\cos x} \sin x \, dx = \frac{1}{y} (-dy) = -\frac{1}{y} \, dy \; .$$

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であった．変数 y を $y = \cos x$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x\, dx = -dy$ ．よって

$$\tan x\, dx = \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \frac{1}{\cos x}\sin x\, dx = \frac{1}{y}(-dy) = -\frac{1}{y}\, dy\ .$$

積分定数を C とおく．

$$\int \tan x\, dx = \int \left(-\frac{1}{y}\right) dy = -\int \frac{1}{y}\, dy = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C\ .$$

置換積分法によって正接関数 $\tan x$ の不定積分を求める． $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ であった．変数 y を $y = \cos x$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x\,dx = -dy$ ．よって

$$\tan x\,dx = \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \frac{1}{\cos x}\sin x\,dx = \frac{1}{y}(-dy) = -\frac{1}{y}\,dy \ .$$

積分定数を C とおく．

$$\int \tan x\,dx = \int\left(-\frac{1}{y}\right)dy = -\int\frac{1}{y}\,dy = -\ln|y| + C = -\ln|\cos x| + C \ .$$

定理（積分公式）

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C \quad (\ C \text{ は積分定数}) .$$

$\boxed{\text{問}7.7.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \tan\frac{y}{3}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z=$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=$ なので $dy=$ dz . 積分定数を C とおく.

$$\int \tan\frac{y}{3}\,dy = \int \qquad dz =$$

$\boxed{問 7.7.2}$ 不定積分 $\displaystyle\int \tan\frac{y}{3}\,dy$ を計算せよ.

変数 z を $z=\dfrac{y}{3}$ とおく. $\dfrac{dz}{dy}=\dfrac{1}{3}$ なので $dy=3\,dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \tan\frac{y}{3}\,dy &= \textstyle\int \tan z\,3\,dz = 3\int \tan z\,dz = 3(-\ln|\cos z|)+C \\ &= -3\ln\left|\cos\frac{y}{3}\right|+C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

被積分関数を $f(\sin x)\cos x$ または $f(\cos x)\sin x$ の形の式に変形するために次の事実を用いることがある： $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より,

$$\cos^2 x \;=\; 1-\sin^2 x \ , \qquad \sin^2 x \;=\; 1-\cos^2 x \ .$$

例 不定積分 $\int \cos^3 x\, dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \cos^3 x\, dx$ を計算する.

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x \ .$$

例 不定積分 $\int \cos^3 x\, dx$ を計算する.

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x \ .$$

変数 y を $y =$ 　　　　とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \cos^3 x \, dx$ を計算する.

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x \ .$$

変数 y を $y = \sin x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ より $\cos x \, dx = dy$.

例 不定積分 $\int \cos^3 x\, dx$ を計算する.

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので,

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x \ .$$

変数 y を $y = \sin x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ より $\cos x\, dx = dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x\, dx &= \int (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx = \int (1 - y^2)\, dy \\ &= y - \frac{1}{3} y^3 + C = \sin x - \frac{1}{3} (\sin x)^3 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \ . \end{aligned}$$

終

$\boxed{問 7.7.3}$ 不定積分 $\int \sin^3 x \, dx$ を計算せよ.

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (\qquad\qquad\qquad)\sin x \ .$$

変数 y を $y =$ 　　　　　とおく. $\dfrac{dy}{dx} =$ 　　　　　　　なので 　　　 $dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad dx =$$

$\boxed{\text{問}7.7.3}$ 不定積分 $\int \sin^3 x\,dx$ を計算せよ.

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1-\cos^2 x)\sin x \ .$$

変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x\,dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \qquad\qquad\qquad\qquad dx =$$

問7.7.3 不定積分 $\int \sin^3 x\,dx$ を計算せよ.

$$\sin^3 x \;=\; \sin^2 x \sin x \;=\; (1-\cos^2 x)\sin x \;\;.$$

変数 y を $y=\cos x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=-dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x\,dx &= \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \int (1-y^2)(-dy)\\ &= \int (y^2-1)\,dy = \frac{1}{3}y^3 - y + C\\ &= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos y + C \;\;.\end{aligned}$$

終

正接関数 $\tan x$ が現われる式は，公式 $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ によって変形する．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \tan x\,(1-\cos x)\,dx$ を計算する.

例 不定積分 $\int \tan x\,(1-\cos x)\,dx$ を計算する.

$$\tan x\,(1-\cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x) = \left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\sin x \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \tan x\,(1-\cos x)\,dx$ を計算する.

$$\tan x\,(1-\cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x) = \left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\sin x \ .$$

変数 y を $y=$ 　　　　　 とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \tan x\,(1-\cos x)\,dx$ を計算する.

$$\tan x\,(1-\cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x) = \left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\sin x\ .$$

変数 y を $y=\cos x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=-dy$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \tan x\,(1-\cos x)\,dx$ を計算する.

$$\tan x\,(1-\cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x) = \left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\sin x \ .$$

変数 y を $y=\cos x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=-dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \tan x\,(1-\cos x)\,dx &= \int\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\sin x\,dx = \int\left(\frac{1}{y}-1\right)(-dy)\\ &= \int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy = y-\ln|y|+C\\ &= \cos x-\ln|\cos x|+C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問 7.7.4}$ **不定積分** $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$ **を計算せよ.**

$\dfrac{\tan x}{\cos^2 x} = \dfrac{\qquad}{\qquad}$. 変数 y を $y = \qquad$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = \qquad$ なので $dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\qquad}{\qquad}\,dx = \int \frac{1}{\qquad} \qquad dx = \int \frac{1}{\qquad}(-dy)$$

$\boxed{\text{問}7.7.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$ を計算せよ.

$\dfrac{\tan x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ ． 変数 y を $y =$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} =$ なので $dx = -dy$ ． 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{1}{\qquad}\,dx = \int \frac{1}{\quad}(-dy)$$

$\boxed{問 7.7.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$ を計算せよ.

$\displaystyle\frac{\tan x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$. 変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\displaystyle\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x\,dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\qquad}{\qquad}\,dx = \int \frac{1}{\qquad\quad} \qquad\quad dx = \int \frac{1}{\quad}(-dy)$$

$\boxed{\text{問}7.7.4}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$ を計算せよ.

$\dfrac{\tan x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$. 変数 y を $y = \cos x$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x\,dx = -dy$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx &= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^3 x}\sin x\,dx = \int \frac{1}{y^3}(-dy)\\ &= -\textstyle\int y^{-3}dy = -\left(-\dfrac{1}{2}y^{-2}\right) + C = \dfrac{1}{2y^2} + C = \dfrac{1}{2\cos^2 x} + C\\ &= \frac{1}{2}\sec^2 x + C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

定数 a, b に対して関数 $\sin x$ の 1 次式 $a\sin x + b$ 或いは関数 $\cos x$ の 1 次式 $a\cos x + b$ を置換することがある.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\cos x+5}\,dx$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3\cos x + 5$ とおく.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3\cos x + 5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = -3\sin x$ なので, $\sin x\,dx = -\dfrac{1}{3}\,dy$.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3\cos x + 5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = -3\sin x$ なので, $\sin x\,dx = -\dfrac{1}{3}\,dy$.
積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5}\,dx = \int \frac{1}{y}\left(-\frac{1}{3}\,dy\right) = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{3}\ln|y| + C$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|3\cos x + 5| + C \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3\cos x + 5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = -3\sin x$ なので, $\sin x\,dx = -\dfrac{1}{3}\,dy$.
積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5}\,dx = \int \frac{1}{y}\left(-\frac{1}{3}\,dy\right) = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{3}\ln|y| + C$$
$$= -\frac{1}{3}\ln|3\cos x + 5| + C \ .$$

任意の実数 x について, $\cos x \geq -1$ なので, $3\cos x \geq -3$, $3\cos x + 5 \geq 2$,
よって $|3\cos x + 5| = 3\cos x + 5$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5}\,dx$ を計算する.

変数 y を $y = 3\cos x + 5$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = -3\sin x$ なので, $\sin x\,dx = -\dfrac{1}{3}\,dy$.
積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5}\,dx = \int \frac{1}{y}\left(-\frac{1}{3}\,dy\right) = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{3}\ln|y| + C$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|3\cos x + 5| + C\ .$$

任意の実数 x について, $\cos x \geq -1$ なので, $3\cos x \geq -3$, $3\cos x + 5 \geq 2$,
よって $|3\cos x + 5| = 3\cos x + 5$.

$$\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5}\,dx = -\frac{1}{3}\ln(3\cos x + 5) + C\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

問7.7.5 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{5\sin x - 7}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y =$ 　　　　　　　とおく. $\dfrac{dy}{dx} =$ 　　　　なので, 　　$dx =$ 　dy .

積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\cos x}{5\sin x - 7}\,dx = \int \qquad dx = \quad \int \quad dy = \quad \ln|\quad| + C$$

$$= \quad \ln|\qquad\qquad\qquad| + C \ .$$

任意の実数 x について, $\sin x \leq 1$ なので, $5\sin x \leq$ 　, $5\sin x - 7 \leq$ 　　,

よって $|\qquad\qquad\qquad| =$ 　　　　　. 故に

$$\int \frac{\cos x}{5\sin x - 7}\,dx =$$

$\boxed{問7.7.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{5\sin x - 7}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = 5\sin x - 7$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 5\cos x$ なので, $\cos x\,dx = \dfrac{1}{5}\,dy$.
積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\cos x}{5\sin x - 7}\,dx = \int \frac{1}{y}\,\frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{5}\ln|y| + C$$
$$= \frac{1}{5}\ln|5\sin x - 7| + C \ .$$

任意の実数 x について, $\sin x \leq 1$ なので, $5\sin x \leq$, $5\sin x - 7 \leq$,
よって $|\qquad\qquad| =$. 故に

$$\int \frac{\cos x}{5\sin x - 7}\,dx =$$

$\boxed{\text{問}7.7.5}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{5\sin x - 7}\,dx$ を計算せよ.

変数 y を $y = 5\sin x - 7$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 5\cos x$ なので, $\cos x\,dx = \dfrac{1}{5}\,dy$.
積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\cos x}{5\sin x - 7}\,dx = \int \frac{1}{y}\,\frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{5}\ln|y| + C$$
$$= \frac{1}{5}\ln|5\sin x - 7| + C\ .$$

任意の実数 x について, $\sin x \le 1$ なので, $5\sin x \le 5$, $5\sin x - 7 \le -2$,
よって $|5\sin x - 7| = 7 - 5\sin x$. 故に

$$\int \frac{\cos x}{5\sin x - 7}\,dx = \frac{1}{5}\ln(7 - 5\sin x) + C\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos t}{9-4\cos^2 t}\,dt$ を計算する.

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos t}{9-4\cos^2 t}\,dt$ を計算する.

$$9-4\cos^2 t \;=\; 9-4(1-\sin^2 t) \;=\; 4\sin^2 t+5 \quad .$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos t}{9-4\cos^2 t}\,dt$ を計算する.

$$9-4\cos^2 t \;=\; 9-4(1-\sin^2 t) \;=\; 4\sin^2 t+5 \;\;.$$

よって

$$\int \frac{\cos t}{9-4\sin^2 t}\,dt \;=\; \int \frac{\cos t}{4\sin^2 t+5}\,dt \;\;.$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos t}{9-4\cos^2 t}\,dt$ を計算する.

$$9-4\cos^2 t \;=\; 9-4(1-\sin^2 t) \;=\; 4\sin^2 t+5 \;\;.$$

よって

$$\int \frac{\cos t}{9-4\sin^2 t}\,dt \;=\; \int \frac{\cos t}{4\sin^2 t+5}\,dt \;\;.$$

変数 x を $x=\sin t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ なので $\cos t\,dt=dx$.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos t}{9-4\cos^2 t}\,dt$ を計算する.

$$9-4\cos^2 t \;=\; 9-4(1-\sin^2 t) \;=\; 4\sin^2 t+5 \;\;.$$

よって

$$\int \frac{\cos t}{9-4\sin^2 t}\,dt \;=\; \int \frac{\cos t}{4\sin^2 t+5}\,dt \;\;.$$

変数 x を $x=\sin t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ なので $\cos t\,dt=dx$. 積分定数を C とおく.

$$\int \frac{\cos t}{9-4\cos^2 t}\,dt = \int \frac{1}{4\sin^2 t+5}\cos t\,dt = \int \frac{1}{4x^2+5}\,dx$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos t}{9-4\cos^2 t}\,dt$ を計算する.

$$9-4\cos^2 t \;=\; 9-4(1-\sin^2 t) \;=\; 4\sin^2 t+5\ \ .$$

よって

$$\int \frac{\cos t}{9-4\sin^2 t}\,dt \;=\; \int \frac{\cos t}{4\sin^2 t+5}\,dt\ \ .$$

変数 x を $x=\sin t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ なので $\cos t\,dt=dx$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos t}{9-4\cos^2 t}\,dt &= \int \frac{1}{4\sin^2 t+5}\cos t\,dt = \int \frac{1}{4x^2+5}\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\frac{5}{4}}\,dx\end{aligned}$$

例 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos t}{9-4\cos^2 t}\,dt$ を計算する.

$$9-4\cos^2 t = 9-4(1-\sin^2 t) = 4\sin^2 t+5 \ .$$

よって

$$\int \frac{\cos t}{9-4\sin^2 t}\,dt = \int \frac{\cos t}{4\sin^2 t+5}\,dt \ .$$

変数 x を $x=\sin t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt}=\cos t$ なので $\cos t\,dt=dx$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos t}{9-4\cos^2 t}\,dt &= \int \frac{1}{4\sin^2 t+5}\cos t\,dt = \int \frac{1}{4x^2+5}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+\frac{5}{4}}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{5}{4}}}+C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2\sin t}{\sqrt{5}}+C \ .
\end{aligned}$$

終

$\boxed{\text{問 } 7.7.6}$ 不定積分 $\displaystyle\int \frac{\sin t}{7-3\sin^2 t}\,dt$ を計算する.

$$7-3\sin^2 t = 7-3(1-\cos^2 t) = 3\cos^2 t+4 \ .$$

変数 x を $x=\cos t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt} = -\sin t$ なので $\sin t\,dt = -dx$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin t}{7-3\sin^2 t}\,dt &= \int \frac{1}{3\cos^2 t+4}\sin t\,dt = -\int \frac{1}{3x^2+4}\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+\frac{4}{3}}\,dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{\frac{4}{3}}}+C \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}\cos t}{2}+C \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

a, b を実数とする.

余弦関数の加法定理の等式 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ と $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ とを左辺どうし右辺どうし足す.

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ + & \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b} \end{array}$$

これより

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} \ .$$

a, b を実数とする.

余弦関数の加法定理の等式 $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ と $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ とを左辺どうし右辺どうし足す.

$$
\begin{array}{rr}
 & \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
+ & \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b}
\end{array}
$$

これより

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} \ .$$

更に, $b = a$ とすると

$$\cos^2 a = \cos a \cos a = \frac{1}{2}\{\cos(a+a) + \cos(a-a)\} = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 0)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \ .$$

余弦関数の加法定理の等式 $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ と $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ とを左辺どうし右辺どうし引く.

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ - & \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a\sin b} \end{array}$$

これより

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\} \ .$$

余弦関数の加法定理の等式 $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ と $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ とを左辺どうし右辺どうし引く.

$$\begin{array}{rr} & \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \\ - & \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\sin a\sin b} \end{array}$$

これより

$$\sin a\sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\}\ .$$

更に, $b = a$ とすると

$$\sin^2 a = \sin a\sin a = -\frac{1}{2}\{\cos(a+a) - \cos(a-a)\} = -\frac{1}{2}(\cos 2a - \cos 0)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2a)\ .$$

正弦関数の加法定理の等式 $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$ と $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$ とを左辺どうし右辺どうし足す.

$$\begin{array}{rr} & \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b \\ + & \sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b} \end{array}$$

これより

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\}\ .$$

正弦関数の加法定理の等式 $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ と $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ とを左辺どうし右辺どうし足す.

$$\begin{array}{rr} & \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ + & \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \hline \multicolumn{2}{l}{\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b} \end{array}$$

これより

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\} \ .$$

更に $b = a$ とすると

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2}\{\sin(a+a) + \sin(a-a)\} = \frac{1}{2}(\sin 2a + \sin 0)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2a \ .$$

任意の実数 a, b について,

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\} \ ;$$

任意の実数 a, b について,

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\} \ ;$$

特に $b = a$ の場合は,

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) \ ,$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \ ,$$

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a \ .$$

任意の実数 a, b について，

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\} \ ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\{\sin(a+b) + \sin(a-b)\} \ ;$$

特に $b = a$ の場合は，

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a) \ ,$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a) \ ,$$

$$\sin a \cos a = \frac{1}{2}\sin 2a \ .$$

正弦関数や余弦関数の積を積分するときは，これらの公式を用いて三角関数の積を和・差に変形する．

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \cos^2 3t\,dt$ を計算する.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \cos^2 3t\,dt$ を計算する.

$$\int \cos^2 3t\,dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\,dt$$

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a) \quad .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \cos^2 3t\,dt$ を計算する.

$$\int \cos^2 3t\,dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dt + \int \cos 6t\,dt\right) \ .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \cos^2 3t\,dt$ を計算する.

$$\int \cos^2 3t\,dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\,dt = \frac{1}{2}\Big(\int 1\,dt + \int \cos 6t\,dt\Big) \ .$$

変数 x を $x = 6t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt} = 6$ なので $dt = \dfrac{1}{6}\,dx$.

$\boxed{例}$ 不定積分 $\int \cos^2 3t\,dt$ を計算する.

$$\int \cos^2 3t\,dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\,dt = \frac{1}{2}\Big(\int 1\,dt + \int \cos 6t\,dt\Big) .$$

変数 x を $x = 6t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt} = 6$ なので $dt = \dfrac{1}{6}\,dx$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\int \cos 6t\,dt = \int \cos x\,\frac{1}{6}\,dx = \frac{1}{6}\sin x + C_0 = \frac{1}{6}\sin 6t + C_0 .$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \cos^2 3t\,dt$ を計算する.

$$\int \cos^2 3t\,dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dt + \int \cos 6t\,dt\right) .$$

変数 x を $x = 6t$ とおく. $\dfrac{dx}{dt} = 6$ なので $dt = \dfrac{1}{6}\,dx$. 積分定数を C_0 とおく.

$$\int \cos 6t\,dt = \int \cos x \frac{1}{6}\,dx = \frac{1}{6}\sin x + C_0 = \frac{1}{6}\sin 6t + C_0 .$$

積分定数を C とおく.

$$\int \cos^2 3t\,dt = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dt + \int \cos 6t\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 6t}{6}\right) + C$$
$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin 6t}{12} + C .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問}\,7.7.7}$ 不定積分 $\displaystyle\int \sin^2 \frac{x}{6}\, dx$ を計算せよ.
積分定数を C とおく.

$$\int \sin^2 \frac{x}{6}\, dx = \int \frac{\qquad\qquad}{2}\, dx =$$

$\boxed{\text{問}\,7.7.7}$ 不定積分 $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{6}\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \sin^2\frac{x}{6}\,dx = \int \frac{1-\cos\frac{x}{3}}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(1-\cos\frac{x}{3}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x-3\sin\frac{x}{3}\right)+C$$

$$= \frac{x}{2}-\frac{3}{2}\sin\frac{x}{3}+C \quad .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \sin(2x-3)\sin(5x+1)\,dx$ を計算せよ.

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \sin(2x-3)\sin(5x+1)\,dx$ を計算せよ.

$$\sin(2x-3)\sin(5x+1) = -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2) - \cos(-3x-4)\}$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\{\cos(a+b) - \cos(a-b)\}$$

$\boxed{\text{例}}$ 不定積分 $\int \sin(2x-3)\sin(5x+1)\,dx$ を計算せよ.

$$\begin{aligned}\sin(2x-3)\sin(5x+1) &= -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2)-\cos(-3x-4)\}\\ &= -\frac{1}{2}[\cos(7x-2)-\cos\{-(3x+4)\}]\\ &= -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2)-\cos(3x+4)\}\ .\end{aligned}$$

$$\sin(2x-3)\sin(5x+1) = -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2) - \cos(3x+4)\} \ .$$

$$\sin(2x-3)\sin(5x+1) = -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2)-\cos(3x+4)\} \ .$$

変数 y を $y = 7x-2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx} = 7$ なので $dx = \dfrac{1}{7}dy$. 変数 z を $z = 3x+4$ とおく. $\dfrac{dz}{dx} = 3$ なので $dx = \dfrac{1}{3}dz$.

$$\sin(2x-3)\sin(5x+1) = -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2)-\cos(3x+4)\}\ .$$

変数 y を $y=7x-2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=7$ なので $dx=\dfrac{1}{7}dy$. 変数 z を $z=3x+4$ とおく. $\dfrac{dz}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int\sin(2x-3)\sin(5x+1)\,dx &= -\frac{1}{2}\int\{\cos(7x-2)-\cos(3x+4)\}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\{-\int\cos(7x-2)\,dx+\int\cos(3x+4)\,dx\}\end{aligned}$$

$$\sin(2x-3)\sin(5x+1) = -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2)-\cos(3x+4)\} \ .$$

変数 y を $y=7x-2$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=7$ なので $dx=\dfrac{1}{7}dy$. 変数 z を $z=3x+4$ とおく. $\dfrac{dz}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}dz$. 積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}
\int\sin(2x-3)\sin(5x+1)\,dx &= -\frac{1}{2}\int\{\cos(7x-2)-\cos(3x+4)\}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\{-\int\cos(7x-2)\,dx + \int\cos(3x+4)\,dx\} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\int\cos y\,\frac{1}{7}\,dy + \int\cos z\,\frac{1}{3}\,dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\sin y + \frac{1}{3}\sin z\right) + C \\
&= \frac{\sin(3x+4)}{6} - \frac{\sin(7x-2)}{14} + C \ .
\end{aligned}$$

$\boxed{終}$

$\boxed{問 7.7.8}$ 不定積分 $\int \cos(2x-4)\cos(3x+2)\,dx$ を計算せよ．
積分定数を C とおく．

$$\int \cos(2x-4)\cos(3x+2)\,dx = \int \Bigg[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg] dx$$

$\boxed{\text{問}7.7.8}$ 不定積分 $\int \cos(2x-4)\cos(3x+2)\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \cos(2x-4)\cos(3x+2)\,dx = \int \left[\frac{1}{2}\{\cos(5x-2)+\cos(x+6)\}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int \cos(5x-2)\,dx + \int \cos(x+6)\,dx\right\}$$

$\boxed{\text{問}7.7.8}$ 不定積分 $\int \cos(2x-4)\cos(3x+2)\,dx$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \cos(2x-4)\cos(3x+2)\,dx &= \int \left[\frac{1}{2}\{\cos(5x-2)+\cos(x+6)\}\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int \cos(5x-2)\,dx + \int \cos(x+6)\,dx\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(5x-2)}{5}+\sin(x+6)\right\}+C \\ &= \frac{\sin(5x-2)}{10}+\frac{\sin(x+6)}{2}+C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{問7.7.9}$ 不定積分 $\int \sin(7-3y)\cos(5y-2)\,dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \sin(7-3y)\cos(5y-2)\,dy = \int \Bigg[\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Bigg] dy$$

$\boxed{問 7.7.9}$ 不定積分 $\int \sin(7-3y)\cos(5y-2)\,dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\int \sin(7-3y)\cos(5y-2)\,dy = \int \left[\frac{1}{2}\{\sin(2y+5) - \sin(8y-9)\}\right] dy$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\int \sin(2y+5)\,dy - \int \sin(8y-9)\,dy\right\}$$

$\boxed{問 7.7.9}$ 不定積分 $\int \sin(7-3y)\cos(5y-2)\,dy$ を計算せよ.

積分定数を C とおく.

$$\begin{aligned}\int \sin(7-3y)\cos(5y-2)\,dy &= \int \left[\frac{1}{2}\{\sin(2y+5) - \sin(8y-9)\}\right] dy \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int \sin(2y+5)\,dy - \int \sin(8y-9)\,dy\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\{-\cos(2y+5)\} - \frac{1}{8}\{-\cos(8y-9)\}\right] + C \\ &= \frac{\cos(8y-9)}{16} - \frac{\cos(2y+5)}{4} + C \ .\end{aligned}$$

$\boxed{終}$